$\mathbb{R}^N$ 上临界增长 p -Kirchhoff 型方程的非平凡解的存在性

献给齐民友教授 90 华诞

李工宝*, 牛亚慧

华中师范大学数学与统计学学院, 武汉 430079

E-mail: ligb@mail.ccnu.edu.cn, yahuniu@163.com

收稿日期: 2017-06-28; 接受日期: 2017-08-08; 网络出版日期: 2017-11-16; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371159) 资助项目

摘要 本文主要研究以下具临界增长的非线性 p -Kirchhoff 型方程的非平凡解的存在性:

$$\begin{cases} -\left(a + b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\right) \Delta_p u = |u|^{p^*-2}u + \mu f(x)|u|^{q-2}u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (0.1)$$

其中 $a \geq 0, b > 0, 1 < p < N, 1 < q < p, p^* = \frac{Np}{N-p}, \mu \geq 0, \Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ 表示 p -Laplace 算子对函数 u 的作用, $f \in L^{\frac{p^*}{p^*-q}}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ 且 f 是非负的. 本文利用 Ekeland 变分原理和山路定理证明方程 (0.1) 在适当条件下至少存在两个非平凡解.

关键词 p -Kirchhoff 型方程 临界非线性 Ekeland 变分原理 山路定理 两个非平凡解

MSC (2010) 主题分类 35A15, 35B33

1 引言

本文主要研究如下具临界增长的非线性 p -Kirchhoff 型方程的非平凡解的存在性:

$$\begin{cases} -\left(a + b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\right) \Delta_p u = |u|^{p^*-2}u + \mu f(x)|u|^{q-2}u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $a \geq 0, b > 0, 1 < p < N, 1 < q < p, p^* = \frac{Np}{N-p}, \mu \geq 0, \Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ 表示 p -Laplace 算子对函数 u 的作用, f 满足

英文引用格式: Li G B, Niu Y H. The existence of nontrivial solutions for p -Kirchhoff type equations with critical exponent in $\mathbb{R}^N$ (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 139–160, doi: 10.1360/N012017-00142

(f) $f \in L^{\frac{p^*}{p^*-q}}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ 且 f 是非负的.

问题 (1.1) 来源于 Kirchhoff 在文献 [1] 中提出的一类含时的 Kirchhoff 型方程

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (1.2)$$

其中 ρ 、 P_0 、 h 、 E 和 L 是常数. 方程 (1.2) 是经典自由振动的 D'Alembert 波动方程的一个推广. 自 Lions 在文献 [2] 中对如下的方程:

$$u_{tt} - \left(a + b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right) \Delta u = f(x, u) \quad (1.3)$$

引进了一种抽象的泛函分析框架后, 方程 (1.3) 得到人们的广泛关注和研究, 详细结果参见文献 [3–7]. 另一方面, 自 Brézis 和 Nirenberg 在文献 [8] 中提出了关于临界增长半线性椭圆方程的问题后, 许多学者都热衷于研究临界增长椭圆方程 (参见文献 [9–16]). 文献 [9–13] 通过变分的方法得到了众多临界增长椭圆方程的解的存在性的结果. Figueiredo 和 Santos Junior^[14] 利用亏格理论得到了临界增长 Kirchhoff 型方程的多重非平凡解的存在性结果. He 和 Zou^[15] 用变分的方法得到了一类临界增长 Kirchhoff 型方程的正解的存在性、多重性和集中性的结果. Liu 等^[16] 研究了如下的临界增长 Kirchhoff 型方程:

$$\begin{cases} - \left(a + b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \right) \Delta u = |u|^{2^*-2} u + \mu h(x), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (1.4)$$

其中 $a \geq 0$, $b > 0$, $N \geq 3$, $2^* = \frac{2N}{N-2}$, $\mu \geq 0$, $h \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ 且 h 是非负的. 当 a 、 b 、 N 和 μ 满足一定的条件时, 他们得到了方程 (1.4) 的一系列解的存在性结果.

近年来, p -Kirchhoff 型问题也开始被同行关注. 例如, Huang 等^[17] 应用喷泉定理得到了一类 p -Kirchhoff 型方程的无穷多解的存在性结果. Zhou 和 Song^[18] 用经典的 Kranoselski 亏格方法研究了一类临界增长 p -Kirchhoff 型问题, 得到了问题的无穷多个非平凡解.

在本文中, 我们在全空间上考虑一类带有临界指标和次 p -线性扰动的 p -Kirchhoff 型方程 (1.1), 据我们所了解, 问题 (1.1) 还没有被研究过.

在本文中, 我们采取标准的记号. u 在 $L^r(\mathbb{R}^N)$ ($1 \leq r < +\infty$) 空间的范数定义为 $|u|_r = (\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r)^{\frac{1}{r}}$, u 在 $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) : \nabla u \in L^p(\mathbb{R}^N)\}$ 空间中的范数定义为 $\|u\| = (\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p)^{\frac{1}{p}}$, $(\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N))^*$ 表示 $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 的对偶空间, 对于 $\forall u^* \in (\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N))^*$, $v \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $\langle u^*, v \rangle$ 表示空间 $(\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N))^*$ 与 $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 的对偶积. $S = \inf_{u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_p^p}{|u|_{p^*}^{p^*}}$ 为 Sobolev 嵌入 $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ 的最佳常数. $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 上具有紧支集的无穷次可微函数的集合. 用 C 和 C_i ($i = 1, 2, \dots$) 表示正常数. “ $\rightarrow$ ” 和 “ $\rightharpoonup$ ” 分别代表相应函数空间中的强收敛和弱收敛. $f_n \rightarrow f$ 于 $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^N)$ 表示对任意的紧集 $K \subset \mathbb{R}^N$, $f_n \rightarrow f$ 于 $L^p(K)$.

记 $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < R\}$, $B_R^c = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| \geq R\}$, $B(x_j, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - x_j| < \varepsilon\}$, 而 $\mathbb{B}_\tau = \{u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \mid \|u\| < \tau\}$, $\bar{\mathbb{B}}_\tau = \{u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \mid \|u\| \leq \tau\}$, $\partial \mathbb{B}_\tau = \{u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \mid \|u\| = \tau\}$.

若 $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 且对任意的 $v \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 都有

$$\left(a + b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2} u v dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^{q-2} u v dx, \quad (1.5)$$

则称 u 是方程 (1.1) 的一个弱解.

