并联机构的等价关系和偏序关系在机构综合与自由度分析中的应用

吴元庆, 丁汉*

上海交通大学机械工程与动力学院, 上海 200240

* 联系人, E-mail: hding@sjtu.edu.cn

2008-10-27收稿, 2009-04-10接受

国家重点基础研究发展计划(编号: 2006CB705400)、国家高技术研究发展计划(编号: 2006AA4Z334)和上海市科学技术委员会基金(编号: 071111008)资助项目

摘要 并联机构的运动类型(或运动模式)指的是机构末端执行器可实现的刚体运动的集合, 它是所有支链运动类型的交集. 作为非瞬时自由度并联机构一个主要运动学特性, 运动类型在局部具有刚体变换群(或特殊欧氏群)的子流形(或特别地具有 Lie 子群)结构. 基于这个子流形性质和子流形簇的概念, 我们定义了运动类型以及并联机构的等价关系和偏序关系: 如果两个运动类型在 $SE(3)$ 单位元的某一开邻域内一致, 那么我们称这两个运动类型等价; 如果其中一个运动类型在 $SE(3)$ 单位元的某一开邻域内为另外一个的子流形, 那么我们称这两个运动类型之间具有序关系, 并由此定义了并联机构的一种偏序关系, 研究了运动类型和并联机构的等价与偏序关系, 并给出了其在并联机构综合、自由度分析和非过约束构型等方面的应用.

关键词

并联机构
运动类型
等价关系
偏序关系
机构综合
自由度分析

并联机构运动学涉及的一项主要指标是末端执行器可实现的运动类型(motion type^[1])或运动方案(motion pattern^[2]). 如图 1 所示, 给定一个并联机构的末端执行器坐标架 E 和一个参考坐标架 R , 我们定义它的运动类型为所有 E 相对 R 的刚体运动组成的集合, 记为 M . M 代表并联机构所有支链运动类型 $M_i, i=1, \dots, n$ 的交集: $M = \bigcap_{i=1}^n M_i$. 从集合论上来看, 运动类型 M 是刚体变换群 $SE(3)$ 的子集:

$$SE(3) := \left\{ \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL(4, \mathbb{R}) \mid R \in SO(3), p \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

当并联机构具有非瞬时自由度时, 它的运动类型具有 $SE(3)$ 的局部正则子流形(包括 Lie 子群这个特殊情况)的微分结构(有关微分流形和 Lie 群以及下文出现的商流形的基本概念, 请参考文献[3]). M 的维

数称为对应并联机构的(输出)自由度. 因为 M 是非瞬时的, 所以我们可以得到 M 在单位元 e 处的切空间 $T_e M$, 它是 $SE(3)$ 的 Lie 代数 $se(3)$ 的一个线性子空间. $se(3)$ 具有如下形式:

$$se(3) := \left\{ \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid \hat{\omega} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \hat{\omega}^T = -\hat{\omega}, v \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

一般称为(速度)旋量或螺旋空间^[4], 而支链切空间作为它的线性子空间满足 $T_e M = \bigcap_{i=1}^n T_e M_i$. 燕山大学黄真等人首先提出的基于螺旋理论的并联机构分类、分析和综合方法^[5,6], 将末端执行器的旋量空间 $T_e M$ 作为综合目标, 运用支链旋量空间及对偶(力)旋量空间进行构型综合. 螺旋理论也被黄真和 Dai 等用于并联机构的自由度分析中^[7,8]. 但是该方法容易产生瞬时机构和瞬时自由度, 需要通过有限运动判断的

引用格式: 吴元庆, 丁汉. 并联机构的等价关系和偏序关系在机构综合与自由度分析中的应用. 科学通报, 2009, 54: 3682~3691

Wu Y Q, Ding H. Equivalence relation and partial ordering of parallel mechanisms with applications to mechanism synthesis and mobility analysis. Chinese Sci Bull, doi: 10.1007/s11434-009-0683-4

<https://engine.scichina.com/doi/10.1360/csb2009-54-23-3682>

辅助条件(如文献[9]提出的虚拟支链法和文献[10]提出的有限运动几何条件)才可以确保末端执行器具有指定的运动类型 M 和自由度. 法国学者 Herve 提出的基于 Lie 群的并联机构综合方法^[11], 直接在位移而非速度层面进行综合, 克服了这一困难, 但它只适用于 M 以及支链运动类型为 $SE(3)$ 的 Lie 子群的并联机构综合场合(机构运动类型 $M = G$ 是支链运动类型 $M_i = G_i$ 的 Lie 子群). 为了克服这一局限性, 他引入了 Lie 群积(doubly group bond, $G_1 \cdot G_2$)的支链和末端运动类型, 作为对 Lie 群综合方法的推广^[12~14]. 李秦川等人将 Lie 群积运用于 5 自由度并联机构的运动类型分类和综合中^[15]. 在自由度分析方面, Rico 等在 Herve 工作的基础上提出了单闭环自由度分析的 Lie 代数方法^[16], 并推广到一般并联机构^[17]. 上述这些基于螺旋理论和 Lie 群理论的并联机构分析和综合方法仅仅运用了 Lie 群和 Lie 代数(旋量空间)的代数结构, 在微分结构层面上未能详加论述, 造成诸如无法运用平行四边形铰链等复合铰链进行综合及分析等问题. 基于 Lie 代数的自由度分析方法亦缺乏普遍性而未受广泛认可. 孟建等人提出了基于微分几何的并联机构综合理论^[1], 完善了 Herve 和黄真等人的工作. 该方法将并联机构的运动类型 M 描述为支链运动类型 M_i 的(正则)子流形, 并围绕 1, 2 类子流形展开并联机构的系统综合. 但是该方法需要运动类型的显式表示(第 1, 2 类子流形的形式), 否则无法进行综合. 这无疑限制了并联机构综合结果的丰富性: 文献[1]将 5 轴并联机床的末端运动类型 M 定义为 3T2R 的第 1 类子流形 $T(3) \cdot U(o, x, y)$. 其实, M 描述的是将具有旋转对称性的铣刀主轴移至空间任意位置、转至任意姿态的运动, 因此它的定义应该为 $M \cdot SO(2) = SE(3)$ (局部等号成立), 是 $SE(3)/SO(2)$ 的一个横截子流形, 记为 $M \in \{SE(3)/SO(2)\}$. 本文在文献[1]的基础上提出了基于商流形的商联机构综合理论, 系统研究了商联机构(商联机构指具有 2 个协同工作的独立运动机构模块, 由并联、串联或混联机构实现, 分别负责完成一个子运动及其补运动)的分类及其并联模块的间接和直接综合^[18], 其中直接综合法基于商流形的横截子流形, 只需指定 $M \subset M_i$ 所属的商流形的层级关系 $\{G/H\} < \{G_i/H_i\}$, 回避了末端和支链运动类型的显式求解问题, 产生了一些新构型, 如图 1 所示的