方程 (1.1) 相应的能量泛函 $I: \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$I(u) = \frac{a}{p} \|u\|^p + \frac{b}{2p} \|u\|^{2p} - \frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q dx.$$

显然, $I \in C^1$ 且对于任意的 $v \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 有

$$\langle I'(u), v \rangle = (a + b\|u\|^p) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2} u v dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^{q-2} u v dx,$$

故 (1.1) 的弱解对应于能量泛函 I 在 $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 上的临界点.

本文的主要结果如下:

定理 1.1 假设 $N < 2p$, $a \geq 0$, $b > 0$ 或 $N = 2p$, $a > 0$, $0 < b < \frac{1}{S^2}$, 且 (f) 成立, 则当 μ 充分小时, 方程 (1.1) 至少存在两个非平凡解.

对于 $N > 2p$ 和 $N = 2p$ 的其他情形, 我们可证明方程 (1.1) 存在一个非平凡解:

定理 1.2 假设 $\mu > 0$ 且 (f) 成立, 则方程 (1.1) 在以下三种情形下存在一个非平凡解:

(1) $N = 2p$, $a = 0$, 且 $b > \frac{1}{S^2}$;

(2) $N = 2p$, $a > 0$, 且 $b \geq \frac{1}{S^2}$;

(3) $N > 2p$, $a > 0$, $b > 0$ 且满足 $a^{N-2p} b^p S^N N^{N-p} \geq (2p)^p (N-2p)^{N-2p}$.

定理 1.1 和 1.2 的证明的主要困难有两个方面: 首先, 全空间 $\mathbb{R}^N$ 上的 Sobolev 嵌入 $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ 失紧; 其次, 非局部项 $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p$ 的存在给泛函导数的弱连续性的证明带来困难, 所以无法直接得到 $(PS)_c$ 序列 (Palais-Smale 序列) (见定义 2.1) 的弱极限就是泛函的临界点的结论.

我们主要利用文献 [16] 的证明思路来证明我们的主要结果: 利用 Ekeland 变分原理, 我们得到 I 的一系列局部极小化序列 $\{u_n\} \subset \mathbb{B}_\tau$, 即 $(PS)_c$ 序列. 然而与文献 [16] 中 $p = 2$ 的情形不同的是, 在证明 $\{u_n\}$ 的弱极限是泛函 I 的临界点时, 由 $u_n \rightharpoonup u$ 于 $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 不能直接得出

$$|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2} \nabla u \text{ 于 } L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N), \quad (1.6)$$

于是, 借鉴文献 [19] 中关于 p -Laplace 型问题的处理办法, 利用集中紧致的方法证明了 $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ a.e. 于 $\mathbb{R}^N$ (引理 2.2), 从而得到了 (1.6). 对于非局部项 $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p$ 给紧性证明带来的困难 (由 $u_n \rightharpoonup u$ 于 $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 不能直接得出 $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$), 借鉴 Li 和 Ye 在文献 [20] 中的方法给予处理. 然后利用极小化序列的性质得到方程 (1.1) 的一个负能量解. 再利用类似的处理办法, 由山路定理和集中紧致定理, 得到方程 (1.1) 的一个正能量解.

特别地, 如果 $a = 1$, $b = 0$ 且 $\mu = 0$, 那么方程 (1.1) 退化为下面的 p -Laplace 型方程:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{p^*-2} u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (1.7)$$

文献 [21] 表明, 若 $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 是方程 (1.7) 的一个解, 则存在 $\delta > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, 使得

$$u(x) = U_{\delta, x_0}(x) = \left[\frac{\delta^{\frac{1}{p-1}} N^{\frac{1}{p}} \left(\frac{N-p}{p-1} \right)^{\frac{p-1}{p}}}{\delta^{\frac{p}{p-1}} + |x - x_0|^{\frac{p}{p-1}}} \right]^{\frac{N-p}{p}}, \quad (1.8)$$

而且有

$$\|U_{\delta, x_0}\|^p = |U_{\delta, x_0}|_{p^*}^{p^*} = S^{\frac{N}{p}}. \quad (1.9)$$

结合方程 (1.7) 的解的情形, 借鉴文献 [22] 的方法, 得到关于方程 (1.1) 在 $\mu = 0$ 时的一个一般性结果:

定理 1.3 当 $\mu = 0$ 时, $u \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 是 (1.1) 的解当且仅当存在 $t > 0$ 使得 $u(\cdot) = \omega(t \cdot)$ 成立, 其中 $\omega \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 是 (1.7) 的解且满足 $t^p a + t^{2p-N} b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega|^p dx = 1$.

注 1.4 根据定理 1.3 和方程 (1.7) 的解, 可以得到方程 (1.1) 的解的具体形式 (见注 4.1).

对比注 4.1 中的参数范围, 使用反证法, 可证明如下的关于方程 (1.1) 的解的非存在性结果:

定理 1.5 假设 $\mu = 0$, 则方程 (1.1) 在以下三种情形下没有非平凡解:

- (1) $N = 2p$, $a = 0$, 且 $b > \frac{1}{S^2}$;
- (2) $N = 2p$, $a > 0$, 且 $b \geq \frac{1}{S^2}$;
- (3) $N > 2p$, $a > 0$, $b > 0$, 且满足 $a^{N-2p} b^p S^N (N-p)^{N-p} > p^p (N-2p)^{N-2p}$.

本文的结构如下: 第 2 节给出一些预备知识和相关引理及其证明; 第 3 节给出定理 1.1 和 1.2 的证明; 第 4 节给出定理 1.3 和 1.5 的证明.

2 预备知识

本节给出一些定义以及后续证明中将用到的预备引理.

定义 2.1 (参见文献 [23, 定义 1.16]) 设 X 是一个 Banach 空间, 泛函 $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, c 是实数, 若任意序列 $\{u_n\} \subset X$ 满足, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$I(u_n) \rightarrow c, \quad I'(u_n) \rightarrow 0,$$

则称 $\{u_n\}$ 为 I 的 $(PS)_c$ 序列. 若 I 的任意的 $(PS)_c$ 序列都有收敛子列, 则称 I 满足 $(PS)_c$ 条件.