$SE(3)/SE(2)$ 型(不同于传统的 1T2R 型)并联机构, 其末端运动类型 $M \in \{SE(3)/SE(2)\}$ 并不等于第 1 类子流形 $T(z) \cdot U(o, x, y)$.

图 1 并联机构刚体运动示意图

从上述并联机构综合理论和自由度分析方法的发展来看, 并联机构的数学建模经历了以下几个阶段:

(i) 旋量(螺旋)理论:

$$T_e M = \bigcap_{i=1}^n T_e M_i. \quad T_e M \text{ 是 } T_e M_i \text{ 的线性子空间};$$

(ii) Lie 群理论:

$$G = \bigcap_{i=1}^n G_i. \quad G \text{ 是 } G_i \text{ 的 Lie 子群};$$

(iii) 微分流形理论:

$$M = \bigcap_{i=1}^n M_i. \quad M \text{ 是 } M_i \text{ 的正则子流形};$$

(iv) 商流形理论:

$$\{G/H\} = \bigcap_{i=1}^n \{G_i/H_i\}. \quad \text{存在 } \{G_i/H_i\} \text{ 的横截运动类型 } M_i \text{ 使 } M \in \{G/H\} \text{ 是 } M_i \text{ 的正则子流形}.$$

可见, 并联机构的末端和支链运动类型之间的关系是 Lie 子群(其旋量空间)、子流形之间的父子层级(包含)关系. 文献[1]中列举了 $SE(3)$ 的所有 10 种 Lie 子群及其层级关系, 并将其推广到第 1, 2 类子流形. 例如对 $SE(3)$ 的任何 Lie 子群 G 和 H , 显然有 $G \subset G \cdot H$ (Lie 群积或第 2 类子流形). 类似的可以建立 $SE(3)$ 的所有商流形之间的层级关系: 如果 $H \subset H'$, 那么 $\{G/H'\} < \{G/H\}$; 如果 $G \subset G'$, 那么 $\{G/H\} < \{G'/H\}$. 这些层级关系分别是对应并联机构综合理论和自由度分析方法的创新关键.

包含(层级)关系在集合论上构成一个偏序关系^[19], 而非一个全序关系: 因为 $SE(3)$ 的任意两个子

流形之间并不一定具有包含关系;一旦具有包含关系,那么它们之间就存在传递性.如果两个子流形的偏序关系还满足对称性,那么它们在局部邻域内相等;这种局部相等的性质是一种等价关系.本文通过定义并联机构的末端和支链的运动类型的偏序关系和等价关系,研究了并联机构的偏序关系和等价关系,并揭示其在并联机构综合以及自由度分析方面的应用.结果表明,并联机构的偏序关系与等价关系的运用,在并联机构综合和自由度分析方面都有一定的创新作用.

1 运动类型及并联机构的等价和偏序关系

非瞬时自由度并联机构的运动类型 M 具有 $SE(3)$ 的局部正则子流形的微分结构,即存在 $SE(3)$ 的正则子流形 N 以及 $SE(3)$ 关于 e 的开邻域 U_e , 满足 M 和 N 在 U_e 上一致:

$$M \cap U_e = N \cap U_e. \quad (1)$$

可见运动类型是一个局部概念,不涉及任何整体微分几何问题,可以理解为一个子流形簇.根据(1)式,并联机构的等价性可定义如下:

如果运动类型 M, N 满足 (1) 式,那么我们称两个并联机构 $\bar{M}, \bar{N}$ 互相等价,并记为 $M \sim N$. “ $\sim$ ”满足以下 3 条性质:

(i) 自反性:

$$M \cap U_e = M \cap U_e;$$

(ii) 对称性:

$$M \cap U_e = N \cap U_e \Rightarrow N \cap U_e = M \cap U_e;$$

(iii) 传递性:

$$M \cap U_e = N \cap U_e, N \cap V_e = P \cap V_e \Rightarrow$$

$$M \cap (U_e \cap V_e) = P \cap (U_e \cap V_e).$$

所以“ $\sim$ ”是 $SE(3)$ 的所有子流形(簇)构成的集合上的等价关系.例如, Delta 并联机构^[20], Orthoglide 机构^[21], Tsai 机构^[22](见图 2)以及文献[9]中给出的所有构型都是互相等价的(或属于同一等价类),因为它们的运动类型都等价于(在一个邻域上保持相等)空间平移群 $T(3)$:

$$T(3) := \left\{ \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL(4, \mathbb{R}) \mid p \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

我们记 $T(3)$ 的等价类为 $[T(3)]$.

对于一个给定的运动类型 M , 机构综合的任务就是利用一系列备选低副铰链或复合铰链作为基本

图 2 3 类 3 自由度平移并联机构

单元(基本单元亦具有子流形运动类型,例如低副铰链具有 Lie 子群运动类型,而复合铰链一般具有子流形的运动类型)构造所有可能的机构构型,使其末端执行器的运动类型 N 满足 $N \in [M]$. 并联机构的综合问题通常采用以下两步法进行解决: i) 给定备选基本单元(例如旋转铰链, 平移铰链等等)和支链的运动类型 $M_i \subset SE(3)$, 对支链进行构型综合; ii) 选择合适的支链运动类型使其满足 $M \sim \bigcap_{i=1}^r M_i$. 这里 r 一般取为 M 的维数,即支链数目等于机构的自由度. 根据“ $\sim$ ”的定义,支链的运动类型 $M_i \subset SE(3)$ 需满足:

$$M \cap U_e \subset M_i \cap U_e, i = 1, \dots, r. \quad (2)$$

换言之,并联机构的运动类型是支链运动类型的正则子流形.如果 M_i 和 M 都为 $SE(3)$ 的 Lie 子群,那么(2)表明 M 是 M_i 的 Lie 子群.我们简记(2)式为 $M \leq M_i$. 根据子流形关系的传递性,易证“ $\leq$ ”满足:

自反性:

$$(i) M \leq M, \forall M;$$

反对称性:

(ii) $N \leq M, M \leq N \Rightarrow M = N$ (等号指在局部一致);

传递性:

$$(iii) M \leq N, N \leq P \Rightarrow M \leq P.$$

它定义了子流形集上的一种(非严格)偏序关系(partial order relation). 该偏序关系非严格,即“ $\leq$ ”可取等号成立,此时“ $\leq$ ”根据定义表示等价关系“ $\sim$ ”.