若 $\{u_n\} \subset \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 为泛函 I 的任意有界 $(PS)_c$ 序列, 则存在数 $A > 0$ 使得 $\|u_n\| + o(1) = A$. 定义

$$\tilde{I}(u) = \frac{a + bA^p}{p} \|u\|^p - \frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q dx,$$

则对任意的 $v \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 有

$$\langle \tilde{I}'(u), v \rangle = (a + bA^p) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2} u v dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^{q-2} u v dx.$$

结合 $\|u_n\| + o(1) = A$, 有

$$\langle I'(u_n), v \rangle - \langle \tilde{I}'(u_n), v \rangle = o(1),$$

从而, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\tilde{I}'(u_n) \rightarrow 0$. 同时,

$$\tilde{I}(u_n) = I(u_n) + \frac{bA^{2p}}{2p} + o(1),$$

故 $\{u_n\}$ 同时是 $\tilde{I}$ 的有界 $(PS)_{c+\frac{bA^{2p}}{2p}}$ 序列. 基于以上分析, 参见文献 [19] 中对 p -Laplace 的处理方法给出下列命题及其证明:

引理 2.2 如果对某个 $c \in \mathbb{R}$, $\{u_n\} \subset \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 为泛函 I 的有界 $(PS)_c$ 序列, 则在取子列的意义下, 存在 $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 使得当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ a.e. 于 $\mathbb{R}^N$.

证明 由已知条件知, 存在 $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 和 $\{u_n\}$ 的子列, 仍记作 $\{u_n\}$, 满足

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u, && \text{于 } \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \\ u_n &\rightarrow u, && \text{于 } L_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^N), \quad p \leq s < p^*, \\ u_n &\rightarrow u, && \text{a.e. 于 } \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{2.1}$$

为了证明在 $\mathbb{R}^N$ 中 $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ a.e., 只需证对任意的 $R > 0$, 存在 $\{u_n\}$ 的子列满足

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u, \quad \text{a.e. 于 } B_R. \quad (2.2)$$

为了证明 (2.2), 我们把 $\{u_n\}$ 作如下局部化处理: 设函数 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 满足 $0 \leq \varphi \leq 1$, 在 B_{2R} 中, $\varphi \equiv 1$, $\text{Supp } \varphi \subset B_{4R}$. 设 $\widetilde{u}_n = \varphi u_n$, 则有

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_n &\rightharpoonup \widetilde{u} = \varphi u, \quad \text{于 } \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \\ \widetilde{u}_n &\rightarrow \widetilde{u}, \quad \text{于 } L_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^N), \quad p \leq s < p^*, \\ \widetilde{u}_n &\rightarrow \widetilde{u}, \quad \text{a.e. 于 } \mathbb{R}^N. \end{aligned} \quad (2.3)$$

由于 $\text{Supp } \widetilde{u}_n \subset B_{4R}$, 故 $|\nabla \widetilde{u}_n|^p$ 和 $|\widetilde{u}_n|^{p^*}$ 都是紧的正测度列, 而且 $|\nabla \widetilde{u}_n|^p$ 和 $|\widetilde{u}_n|^{p^*}$ 有界, 因此, 可以假设

$$|\nabla \widetilde{u}_n|^p \rightharpoonup \sigma, \quad |\widetilde{u}_n|^{p^*} \rightharpoonup \nu, \quad (2.4)$$

即对任意的 $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \widetilde{u}_n|^p \varphi dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\sigma, \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{u}_n|^{p^*} \varphi dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\nu,$$

其中 $C_c(\mathbb{R}^N)$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 上的具有紧支集连续函数的集合, σ 和 ν 是有界的正测度. 由文献 [24] 中的集中紧致定理得

$$\sigma \geq |\nabla \widetilde{u}|^p + \sum_{j \in J} \sigma_j \delta_{x_j}, \quad \nu = |\widetilde{u}|^{p^*} + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}, \quad (2.5)$$

其中 J 是一个至多可数集, δ 为 Dirac 集中测度, $x_j \in \mathbb{R}^N$, $\nu_j, \sigma_j \in \mathbb{R}$, 且 $S\nu_j^{\frac{p}{p^*}} \leq \sigma_j$.

下面证明在 B_{2R} 内存在至多有限个 x_j .

事实上, 若 $x_j \in B_{2R}$, 设函数 $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 满足 $0 \leq \Phi \leq 1$,

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_{\frac{1}{2}}, \\ 0, & x \in B_1^c, \end{cases}$$

对任意足够小的 $\varepsilon > 0$, 设 $\Phi_\varepsilon^j(x) = \Phi(\frac{x-x_j}{\varepsilon})$, 则

$$0 \leq \Phi_\varepsilon^j(x) \leq 1, \quad \Phi_\varepsilon^j(x) = \begin{cases} 1, & x \in B\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right), \\ 0, & x \in B^c(x_j, \varepsilon). \end{cases}$$

由于 $\widetilde{I}'(u_n) \rightarrow 0$, $\|\Phi_\varepsilon^j u_n\|$ 有界, 因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \widetilde{I}'(u_n), \Phi_\varepsilon^j u_n \rangle = 0.$$

记 $a + bA^p = M$, 即有

$$M \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \Phi_\varepsilon^j dx + M \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \Phi_\varepsilon^j u_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} \Phi_\varepsilon^j dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_n|^q \Phi_\varepsilon^j dx,$$

因此,

$$M \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \Phi_\varepsilon^j dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} \Phi_\varepsilon^j dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_n|^q \Phi_\varepsilon^j dx$$

$$-M \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \Phi_\varepsilon^j u dx - M \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \Phi_\varepsilon^j (u_n - u) dx.$$

由 (2.1) 和 Hölder 不等式, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \Phi_\varepsilon^j (u_n - u) dx = 0.$$

由 (2.1) 和条件 (f), 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_n|^q \Phi_\varepsilon^j dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q \Phi_\varepsilon^j dx.$$

注意到, 在 $B(x_j, \varepsilon)$ 中, $u_n = \widetilde{u}_n$, $u = \widetilde{u}$, 故

$$\sigma \left(B \left(x_j, \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) = \int_{B(x_j, \frac{\varepsilon}{2})} d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B(x_j, \frac{\varepsilon}{2})} |\nabla u_n|^p \Phi_\varepsilon^j dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \Phi_\varepsilon^j dx,$$

所以,

$$M\sigma \left(B \left(x_j, \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \leq \nu(B(x_j, \varepsilon)) + \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q \Phi_\varepsilon^j dx - \lim_{n \rightarrow \infty} M \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \Phi_\varepsilon^j u dx. \quad (2.6)$$

存在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中的函数 $T(x)$ 、常数 C_1 和 C_2 使得

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \Phi_\varepsilon^j u dx \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{B(x_j, \varepsilon)} |\nabla u_n|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi_\varepsilon^j|^p |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq C_1 \int_{B(x_j, \varepsilon)} |T(x)|^p dx + C_2 \left(\int_{B(x_j, \varepsilon)} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi_\varepsilon^j|^{\frac{pp^*}{p^*-p}} dx \right)^{\frac{p^*-p}{p^*}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

结合 (2.6) 和 (2.7), 并令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得 $M\sigma_j \leq \nu_j$, 又 $S\nu_j^{\frac{p}{p^*}} \leq \sigma_j$, 则

$$0 < MS \leq \nu_j^{1-\frac{p}{p^*}},$$

而 $\nu(\mathbb{R}^N) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{u}_n|^{p^*} dx < +\infty$, 故在 B_{2R} 内至多有有限个 x_j .