运用我们以上定义的等价关系 $\sim$ 和偏序关系“ $\leq$ ”, 并联机构 $\bar{M}$ 具有运动类型 M 当且仅当: i) $M \leq M_i, i = 1, \dots, r$; ii) $M \sim \bigcap_{i=1}^r M_i$. 以下我们简记满足并联机构 i) 和 ii) 的并联机构为 $\bar{M} : (M_1, \dots, M_r)$.

举例来说,如图 3 所示, Delta 机构具有 $T(3)$ 运动类型,我们取 $r = 3 = \dim T(3)$. 根据文献[1]可知, Delta 机构的 RRPaR 支链(R 代表旋转铰链, Pa 代表平行

四边形铰链,下文的 P 表示平移铰链)具有 Schoenflies 群 $X(z)$ (3T1R) 的运动类型,记为 $X(v_i), i=1,2,3$. 因为 $M=T(3)$ 是 $X(v_i), i=1,2,3$ 的 Lie 子群,所以 $M < M_i, i=1, \dots, 3$. 另一方面 $\bigcap_{i=1}^3 X(v_i) = T(3)$ 表明 $M \sim \bigcap_{i=1}^3 M_i$. 值得强调的是 $\bar{M}$ 的运动类型只依赖于支链的运动类型而非具体的机械构型,因此 $\bar{M}$ 对应的任何具体构型都具有 $M=T(3)$ 的运动类型. 这也说明并联机构综合问题完全可以抽象为所有支链运动类型的综合问题.

图3 Delta机构的并联运动类型

另一方面,如果另一并联机构 $\bar{N}: (N_1, \dots, N_r)$ 满足 $M_i \leq N_{\sigma(i)}, i=1, \dots, r$ (其中 σ 是下标集 $\{1, \dots, r\}$ 的任意重排: $\sigma \in S_r$), 那么 $M \leq N$. 推导过程如下:

$$M \leq M_i \leq N_{\sigma(i)} \Rightarrow M \leq \bigcap_{i=1}^r N_i \sim N. \quad (3)$$

(3)式表明,我们可以定义一个 r 重元组(r -tuple)的偏序关系:

$$(M_1, \dots, M_r) \leq_p (N_1, \dots, N_r) \text{ iff} \\ M_i \leq N_{\sigma(i)}, i=1, \dots, r, \sigma \in S_r.$$

上式之所以考虑重排 $\sigma \in S_r$ 是因为根据运动类型和支链运动类型的关系 $M = \bigcap_{i=1}^n M_i$, 支链的顺序不影响运动类型. 我们简称 r 重元组 $(M_1, \dots, M_r)$, $(N_1, \dots, N_r)$ 为并联机构 $\bar{M}, \bar{N}$ 的并联运动类型, 而称 $\leq_p$ 为定义在所有并联运动类型构成的集合上的偏序关系. 类似地根据前述并联机构的等价关系 $\sim$, 并联运动类型的等价关系定义如下:

$$(M_1, \dots, M_r) \sim_p (N_1, \dots, N_r) \text{ iff}$$

$$\bigcap_{i=1}^r M_i \sim \bigcap_{i=1}^r N_i. \quad (4)$$

我们记其等价类为 $[(M_1, \dots)]$. 由此定义的并联机构的等价性“ $\sim_p$ ”与前述并联机构关于运动类型的等价性“ $\sim$ ”是一致的. 当“ $\leq_p$ ”取等号“ $=_p$ ”和“ $\sim_p$ ”一致. 以上述并联机构为例, Delta 机构的并联运动类型等价于 Tsai 机构的并联运动类型:

$$(X(v_1), X(v_2), X(v_3)) \sim_p (UPU_1, UPU_2, UPU_3),$$

为了得到它们的偏序关系, 首先比较 $X(v_i)$ 和 UPU_i (假定 Tsai 机构的支链第一个旋转铰链方向分别为 v_i). 如果 UPU_i 的第 1 和第 5、第 2 和第 4 铰链保持异号等转角关系, 运用文献[1]的互换原则, 即可得到 $X(v_i) < UPU_i$ (文献[6]利用这个关系首次综合了一种 4UPU 支链的 $X(z)$ 型 3T1R 并联机构). 所以

$$(X(v_1), X(v_2), X(v_3)) \sim_p (UPU_1, UPU_2, UPU_3).$$

类似的, 我们考虑 $\bar{M}: (T(3), SE(3), SE(3))$ (例如由一条 PPP 支链和两条全自由度 UPS 支链组成的并联机构), 它满足以下等价关系:

$$(T(3), SE(3), SE(3)) \sim_p (X(v_1), X(v_2), X(v_3)),$$

但两者不具偏序关系. 因此, 即便两个并联机构等价, 其并联运动类型之间也未必具有可比性.

在上文中我们严格定义了运动类型和并联机构的等价关系及偏序关系“ $\sim$ ”, “ $\leq$ ”, “ $\sim_p$ ”, “ $\leq_p$ ”. 因此, 并联机构的综合问题等价于以下数学化过程: 在给定运动类型 M 前提下进行并联机构综合, 就是根据偏序关系“ $\leq_p$ ”来枚举等价类 $[(M, \dots, M)]$ (这里 $(M, \dots, M)$ 是 M 的平凡并联运动类型, 因为 $\bigcap_{i=1}^r M = M$ 显然成立) 大于或等于 $(M, \dots, M)$ 的并联运动类型及用基本铰链对其支链进行综合的问题.

此外, “ $\leq_p$ ”, “ $\sim_p$ ”与并联机构的自由度分析也有密切的关系. 自由度作为描述机构运动位形的最少独立参数个数^[23], 反映了其位形空间的维数. 一个并联机构 $\bar{M}$ 的位形空间 $C_{\bar{M}}$ 即为其所有支链运动类型组成的乘积空间中满足闭环约束的子集:

$$C_{\bar{M}}: \{(g_1, \dots, g_r) \in M_1 \times \dots \times M_r \mid g_1 = \dots = g_r\}. \quad (5)$$

根据(5)式, $C_{\bar{M}}$ 又是闭环约束映射 Φ :

$$\begin{aligned}\Phi: M_1 \times \cdots \times M_r &\mapsto SE^{r-1}(3), \\ \Phi(g_1, \dots, g_r) &= (g_1 g_2^{-1}, \dots, g_1 g_n^{-1}).\end{aligned}\quad (6)$$

关于 $(e, \dots, e) \in SE^{r-1}(3)$ 的水平集:

$$C_{\bar{M}} = \Phi^{-1}(e, \dots, e),$$

对于具有非瞬时自由度的并联机构, Φ 的微分映射 Φ_* 在 $(e, \dots, e)$ 的某一开邻域上具有常秩 k , 所以 Φ 是一个局部 subimmersion 映射^[24]. Subimmersion 等于一个淹没映射 (submersion) 和一个浸入映射 (immersion) 的复合. 所以包含了淹没和浸入映射两种情况作为特例. 根据 subimmersion 定理^[24], $\Phi^{-1}(e, \dots, e)$ 是乘积流形 $M_1 \times \cdots \times M_r$ 的正则子流形, 且其维数为

$$\dim \Phi^{-1}(e, \dots, e) = \sum_{i=1}^r \dim M_i - k.$$

当并联机构的所有支链都处于非正向奇异形位时, 有 $\dim M_i = \sum_j f_{ij}$, 其中 f_{ij} 是第 i 支链第 j 铰链的自由度. 那么并联机构的(内部)自由度由(7)式给出,

$$\text{dof} = \sum_{i=1}^r \dim M_i - k = \sum_{i=1, j}^r f_{ij} - k. \quad (7)$$

(7)式根据 k 的不同对应于 Greubler 自由度公式的不同变化形式. 例如, 对于平面并联机构, Φ 可以定义为从 $M_1 \times \cdots \times M_r$ 到 $SE^{r-1}(2)$ 的映射, 如果 Φ 又同时满秩(淹没映射), 那么 $k = \dim SE^{r-1}(2) = 3(r-1)$. 在空间情况下, 当 Φ 满秩时, $k = 6(r-1)$. 则(7)式变为

$$\text{dof} = \sum_{i=1, j}^r f_{ij} - 6(r-1), \quad (8)$$

此即为非过约束空间机构的 Greubler 自由度公式. 如果 $k < 6(r-1)$, (8) 式显然是不成立的. 我们一般称 $\text{no} = 6(r-1) - k = 6(r-1) - (\sum_{i=1, j}^r f_{ij} - \text{dof})$ 为并联机构的过约束度^[2].

根据上述自由度定义, 我们给出“ $\sim_p$ ”和“ $\leq_p$ ”的两个关键性质, 并在下文中具体证明:

性质 1

如果 $\bar{M} \leq_p \bar{N}$, 那么 $\text{dof}_{\bar{M}} \leq \text{dof}_{\bar{N}}$.

性质 2

如果 $\bar{M} \leq_p \bar{N}$ 且 $\bar{M} \sim_p \bar{N}$, 那么 $\bar{M}$ 的过约束度大于等于 $\bar{N}$ 的过约束度, 记为 $\text{no}_{\bar{M}} \geq \text{no}_{\bar{N}}$.

2 在并联机构综合及自由度分析中的应用

2.1 单并联机构的几何描述

(i) 并联机构几何定义. 一个并联机构 $(\bar{M}, \Phi, F)$ 由一个 3 重元组组成, 包含一个并联运动类型 $\bar{M}: (M_1, \dots, M_r)$, 一个闭环约束映射 Φ :

$$\begin{aligned}\Phi: M_1 \times \cdots \times M_r &\mapsto SE^{r-1}(3), \\ \Phi(g_1, \dots, g_r) &= (g_1 g_2^{-1}, \dots, g_1 g_n^{-1}),\end{aligned}$$

和正向运动学映射 F :

$$F: M_1 \times \cdots \times M_r \mapsto SE(3), F(g_1, \dots, g_r) = g_1,$$

其位形空间 $C_{\bar{M}}$ 为 $\Phi^{-1}(e, \dots, e)$, 而其运动类型为 $F(\Phi^{-1}(e, \dots, e))$.

以上定义中, 并联运动类型和闭环约束映射在前面已经定义, 不作详述. F 为从并联运动类型到 $SE(3)$ 的投影, 是一个 subimmersion. F 的物理意义为: 如果去除并联机构的闭环约束, 其末端执行器的运动类型等于其第一支链(也可以是其他支链)的运动类型. 根据 Φ 的形式, 我们可以得出 $C_{\bar{M}}$ 与 M 的关系:

$$C_{\bar{M}} = \Delta M := \{(g, \dots, g) \in SE^r(3) \mid g \in M\},$$

所以 $C_{\bar{M}}$ (局部)微分同胚于 M . 其物理意义为, 一个无内部自运动的并联机构在非奇异位形上, 其位形空间和运动类型的维数应该保持一致.