不失一般性, 假设 B_{2R} 内的 x_j 为 $x_1, x_2, \dots, x_{m(R)}$. 存在 $\delta > 0$ 使得 $x_j \in B_{2R-\delta}$, $j = 1, 2, \dots, m$. 而且对小 $\varepsilon > 0$, 满足 $B(x_i, \varepsilon) \cap B(x_j, \varepsilon) = \emptyset$, 如果 $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$, 那么有 $\bigcup_{j=1}^m B(x_j, \varepsilon) \subset B_{2R-\delta}$. 设 $\Psi_{\varepsilon, R} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, 满足 $0 \leq \Psi_{\varepsilon, R} \leq 1$, 且

$$\Psi_{\varepsilon, R} = \begin{cases} 1, & x \in B_{2R-\delta} \setminus \bigcup_{j=1}^m B(x_j, \varepsilon), \\ 0, & x \in B_{2R-\delta'}^c, \\ 0, & x \in \bigcup_{j=1}^m B(x_j, \varepsilon), \end{cases}$$

其中 δ' 是一个常数, 满足 $0 < \delta' < \delta$. 这样的 $\Psi_{\varepsilon, R}$ 可以构造出来, 例如,

$$\Psi_{\varepsilon, R}(x) = 1 - \sum_{j=1}^m \Phi_\varepsilon^j(x) - \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

其中 $\psi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \leq \psi \leq 1$,

$$\psi = \begin{cases} 0, & x \in B_{2R-\delta}, \\ 1, & x \in B_{2R-\delta'}^c, \end{cases}$$

这里 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 上的无穷次可微函数的集合. 由 $\tilde{I}'(u_n) \rightarrow 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \tilde{I}'(u_n), \Psi_{\varepsilon,R}(u_n - u) \rangle = 0,$$

即

$$\begin{aligned} & M \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) \Psi_{\varepsilon,R} dx + M \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \Psi_{\varepsilon,R} (u_n - u) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2} u_n (u_n - u) \Psi_{\varepsilon,R} dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_n|^{q-2} u_n (u_n - u) \Psi_{\varepsilon,R} dx. \end{aligned}$$

由 (2.1) 和 Hölder 不等式, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \Psi_{\varepsilon,R} (u_n - u) dx = 0.$$

由 (2.1) 和条件 (f), 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_n|^{q-2} u_n (u_n - u) \Psi_{\varepsilon,R} dx = 0.$$

下面证明 $\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2} u_n (u_n - u) \Psi_{\varepsilon,R} dx \rightarrow 0$. 注意到

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2} u_n (u_n - u) \Psi_{\varepsilon,R} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} \Psi_{\varepsilon,R} dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \Psi_{\varepsilon,R} dx - \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^{p^*-2} u_n - |u|^{p^*-2} u) u \Psi_{\varepsilon,R} dx, \end{aligned}$$

由 (2.1) 易得, 在 $L^{\frac{p^*}{p^*-1}}(B_{2R})$ 中,

$$|u_n|^{p^*-2} u_n \rightharpoonup |u|^{p^*-2} u,$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^{p^*-2} u_n - |u|^{p^*-2} u) u \Psi_{\varepsilon,R} dx = 0.$$

由 (2.1) 和 (2.3), 且在 B_{2R} 内的 x_j 只有 $x_1, x_2, \dots, x_m$, 利用 (2.5) 可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} \Psi_{\varepsilon,R} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{u_n}|^{p^*} \Psi_{\varepsilon,R} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \Psi_{\varepsilon,R} d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{u}|^{p^*} \Psi_{\varepsilon,R} dx + \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j} \Psi_{\varepsilon,R} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \Psi_{\varepsilon,R} dx. \end{aligned}$$

综上, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) \Psi_{\varepsilon,R} dx = 0.$$

另外, (2.1) 可推出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u (\nabla u_n - \nabla u) \Psi_{\varepsilon,R} dx = 0,$$

因此有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) (\nabla u_n - \nabla u) \Psi_{\varepsilon, R} dx = 0.$$

利用 $\mathbb{R}^N$ 中的标准不等式 (参见文献 [25, 引理 3.3])

$$\langle |x|^{p-2} x - |y|^{p-2} y, x - y \rangle \geq \begin{cases} C_p |x - y|^p, & p \geq 2, \\ \frac{C_p |x - y|^2}{(|x| + |y|)^{2-p}}, & 1 < p < 2, \end{cases}$$

其中 $x, y \in \mathbb{R}^N$, $x \neq y$ 时成立严格不等式, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 中标准内积, 可知

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{2R-\delta} \setminus \bigcup_{j=1}^m B(x_j, \varepsilon)} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) (\nabla u_n - \nabla u) dx \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) (\nabla u_n - \nabla u) \Psi_{\varepsilon, R} dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{2R-\delta} \setminus \bigcup_{j=1}^m B(x_j, \varepsilon)} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) (\nabla u_n - \nabla u) dx = 0.$$

从而,

$$\int_{B_{2R-\delta} \setminus \bigcup_{j=1}^m B(x_j, \varepsilon)} |\nabla u_n - \nabla u|^p = o(1),$$

即

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u, \quad \text{于 } L^p \left(B_{2R-\delta} \setminus \bigcup_{j=1}^m B(x_j, \varepsilon) \right),$$

所以,

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u, \quad \text{a.e. 于 } B_{2R-\delta} \setminus \bigcup_{j=1}^m B(x_j, \varepsilon).$$

再由 (2.2) 成立可推出 $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ a.e. 于 $\mathbb{R}^N$. □

引理 2.3 当 $N < 2p$, $a \geq 0$, $b > 0$ 或 $N = 2p$, $a > 0$, $0 < b < \frac{1}{S^2}$ 时, 假设 (f) 成立, 则存在 $\mu_*, \tau, \alpha > 0$, 使得对于任意的 $\mu \in (0, \mu_*)$, 有 $I|_{\partial \mathbb{B}_\tau} \geq \alpha$.