(ii) 并联运动类型集. 我们定义 r -并联运动类型集为所有非瞬时 r 自由度 r 支链的并联运动类型所组成集合, 记为 $C_p(r)$:

$$C_p(r) := \{(M_1, \dots, M_r) \subset SE^r(3) \mid \bigcap_{i=1}^r M_i \text{ 为子流形}\}.$$

当 $r=1$ 时, $C_p(1)$ 恰好对应于 $SE(3)$ 所有正则子流形组成的集合. 所以, $C_p(r)$ 上定义的“ $\sim_p$ ”, “ $\leq_p$ ”在 $r=1$ 时恰好对应于一般子流形(或运动类型)上定义的“ $\sim$ ”, “ $\leq$ ”. 确切来讲, $C_p(r)$ 仅仅是 r 重元组 $C_p^r(1)$ 的一个子集, 这考虑到瞬时机构的存在性. 而定义 2 有效回避了这一问题. 根据(ii), 我们可以将上文中有关并联机构的定义 $(\bar{M}, \Phi, F)$ 简化为无约束的形式:

$$\hat{F}: C_p(r) \mapsto C_p(1), F(M_1, \dots, M_r) = \bigcap_{i=1}^r M_i,$$

$\hat{F}$ 的定义成立(指 $\hat{F}$ 的像空间是所有子流形的集合, 恰为 $C_p(1)$). 运用 $\hat{F}$ 的定义, 有助于描述和理解前述有关偏序关系和等价关系的几个结论.

(i) 保持偏序集 $(C_p(r), \leq_p)$ 和 $(C_p(1), \leq)$ 之间的序关系. 换言之, $(C_p(r), \leq_p)$ 和 $(C_p(1), \leq)$ 拥有一致的偏序类型(order type).

(ii) “ $\sim_p$ ”的等价类由下式给出:

$$[(M_1, \dots, M_r)] = \hat{F}^{-1}(\hat{F}(M_1, \dots, M_r)).$$

以上两个命题的证明仅按前述定义就可得到, 不再赘述.

2.2 在并联机构综合中的应用

本小节举例阐述了偏序关系和等价关系在基于商流形的并联机构分析及综合理论^[18]方面的应用. 以 DS Technology 的 Echospeed FHT 加工中心为例, 其 Sprint Z3 并联模块(3-PRS 并联机构)具有 $SE(3)/SE(2)$ (1T2R)的运动类型. 因为 $SO(2) \subset SE(2)$ (子群包含关系), 所以有:

$$\{SE(3)/SE(2)\} < \{SE(3)/SO(2)\},$$

类似的, 根据 $SE(2) < SE(3)$, 又有:

$$T_2(z) \in \{SE(2)/SO(2)\} < \{SE(3)/SO(2)\},$$

两者协同工作, 可产生 5 轴运动:

$$\{SE(3)/SE(2)\} \cdot \{SE(2)/SO(2)\} = \{SE(3)/SO(2)\},$$

上述对商流形的偏序关系的运用解决了以往并联机构综合理论难以描述类似问题的困难.

在并联机构综合方面, 我们利用:

$$\{SE(3)/SE(2)\} < \{SE(3)/T(v)\}, v \perp z$$

之间的偏序关系, 可知第二类子流形 $S(p) \cdot S(p+v)$ 是 $\{SE(3)/SE(2)\}$ 并联机构的潜在可行支链运动类型. 我们有:

$$(\{SE(3)/T(v_1)\}, \{SE(3)/T(v_2)\}, \{SE(3)/T(v_3)\}) \\ \in \hat{F}^{-1}\{SE(3)/SE(2)\}, v_i \perp z, i=1, 2, 3.$$

由此即可得到图 1 所示的 3-US 并联机构, 是一个与 Z3 并联机构等价的一移两转并联机构. 因此 3-US 并联机构可用以替代 Sprint Z3 并联模块. 但是, $\{SE(3)/SE(2)\}$ 不属于文献[25]所提出的 9 种位移流形中的任何一类该并联机构, 因而无法用基于螺旋理论的并联机构综合方法得到的. 可见, 根据 $\{G/H\}$ 中 Lie 子群 G, H 选取的不同, 将获得远超过 9 种运动类型的低自由度并联机构. 但本文主要目的不是开展商流形并联机构的综合问题, 此处不再赘述.

另外, 偏序和等价关系在混联机构分析和综合中也有一定的应用. 如图 4 所示的 EPFL 的 Alpha5 混联机构, 具有 5 轴运动类型. 其分析方法如下: 上位的 Delta 并联机构为 $T(3)$ 运动类型, 也可视为 $\{X(z)/SO(2)\}$ 运动类型; 下位的 Orion 并联机构是等价于 Z3 的 3-RRS 并联机构, 易知其并联运动类型同样为 $\{SE(3)/SE(2)\}$; Delta 和 Orion 之间由虎克较 U 相连, 将 Orion 的 $\{SE(3)/SE(2)\}$ 运动类型(关于偏序)增广至 $\{SE(3)/SO(2)\}$; Alpha5 的 3 条外部驱动支链组成 $\{SE(3)/T(3)\}$ 并联模块与 Orion 并联. 所以, 最终 Orion 将产生:

图 4 Alpha5 5 轴混联机构

$$\{SE(3)/(T(3) \cdot SO(2))\} = \{SE(3)/X(z)\}$$

的运动类型. Orion 与 Delta 串联后产生:

$$\{SE(3)/X(z)\} \{X(z)/SO(2)\} = \{SE(3)/SO(2)\}$$

的运动类型. 从综合角度考虑, 我们将 Orion 模块替换为图 1 的 3-US 并联机构, 即可得到了一种新的 5 轴混联构型, 如图 5 所示. 另外, Delta 部分也可被替

图 5 采用了 3-US 模块的 Alpha-5 变结构
换为其他等价的并联机构, 例如如图 2 所示的 Tsai

机构和 Orthoglide 机构. 结合两部分模块的构型的多样性, 最终我们得到的综合结果将是非常多样化的, 限于篇幅不作枚举.

2.3 在自由度分析中的应用

本小节中我们首先给出性质 (i) 和 (ii) 的证明, 然后针对机构综合和自由度分析中的若干问题分别论述和举例.

性质 (i) 证明

不失一般性, 我们假定 $M_i \leq N_i$, 那么我们可以定义如下包含映射:

$$i: \bar{M} \mapsto \bar{N}: (g_1, \dots, g_r) \mapsto (g_1, \dots, g_r).$$

记 $\bar{M}, \bar{N}$ 的闭环约束映射分别为 $\Phi_{\bar{M}}, \Phi_{\bar{N}}$, 那么 $\Phi_{\bar{M}} = \Phi_{\bar{N}} \circ i$. 根据 subimmersion 定理^[24],

$$\begin{aligned} \text{dof}_{\bar{M}} &= \dim \Phi_{\bar{M}}^{-1}(e, \dots, e) = \dim \ker \Phi_{\bar{M}}(e, \dots, e), \\ \text{dof}_{\bar{N}} &= \dim \Phi_{\bar{N}}^{-1}(e, \dots, e) = \dim \ker \Phi_{\bar{N}}(e, \dots, e), \end{aligned}$$

而根据 $\Phi_{\bar{M}} = \Phi_{\bar{N}} \circ i$, 我们又有

$$\dim \ker \Phi_{\bar{M}}(e, \dots, e) = \dim i_*^{-1}(\ker \Phi_{\bar{N}}(e, \dots, e)).$$

因为 i 是浸入映射, 它的微分 i_* 是单射的线性映射, 所以有:

$$\dim \ker \Phi_{\bar{M}}(e, \dots, e) \leq \dim \ker \Phi_{\bar{N}}(e, \dots, e),$$

证明完毕.

性质 (ii) 证明

根据 $\bar{M} \sim_p \bar{N}$ 我们得到 $\text{dof}_{\bar{M}} = \text{dof}_{\bar{N}}$, 又根据自由度公式(7)和 $\text{no} = 6(r-1) - k$, 我们得到:

$$\begin{aligned} \text{dof}_{\bar{M}} = \text{dof}_{\bar{N}} &\Rightarrow -k_{\bar{M}} = \sum_{i=1}^r \dim N_i - k_{\bar{N}} \\ +6(r-1) - k_{\bar{M}} &= 6(r-1) - k_{\bar{N}} \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^r \dim M_i + \text{no}_{\bar{M}} &= \sum_{i=1}^r \dim N_i + \text{no}_{\bar{N}}. \quad (9) \end{aligned}$$

根据 $\bar{M} \leq_p \bar{N}$, 我们有

$$\sum_{i=1}^r \dim M_i \leq \sum_{i=1}^r \dim N_i,$$

结合(9)式得到 $\text{no}_{\bar{M}} \geq \text{no}_{\bar{N}}$.

2.4 等价类 $\hat{F}^{-1}(M)$ 的最小元素

考虑一个 r 维子流形 $M \in C_p(1)$ 的并联机构综合问题, 如果我们取 $\bar{M}: (M_1, \dots, M_r)$ 的所有支链运动类型 M_i 为 $M \in C_p(1)$ 自身, 那么并联机构综合的两个条件 i) 和 ii) 自动成立, $\bar{M}: (M, \dots, M)$ 是具有 M 运动

类型的并联机构. 任何在“ $\leq_p$ ”意义下小于 $(M, \dots, M)$ 的并联机构都不属于 $\hat{F}^{-1}(M)$. 我们一般称 $(M, \dots, M)$ 为 $\hat{F}^{-1}(M)$ 的最小并联机构或平凡并联机构.

平凡并联机构综合问题简化为支链 $M_i \sim M$ 的综合问题. 例如, 对于 3 自由度平面刚体运动 $PL(z) = SE(2)$ 的平凡并联机构, 我们只需枚举所有 $SE(2)$ 支链的机械构型就可以完成其构型综合.

给定任意运动类型 M , 其最小并联机构未必存在. 例如, DS Technology 的 Z3 运动头对应的机构是对称 3-PRS 并联机构, 其运动类型为 3 个 planar-spherical bond^[13].

$$PL(v_i) \cdot S(p_i) := \{g \cdot h \mid g \in PL(v_i), h \in S(p_i)\}_{i=1, \dots, 3}$$

的交集 $M = \bigcap_{i=1}^3 PL(v_i) \cdot S(p_i)$. 我们根据其非过约束性以及反螺旋系统的计算, 容易确定 M 是 1 平移 2 旋转的 3 自由度子流形. 但是 M 并不具有如 $T(z) \cdot U(o, x, y)$ (第一类子流形^[11]) 一样的规范式. 易证 M 无法用任何一个串联机构(支链)来实现. 所以 $\hat{F}^{-1}(M)$ 并不具有平凡的最小并联机构.

但对于一大类运动类型 M , 比如说所有 Lie 子群, 平凡并联机构是存在的, 因为以 Lie 子群为运动类型的支链总是存在的. 例如常见的平面 3-PRR 并联机构和球面 3-RRR 并联机构(例如 Gosselin 的灵巧眼 agile eye)分别是平面刚体运动群 $SE(2)$ 和空间旋转群 $SO(3)$ 的平凡并联机构.

2.5 等价类 $\hat{F}^{-1}(M)$ 的最大元素

类似于寻找 $\hat{F}^{-1}(M)$ 的最小元素, 我们同样可以寻找 $\hat{F}^{-1}(M)$ 中的最大元素. 根据偏序的性质, 最大元素并不唯一^[19]. 但是所有最大元素具有一个共性, 就是它们都是非过约束型并联机构. 这是显而易见的性质, 因为根据性质 2, 当并联机构 $\bar{M}$ 在 $\hat{F}^{-1}(M)$ 中增大时, $\text{no}_{\bar{M}}$ 随之减小. 当 $\bar{M}$ 的并联运动类型增大 1 维时, 如果 $\bar{M}$ 的运动类型不变, 那么 $\text{no}_{\bar{M}}$ 将减少 1. 如此反复直至 $\text{no}_{\bar{M}} = 0$. 如果再增大 $\bar{M}$ 将改变其运动类型, 使其离开等价类 $\hat{F}^{-1}(M)$. 所以 $\hat{F}^{-1}(M)$ 的最大元素必然是过约束并联机构. 另外需要指出是, 在最大元素的基础上增大并联运动类型, 所得到的机构仍然是非过约束的. 例如, 图 6(a)所示 3-UU 机构是文献[26]提出的 U^* 机构, 该机构具有 2 自由度球面平移运动类型:

$$U^* := \left\{ \begin{bmatrix} I & (e^{ia}e^{ib} - I)z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| a, b \in [0, 2\pi] \right\}.$$