证明 对任意的 $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 利用 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式对 $I(u)$ 进行处理, 当 $N < 2p$, $a \geq 0$, $b > 0$, $1 < q < p$ 时,

$$I(u) \geq \left(\frac{b}{2p} \|u\|^{2p-q} - \frac{1}{p^* S^{\frac{p^*}{p}}} \|u\|^{p^*-q} - \frac{\mu}{q S^{\frac{q}{p}}} |f|_{\frac{p^*}{p^*-q}} \right) \|u\|^q,$$

设 $g(t) = \frac{b}{2p} t^{2p-q} - \frac{1}{p^* S^{\frac{p^*}{p}}} t^{p^*-q}$, $t \geq 0$, 则 $\max_{t \geq 0} g(t) = g(\tau) > 0$, 其中 $\tau = \left[\frac{bp^* S^{\frac{p^*}{p}} (2p-q)}{2p(p^*-q)} \right]^{\frac{1}{p^*-2p}}$ 满足 $g'(\tau) = 0$, 此时设 $\mu_* = \frac{g(\tau) q S^{\frac{q}{p}}}{|f|_{\frac{p^*}{p^*-q}}}$, 则对于任意的 $\mu \in (0, \mu_*)$, $u \in \partial \mathbb{B}_\tau$, 有

$$I(u) \geq \left(g(\tau) - \frac{\mu}{q S^{\frac{q}{p}}} |f|_{\frac{p^*}{p^*-q}} \right) \tau^q =: \alpha > 0.$$

当 $N = 2p$, $a > 0$, $0 < b < \frac{1}{S^2}$, $1 < q < p$ 时,

$$I(u) \geq \left(\frac{a}{p} \|u\|^{p-q} + \frac{1}{2p} \left(b - \frac{1}{S^2} \right) \|u\|^{2p-q} - \frac{\mu}{qS^{\frac{q}{p}}} |f|_{\frac{p^*}{p^*-q}} \right) \|u\|^q,$$

设 $h(t) = \frac{a}{p} t^{p-q} - \frac{1}{2p} \left(\frac{1}{S^2} - b \right) t^{2p-q}$, $t \geq 0$, 则 $\max_{t \geq 0} h(t) = h(\tau) > 0$, 其中 $\tau = \left[\frac{2a(p-q)}{(2p-q)(\frac{1}{S^2}-b)} \right]^{\frac{1}{p}}$ 满足 $h'(\tau) = 0$, 设

$$\mu_* = \frac{h(\tau)qS^{\frac{q}{p}}}{|f|_{\frac{p^*}{p^*-q}}},$$

则对于任意的 $\mu \in (0, \mu_*)$, $u \in \partial \mathbb{B}_\tau$, 有

$$I(u) \geq \left(h(\tau) - \frac{\mu}{qS^{\frac{q}{p}}} |f|_{\frac{p^*}{p^*-q}} \right) \tau^q =: \alpha > 0.$$

证毕. $\square$

引理 2.4 当 $N < 2p$, $a \geq 0$, $b > 0$ 或 $N = 2p$, $a > 0$, $0 < b < \frac{1}{S^2}$ 时, 假设 (f) 成立, 则对于任意的 $\mu \in (0, \mu_*)$, 有 $c := \inf_{u \in \mathbb{B}_\tau} I(u) < 0$, 其中 μ_* 和 τ 由引理 2.3 给出.

证明 选取 $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 固定 $\mu \in (0, \mu_*)$, 对任意的 $t \geq 0$, 有

$$I(tu) = \frac{at^p}{p} \|u\|^p + \frac{bt^{2p}}{2p} \|u\|^{2p} - \frac{t^{p^*}}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx - \frac{\mu t^q}{q} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q dx.$$

由于 $q < p$, 故存在足够小的 t 使得 $\|tu\| \leq \tau$ 且 $I(tu) < 0$. 因此 $c := \inf_{u \in \mathbb{B}_\tau} I(u) < 0$. $\square$

引理 2.5 当 $N < 2p$, $a \geq 0$, $b > 0$ 或 $N = 2p$, $a > 0$, $0 < b < \frac{1}{S^2}$ 时, 假设 $\mu > 0$, (f) 成立, 则存在 $v \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 满足 $\|v\| > \tau$, $I(v) < 0$, 其中 τ 由引理 2.3 给出.

证明 在 (1.8) 中取 $\delta = 1$, $x_0 = 0$, 则

$$U_{1,0} = \left(\frac{N^{\frac{1}{p}} \left(\frac{N-p}{p-1} \right)^{\frac{p-1}{p}}}{1 + |x|^{\frac{p}{p-1}}} \right)^{\frac{N-p}{p}}.$$

根据 (1.9), 有 $\|U_{1,0}\|^p = |U_{1,0}|_{p^*}^{p^*} = S^{\frac{N}{p}}$ 成立, 考虑任意的 $t > 0$, 有

$$\begin{aligned} I(tU_{1,0}) &= \frac{aS^{\frac{N}{p}}}{p} t^p + \frac{bS^{\frac{2N}{p}}}{2p} t^{2p} - \frac{S^{\frac{N}{p}}}{p^*} t^{p^*} - \frac{\mu t^q}{q} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) U_{1,0}^q dx \\ &\leq \frac{aS^{\frac{N}{p}}}{p} t^p + \frac{bS^{\frac{2N}{p}}}{2p} t^{2p} - \frac{S^{\frac{N}{p}}}{p^*} t^{p^*}. \end{aligned}$$

当 $N < 2p$ 时, $p^* > 2p$, 于是存在足够大的正数 t , 使得 $\|tU_{1,0}\| > \tau$, $I(tU_{1,0}) < 0$; 当 $N = 2p$ 时, $p^* = 2p$, 于是有

$$I(tU_{1,0}) \leq \frac{aS^{\frac{N}{p}}}{p} t^p - \left(\frac{1}{S^2} - b \right) \frac{S^4}{2p} t^{2p}.$$

由于 $b < \frac{1}{S^2}$, 所以存在 $t > 0$, 使得 $\|tU_{1,0}\| > \tau$, $I(tU_{1,0}) < 0$. 定义 $v = tU_{1,0}$, 即证. $\square$

定义

$$m = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

其中

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)) : \|\gamma(0)\| = \tau, I(\gamma(1)) < 0\},$$

我们有如下结果:

引理 2.6 在引理 2.5 的假设下, 泛函 I 存在有界的 $(PS)_m$ 序列.