它的过约束度为 $no_{U^*} = 2 \cdot 6 - (3 \cdot 4 - 2) = 2$. 在 U^* 的基础上增大其并联运动类型, 例如将一个 UU 支链变为 SU 支链, 可以得到图 6(b) 所示的并联机构, 因其反螺旋系统与图 6(a) 一致, 它等价于图 6(a). 那么, 图 6(b) 没有增加自由度, 但并联运动类型增加 1 维, 而过约束度减少 1. 类似的, 图 6(c) 是从图 6(a) 增加 2 条 SU 支链得到的并联机构, 它也等价于图 6(a) 和图 6(b), 没有增加自由度, 但过约束度减少至 0. 如果我们继续增加并联运动类型至 3- SU (如图 5(d) 所示), 将会改变运动类型, 使球面平移运动增加为同时具有 1 自由度旋转的 3 自由度运动类型, 从而离开等价类 $\hat{F}^{-1}(U^*)$. 上述关系可以用下式表示:

$$(a) <_p (b) <_p (c) <_p (d), (a) \sim_p (b) \sim_p (c) \not\sim_p (d).$$

由此还可见, 最大元素总是存在的. 这意味着我们可以将难以装配的过约束并联机构改造成为易于装配的非过约束并联机构, 对并联机构的工程实现有着重要意义.

图 6 U^* 机构及其增广

2.6 等价类 $\hat{F}^{-1}(M)$ 的中间元素

如果我们已经确定了一个等价类 $\hat{F}^{-1}(M)$ 的最小元素和某个最大元素, 那么任何介于两者之间的并联机构的并联运动类型都是 $\hat{F}^{-1}(M)$ 的元素(夹逼性质):

$$\bar{M}, \bar{N} \in \hat{F}^{-1}(M), \bar{M} \leq_p \bar{M}' \leq_p \bar{N} \Rightarrow \bar{M}' \in \hat{F}^{-1}(M).$$

我们同样可以利用和已知并联机构的可比性并根据其余切空间(力旋量空间或反螺旋空间)判断 $\bar{N}$ 是否属于给定的等价类 $\hat{F}^{-1}(M)$:

$$\begin{aligned} \bar{M} \leq_p \bar{N}, \sum_{i=1}^r (T_e^* M_i)^\perp &= \sum_{i=1}^r (T_e^* N_i)^\perp \Rightarrow \\ \bar{M} &\sim_p \bar{N}, \end{aligned} \quad (10)$$

(10) 式是运用并联运动类型和等价、偏序性质对文献[1]中 Prop. 6 的一种推广. 它适用于不具有显式(例如 Lie 子群, planar-spherical bond 等)的运动类型的并联机构综合问题. 例如, 图 7(a) 所示的 Exechon 并联机构具有 $R(o, x) R(o, x) \cap R(o, x) PL(y) \cap S(p) PL(x)$ 的运动类型, 是一个不具有显式的 3 自由度子流形. 如果我们增大其并联运动类型至 $\bar{N}$:

$$\bar{N} : (S(p) PL(x), S(q_1) PL(y), S(q_2) PL(y)).$$

那么根据夹逼性质(10)式, 可以得到 $\bar{M} \leq_p \bar{N}$. 所以, Exechon 并联机构等价于 3- $S \cdot PL$ 并联机构. 它无非是一类特殊 3- PRS 并联机构的逆运动机构(图 7(b)).

图 7 Exechon 及其等价机构的逆机构

3 结论

本文从集合论和微分几何理论两方面考虑, 提出了并联机构及其运动类型的等价关系和偏序关系. 研究显示, 等价关系和偏序关系作为并联机构分类和比较的手段, 可被广泛应用于并联机构分类、综合、运动类型分析和自由度分析等运动学问题中. 目前主流的并联机构综合理论其核心思想其实就是对等价关系和偏序关系在机构综合方面的运用; 本文中提出的基于偏序和等价关系的描述, 可以有效代替繁琐的语言描述和形象思维, 使其综合过程更加严密. 同时, 我们通过对商流形运动类型的并联机构综合展示了其创新性. 偏序关系将平凡并联机构、非过约束并联机构和

最小及最大元素联系起来, 根据最大元素的不唯一性, 确定了非过约束机构的不唯一性. 在并联机构的运动类型不具有规范形式的场合下, 我们也可以运用偏序和等价关系有效地进行并联机构分析和综合工作.