证明 根据文献 [23] 中的山路定理, 引理 2.3 和 2.5 保证了泛函 I 具有山路定理的几何结构, 所以对任何 $\mu \in (0, \mu_*)$, 存在 $\{u_n\} \subset \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 使得 $I(u_n) \rightarrow m > 0$, $I'(u_n) \rightarrow 0$ 于 $(\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N))^*$, 其中 $\{u_n\}$ 为泛函 I 的 $(PS)_m$ 序列且 $\|u_n\| \geq \tau$. 下面证明 $\{u_n\}$ 的有界性: 对足够大的 n , 利用 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式, 有

$$\begin{aligned} m + 1 + \|u_n\|^p &\geq I(u_n) - \frac{1}{p^*} \langle I'(u_n), u_n \rangle \\ &= a \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \|u_n\|^p + b \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^*} \right) \|u_n\|^{2p} - \mu \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_n|^q dx \\ &\geq a \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \|u_n\|^p + b \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^*} \right) \|u_n\|^{2p} - \mu \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*} \right) |f|_{\frac{p^*}{p^*-q}} \frac{\|u_n\|^q}{S_p^{\frac{q}{p}}}, \end{aligned}$$

因此, $\{u_n\}$ 在 $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中有界. □

定义

$$M = \begin{cases} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) y^{p^*} - \frac{bS^2}{2p} y^{2p}, & N < 2p, \\ \frac{a^2 S^2}{2p(1-bS^2)}, & N = 2p, \end{cases} \quad B = \frac{p-q}{p} \left(\frac{aS}{2q} \right)^{\frac{q}{q-p}} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2p} \right)^{\frac{p}{p-q}} |f|_{\frac{p^*}{p^*-q}}^{\frac{p}{p-q}}, \quad (2.8)$$

其中 y 是方程 $aSy^p + bS^2y^{2p} - y^{p^*} = 0$ 的唯一非平凡解.

下面对山路值 m 做出估计.

引理 2.7 当 $N < 2p$, $a \geq 0$, $b > 0$ 或 $N = 2p$, $a > 0$, $0 < b < \frac{1}{S^2}$ 时, 假设 $\mu > 0$, (f) 成立, 则存在 $\mu_{**} \in (0, \mu_*)$ 使得对于任意的 $\mu \in (0, \mu_{**})$, 都有

$$m \leq \sup_{t \geq 0} I(tU_{1,0}) < M - B\mu^{\frac{p}{p-q}},$$

其中 M 和 B 由 (2.8) 给出.

证明 由 (1.9) 有 $\|U_{1,0}\|^p = |U_{1,0}|_{p^*}^{p^*} = S^{\frac{N}{p}}$, 考虑泛函

$$r(t) := I(tU_{1,0}) = \frac{aS^{\frac{N}{p}}}{p} t^p + \frac{bS^{\frac{2N}{p}}}{2p} t^{2p} - \frac{S^{\frac{N}{p}}}{p^*} t^{p^*} - \frac{\mu t^q}{q} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) U_{1,0}^q dx.$$

记

$$\tilde{r}(t) = \frac{aS^{\frac{N}{p}}}{p} t^p + \frac{bS^{\frac{2N}{p}}}{2p} t^{2p} - \frac{S^{\frac{N}{p}}}{p^*} t^{p^*},$$

则存在 $t_1 > 0$ 使得 $\max_{t \geq 0} \tilde{r}(t) = \tilde{r}(t_1)$. 由 $\tilde{r}'(t) = 0$ 可得, 当 $N = 2p$ 时,

$$t_1 = \left(\frac{a}{1-bS^2} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \tilde{r}(t_1) = \frac{a^2 S^2}{2p(1-bS^2)} = M;$$

当 $N < 2p$ 时, t_1 满足

$$aS^{\frac{N}{p}} t_1^p + bS^{\frac{2N}{p}} t_1^{2p} - S^{\frac{N}{p}} t_1^{p^*} = 0.$$

令 $t_1 = S^{\frac{p-N}{p^2}} y$, 则 $aSy^p + bS^2y^{2p} - y^{p^*} = 0$, 此时,

$$\tilde{r}(t_1) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) S^{\frac{N}{p}} t_1^{p^*} - \frac{bS^{\frac{2N}{p}}}{2p} t_1^{2p} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) y^{p^*} - \frac{bS^2}{2p} y^{2p} = M,$$

即 $\max_{t \geq 0} \tilde{r}(t) = \tilde{r}(t_1) = M$. 选取 $\mu_1 \in (0, \mu_*)$ 使得

$$M - B\mu_1^{\frac{p}{p-q}} > 0,$$

因此存在 $t_2 \in (0, t_1)$ 使得对任意的 $\mu \in (0, \mu_1)$, 有

$$\sup_{0 \leq t \leq t_2} r(t) \leq \sup_{0 \leq t \leq t_2} \tilde{r}(t) \leq M - B\mu_1^{\frac{p}{p-q}} < M - B\mu^{\frac{p}{p-q}}.$$

选取 $\mu_{**} \in (0, \mu_1]$ 使得对任意的 $\mu \in (0, \mu_{**})$, 有

$$\frac{\mu t_2^q}{q} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) U_{1,0}^q dx > B\mu^{\frac{p}{p-q}},$$

则对任意的 $\mu \in (0, \mu_{**})$, 有

$$\sup_{t \geq t_2} r(t) \leq \sup_{t \geq t_2} \tilde{r}(t) - \frac{\mu t_2^q}{q} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) U_{1,0}^q dx < \tilde{r}(t_1) - B\mu^{\frac{p}{p-q}} = M - B\mu^{\frac{p}{p-q}}.$$

从而得出以下结论: 对任意 $\mu \in (0, \mu_{**})$, 有

$$m \leq \sup_{t \geq 0} I(tU_{1,0}) = \sup_{t \geq 0} r(t) < M - B\mu^{\frac{p}{p-q}}.$$

证毕. □

引理 2.8 当 $N < 2p$, $a \geq 0$, $b > 0$ 或 $N = 2p$, $a > 0$, $0 < b < \frac{1}{S^2}$ 时, 假设 $\mu > 0$, (f) 成立. 若 $u_n \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 是有界序列, 满足 $I(u_n) \rightarrow m < M - B\mu^{\frac{p}{p-q}}$, $I'(u_n) \rightarrow 0$ 于 $(\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N))^*$, 则存在一个非零函数 $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 满足在子列的意义下, $u_n \rightarrow u$ 于 $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

证明 由于 $u_n \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 有界, 故在取子列的意义下, 存在 $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 使得

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u, \quad \text{于 } \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \\ u_n &\rightarrow u, \quad \text{于 } L_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^N), \quad p \leq s < p^*, \\ u_n &\rightarrow u, \quad \text{a.e. 于 } \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

由文献 [24] 中的集中紧致引理知, 存在一个至多可数集 Λ , 点列 $\{x_j\}_{j \in \Lambda} \subset \mathbb{R}^N$ 和数列 $\{\eta_j\}_{j \in \Lambda}, \{\nu_j\}_{j \in \Lambda} \subset \mathbb{R}^+$ 使得在子列的意义下有

$$|\nabla u_n|^p \rightharpoonup d\eta \geq |\nabla u|^p + \sum_{j \in \Lambda} \eta_j \delta_{x_j}, \quad |u_n|^{p^*} \rightharpoonup d\nu = |u|^{p^*} + \sum_{j \in \Lambda} \nu_j \delta_{x_j}, \quad (2.9)$$

其中 δ_{x_j} 为集中在 x_j 的 Dirac 测度, 且

$$S\nu_j^{\frac{p}{p^*}} \leq \eta_j. \quad (2.10)$$

下面证明 $\Lambda = \emptyset$. 假设 $\Lambda \neq \emptyset$. 固定 $j \in \Lambda$. 对于 $\epsilon > 0$, 假设 $\varphi_\epsilon^j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 满足 $\varphi_\epsilon^j \in [0, 1]$,

$$\varphi_\epsilon^j = \begin{cases} 1, & x \in B\left(x_j, \frac{\epsilon}{2}\right), \\ 0, & x \in B^c(x_j, \epsilon), \end{cases}$$

且 $|\nabla \varphi_\epsilon^j| \leq \frac{1}{\epsilon}$. 根据 $\langle I'(u_n), \varphi_\epsilon^j u_n \rangle \rightarrow 0$, 可得

$$(a + b\|u_n\|^p) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \varphi_\epsilon^j dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_n |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi_\epsilon^j dx \right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} \varphi_\epsilon^j dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_n|^q \varphi_\epsilon^j dx + o(1). \quad (2.11)$$

由 Hölder 不等式可知,

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a + b \|u_n\|^p) \left| \int_{\mathbb{R}^N} u_n |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi_\epsilon^j dx \right| \\ & \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} C \left(\int_{B(x_j, \epsilon)} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n|^{\frac{p-1}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B(x_j, \epsilon)} |u_n \nabla \varphi_\epsilon^j|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq C \left(\int_{B(x_j, \epsilon)} |u|^p |\nabla \varphi_\epsilon^j|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq C \left(\int_{B(x_j, \epsilon)} |\nabla \varphi_\epsilon^j|^N dx \right)^{\frac{1}{N}} \left(\int_{B(x_j, \epsilon)} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ & \leq C \left(\int_{B(x_j, \epsilon)} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ & \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

由 (2.9) 有

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a + b \|u_n\|^p) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \varphi_\epsilon^j dx \\ & \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[a \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \varphi_\epsilon^j dx + b \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \varphi_\epsilon^j dx \right)^2 \right] \\ & \geq a \eta_j + b \eta_j^2, \quad \epsilon \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} \varphi_\epsilon^j dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \varphi_\epsilon^j dx + \nu_j \rightarrow \nu_j, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_n|^q \varphi_\epsilon^j dx &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q \varphi_\epsilon^j dx \\ &= \int_{B(x_j, \epsilon)} f(x) |u|^q \varphi_\epsilon^j dx \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

在 (2.11) 两端关于 n 和 ϵ 取极限, 综合 (2.11)–(2.15) 可得

$$\nu_j \geq a \eta_j + b \eta_j^2.$$

再结合 (2.10), 有

$$\nu_j \geq \begin{cases} \hat{\nu}_j, & N < 2p, \\ \left(\frac{aS}{1-bS^2} \right)^2, & N = 2p, \end{cases} \quad (2.16)$$

其中 $\hat{\nu}_j$ 满足方程 $aS\hat{\nu}_j^{\frac{p}{p^*}} + bS^2\hat{\nu}_j^{\frac{2p}{p^*}} - \hat{\nu}_j = 0$. 设 $R > 0$, $\phi_R \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 满足 $\phi_R \in [0, 1]$,

$$\phi_R(x) = \begin{cases} 1, & x \in B(x_j, R), \\ 0, & x \in B^c(x_j, 2R). \end{cases}$$

利用 (2.9) 可得

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I(u_n) - \frac{1}{2p} \langle I'(u_n), u_n \rangle \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{2p} \|u_n\|^p + \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx - \mu \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_n|^q dx \right) \\
&\geq \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \phi_R dx + \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} \phi_R dx \right. \\
&\quad \left. - \mu \frac{2p-q}{2pq} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_n|^q dx \right) \\
&\geq \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \phi_R dx + \frac{a}{2p} \eta_j + \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \phi_R dx + \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^*} \right) \nu_j \right. \\
&\quad \left. - \mu \frac{2p-q}{2pq} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q dx \right) \\
&\geq \frac{a}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \frac{a}{2p} \eta_j + \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^*} \right) \nu_j - \mu \frac{2p-q}{2pq} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q dx \\
&\geq \frac{aS}{2p} |u|_{p^*}^p + \frac{a}{2p} \eta_j + \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^*} \right) \nu_j - \mu \frac{2p-q}{2pq} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q dx.
\end{aligned}$$

根据 Hölder 不等式和 Young 不等式, 有

$$\begin{aligned}
\mu \frac{2p-q}{2pq} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_n|^q dx &\leq \mu \frac{2p-q}{2pq} |f|_{\frac{p^*}{p^*-q}} |u|_{p^*}^q \\
&\leq \frac{\left[\left(\frac{aS}{2q} \right)^{\frac{q}{p}} |u|_{p^*}^q \right]^{\frac{p}{q}}}{\frac{p}{q}} + \frac{\left[\left(\frac{aS}{2q} \right)^{-\frac{q}{p}} \mu \frac{2p-q}{2pq} |f|_{\frac{p^*}{p^*-q}} \right]^{\frac{p}{p-q}}}{\frac{p}{p-q}} \\
&= \frac{aS}{2p} |u|_{p^*}^p + B\mu^{\frac{p}{p-q}}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