参考文献

- Meng J, Liu G F, Li Z X. A geometric theory for analysis and synthesis of sub-6 DOF parallel manipulators. *IEEE Trans Robot*, 2007, 23: 625—649 [\[doi\]](#)
- Kong X W, Gosselin C M. *Type Synthesis of Parallel Mechanisms*. Heidelberg: Springer-Verlag, 2007
- Boothby W M. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. 2nd ed. Amsterdam, London: Academic Press, 2002
- Murray R M, Li Z X, Sastry S S. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. Boca Raton: CRC Press, 1994
- Huang Z, Li Q C. General methodology for type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel manipulators and several novel manipulators. *Int J Robot Res*, 2002, 21: 131—145 [\[doi\]](#)
- Huang Z, Li Q C. Type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel mechanisms using the constraint-synthesis method. *Int J Robot Res*, 2003, 22: 59—79
- Li Q C, Huang Z. Mobility analysis of lower-mobility parallel manipulators based on screw theory. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2003, Sept 14-19, Taipei, Taiwan: IEEE, 2003. 1179—1184
- Dai J S, Huang Z, Lipkin H. Mobility of overconstrained parallel mechanisms. *ASME J Mech Des*, 2006, 128: 220—229 [\[doi\]](#)
- Kong X W, Gosselin C M. Type synthesis of 3-DOF translational parallel manipulators based on screw theory. *ASME J Mech Des*, 2004, 126: 83—92 [\[doi\]](#)
- Fang Y F, Tsai L W. Structure synthesis of a class of 3-DOF rotational parallel manipulators. *IEEE Trans Robot*, 2004, 20: 117—121 [\[doi\]](#)
- Herve J M, Sparacino F. Structural synthesis of parallel robots generating spatial translation. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Advanced Robotics*, 1991, Jun 19-22, Pisa, Italy: IEEE, 1991. 808—813
- Karouia M, Herve J M. A three-DOF tripod for generating spherical rotation. In: Lenarcic J, Stanisic M M, eds. *Advances in Robot Kinematics*. Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000
- Huynh P, Herve J M. Equivalent kinematic chains of three degree-of-freedom tripod mechanisms with planar-spherical bonds. *ASME J Mech Des*, 2005, 127: 95—102 [\[doi\]](#)
- Lee C C, Herve J M. Translational parallel manipulators with doubly planar limbs. *Mech Mach Theory*, 2006, 41: 433—455 [\[doi\]](#)
- Li Q C, Huang Z, Herve J M. Type synthesis of 3R2T 5-DOF parallel mechanisms using the lie group of displacements. *IEEE Trans Robot*, 2004, 20: 173—180 [\[doi\]](#)
- Rico J M, Gallardo J, Ravani B. Lie algebra and the mobility of kinematic chains. *J Robot Syst*, 2003, 20: 477—499 [\[doi\]](#)
- Rico J M, Aguilera L D, Gallardo J, et al. A more general mobility criterion for parallel platforms. *ASME J Mech Des*, 2006, 128: 207—219 [\[doi\]](#)
- Wu Y Q, Li Z X, Ding H, et al. Quotient kinematics machines: concept, analysis and synthesis. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2008, Sept 22 - 26, Nice, France: IEEE, 2008. 1964—1969
- Munkres J R. *Topology*. 2nd ed. N.J.: Prentice-Hall, 2000
- Pierrot F, Reynaud C, Fournier A. DELTA a simple and efficient parallel robot. *Robotica*, 1990, 8: 105—109 [\[doi\]](#)
- Chablat D, Wenger P. Architecture optimization of a 3-DOF translational parallel mechanism for machining applications, the orthoglide. *IEEE Trans Robot*, 2003, 19: 403—410 [\[doi\]](#)
- Tsai L W. Kinematics of a three-DOF platform with three extensible limbs. In: Lenarcic J, Castelli V P, eds. *Recent advances in Robot Kinematics*. Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1996: 401—410
- Boegelsack G, Gierse F J, Oravsky V, et al. Terminology for the theory of machines and mechanisms. *Mech Mach Theory*, 1983, 18: 379—408 [\[doi\]](#)
- Abraham R, Marsden J E, Ratiu T S. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. 3rd ed (preprint). New York, Hong Kong: Springer-Verlag, 2007
- 李秦川, 黄真, Herve J M. 少自由度并联机构的位移流形综合理论. *中国科学 E 辑: 工程科学 材料科学*, 2004, 34: 1011—

- 26 Gao F, Li W, Zhao X, et al. New kinematic structures for 2-, 3-, 4-, and 5-DOF parallel manipulator designs. *Mech Mach Theory*, 2002, 37: 1395—1411[doi]

· 动态 ·

苯硒脑电化学检测巯基化合物及其在鼠乳腺癌细胞 4T-1 中的应用

谷胱甘肽(GSH)是动、植物细胞内含量最为丰富的非蛋白巯基化合物,其作为机体内重要的抗氧化物质,能够参与多种生化反应,对细胞生长及功能调控发挥了重要作用.研究表明,生物体内细胞及组织当中谷胱甘肽及相关巯基化合物浓度的改变与人体多种疾病如肿瘤等的产生密切相关.通过对人体血液、组织、细胞中谷胱甘肽的测定、研究,可以提供关于细胞对氧化、应激的保护及反应状态的信息,对于疾病的早期诊断及治疗具有十分重要的意义.因此,建立测定谷胱甘肽及相关巯基化合物的灵敏、高效、经济的分析方法备受国内外科研人员的高度重视.

目前,已有多种方法可用于谷胱甘肽的测定,包括荧光法、酶循环法、化学发光法、各种色谱方法等,其中利用高效液相色谱辅以各种检测技术应用最为普遍,但该方法成本较高、样品处理繁琐及体内检测的可操作性差.唐波等发展了一种荧光探针可用于细胞内谷胱甘肽的检测.相比于以上方法,电化学检测方法成本低廉,检测方便,灵敏度高,但利用常规电化学检测方法存在选择性差或不适用于体内检测的缺陷.因此发展新型电化学检测技术进行谷胱甘肽及其他巯基化合物的检测极为迫切.

张书圣课题组发展了一种简单的电化学探针技术可用于谷胱甘肽的灵敏检测.选用苯并[c]-1,2,5-硒二唑

(苯硒脑)作为电化学探针,利用苯硒脑与谷胱甘肽反应前后,苯硒脑的电化学还原信号降低,通过示差脉冲伏安法(DPV)可进行巯基化合物的快速、准确、灵敏检测.并将该电化学探针用于鼠乳腺癌细胞 4T-1 提取物中蛋白巯基与非蛋白巯基的测定,获得了满意的结果^[1].进一步实验结果表明,利用滴汞电极,采用线性扫描二阶导数伏安法对谷胱甘肽进行定量检测灵敏度更高,所测谷胱甘肽的线性范围为 $2.0 \times 10^{-10} \sim 3.0 \times 10^{-8} \text{ pmol L}^{-1}$,检测限达 74 pmol L^{-1} .同时对苯硒脑与几种常见非蛋白巯基化合物的反应能力进行了比较,研究表明苯硒脑对谷胱甘肽的响应最好,即反应能力最强.进一步对苯硒脑与蛋白巯基化合物和非蛋白巯基化合物的响应差异性进行了研究,选用同样浓度的金属硫蛋白与谷胱甘肽,多次实验表明蛋白巯基可使苯硒脑的电流信号降低更大,即苯硒脑对蛋白巯基的响应更灵敏.

与目前通用的检测技术相比,该电化学探针技术灵敏度和选择性得到显著提高,同时,检测时间大大缩短.将所建立的方法用于常规的临床诊断及相关研究,不但可以实现准确、便捷、低成本的检测,而且也为电分析化学在生物学及临床医学等领域的进一步应用提供了新的途径.本课题组还通过电化学检测苯硒脑与谷胱甘肽的反应产物-邻苯二胺的电化学响应信号实现了细胞中谷胱甘肽的直接检测.

- 1 Wang W, Li L, Liu S F, et al. Determination of physiological thiols by electrochemical detection with piaseleone and its application in rat breast cancer cells 4T-1. *J Am Chem Soc*, 2008, 130: 10846—10847

王卫, 李林, 刘树峰, 马翠萍, 张书圣
(青岛科技大学化学与分子工程学院, 青岛 266042)