再结合 (2.10) 和 (2.16), 当 $N = 2p$ 时,

$$m \geq \frac{a}{2p} \eta_j - B\mu^{\frac{p}{p-q}} \geq \frac{a^2 S^2}{2p(1-bS^2)} - B\mu^{\frac{p}{p-q}};$$

当 $N < 2p$ 时, 结合 $\hat{\nu}_j$ 满足方程 $aS\hat{\nu}_j^{\frac{p}{p^*}} + bS^2\hat{\nu}_j^{\frac{2p}{p^*}} - \hat{\nu}_j = 0$, 可得

$$\begin{aligned}
m &\geq \frac{a}{2p} \eta_j + \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^*} \right) \nu_j - B\mu^{\frac{p}{p-q}} \\
&\geq \frac{aS}{2p} \nu_j^{\frac{p}{p^*}} + \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^*} \right) \nu_j - B\mu^{\frac{p}{p-q}} \\
&\geq \frac{aS}{2p} \hat{\nu}_j^{\frac{p}{p^*}} + \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^*} \right) \hat{\nu}_j - B\mu^{\frac{p}{p-q}} \\
&= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \hat{\nu}_j - \frac{bS^2}{2p} \hat{\nu}_j^{\frac{2p}{p^*}} - B\mu^{\frac{p}{p-q}}.
\end{aligned}$$

令 $\hat{\nu}_j^{\frac{1}{p^*}} = y$, 则 $m \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) y^{p^*} - \frac{bS^2}{2p} y^{2p} - B\mu^{\frac{p}{p-q}}$, 其中 y 满足 $aSy^p + bS^2 y^{2p} - y^{p^*} = 0$. 综上可得 $m \geq M - B\mu^{\frac{p}{p-q}}$. 这与引理 2.7 的结果矛盾, 故 $\Lambda = \emptyset$.

对 $R > 0$, 定义

$$\eta_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R^c} |\nabla u_n|^p dx, \tag{2.18}$$

$$\nu_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R^c} u_n^{p^*} dx. \tag{2.19}$$

由文献 [26, 命题 2] 知, η_∞ 和 ν_∞ 满足

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} d\eta + \eta_\infty, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} d\nu + \nu_\infty, \quad (2.20)$$

$$S\nu_\infty^{\frac{p}{p^*}} \leq \eta_\infty. \quad (2.21)$$

设函数 $\Psi_R \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 满足

$$\Psi_R \in [0, 1], \quad \Psi_R = \begin{cases} 0, & x \in B_{\frac{R}{2}}, \\ 1, & x \in B_R^c, \end{cases} \quad |\nabla \Psi_R| \leq \frac{1}{R}.$$

由 $\langle I'(u_n), \Psi_R u_n \rangle \rightarrow 0$ 可得

$$\begin{aligned} & (a + b\|u_n\|^p) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \Psi_R dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_n |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \Psi_R dx \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} \Psi_R dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_n|^q \Psi_R dx + o(1). \end{aligned} \quad (2.22)$$

由 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a + b\|u_n\|^p) \left| \int_{\mathbb{R}^N} u_n |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \Psi_R dx \right| \\ & \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} C \left(\int_{\frac{R}{2} \leq |x| \leq R} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\frac{R}{2} \leq |x| \leq R} |u_n \nabla \Psi_R|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq C \left(\int_{\frac{R}{2} \leq |x| \leq R} |u|^p |\nabla \Psi_R|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq C \left(\int_{\frac{R}{2} \leq |x| \leq R} |\nabla \Psi_R|^N dx \right)^{\frac{1}{N}} \left(\int_{\frac{R}{2} \leq |x| \leq R} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ & \leq C \left(\int_{|x| \geq \frac{R}{2}} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ & \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.23)$$

由 (2.18) 有

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a + b\|u_n\|^p) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \Psi_R dx \\ & \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[a \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \Psi_R dx + b \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \Psi_R dx \right)^2 \right] \\ & \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[a \int_{|x| > R} |\nabla u_n|^p \Psi_R dx + b \left(\int_{|x| > R} |\nabla u_n|^p \Psi_R dx \right)^2 \right] \\ & = a\eta_\infty + b\eta_\infty^2, \quad R \rightarrow \infty, \\ & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} \Psi_R dx = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \frac{R}{2}} |u_n|^{p^*} \Psi_R dx \\ & \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \frac{R}{2}} |u_n|^{p^*} dx \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\rightarrow \nu_\infty, \quad R \rightarrow \infty. \quad (2.25)$$

由 (f) 成立, 易得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_n|^q \Psi_R dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q \Psi_R dx = \int_{|x| \geq \frac{R}{2}} f(x) |u|^q \Psi_R dx \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty. \quad (2.26)$$

对 (2.22) 两端关于 n 和 R 取极限, 结合 (2.22)–(2.26) 可得

$$a\eta_\infty + b\eta_\infty^2 \leq \nu_\infty.$$

再综合 (2.21), 我们得出以下两种情形之一成立:

情形 1 $\nu_\infty = 0$.

情形 2

$$\nu_\infty \geq \begin{cases} \hat{\nu}_\infty, & N > 2p, \\ \left(\frac{aS}{1-bS^2} \right)^2, & N = 2p, \end{cases}$$

其中 $\hat{\nu}_\infty$ 是方程 $aS\hat{\nu}_\infty^{\frac{p}{p^*}} + bS^2\hat{\nu}_\infty^{\frac{2p}{p^*}} - \hat{\nu}_\infty = 0$ 的唯一非平凡解.

假设情形 2 发生, 利用 (2.20) 可得

$$\begin{aligned} m &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I(u_n) - \frac{1}{2p} \langle I'(u_n), u_n \rangle \right) \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{2p} \|u_n\|^p + \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx - \mu \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_n|^q dx \right) \\ &= \frac{a}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} d\eta + \frac{a}{2p} \eta_\infty + \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} d\nu + \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^*} \right) \nu_\infty - \mu \frac{2p-q}{2pq} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q dx \\ &\geq \frac{a}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \frac{a}{2p} \eta_\infty + \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^*} \right) \nu_\infty - \mu \frac{2p-q}{2pq} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q dx \\ &\geq \frac{aS}{2p} |u|_{p^*}^p + \frac{a}{2p} \eta_\infty + \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^*} \right) \nu_\infty - \mu \frac{2p-q}{2pq} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q dx. \end{aligned}$$

利用 (2.17) 和 (2.21), 类似上一部分的计算可得 $m \geq M - B\mu^{\frac{p}{p-q}}$, 与引理 2.7 的结果矛盾, 故情形 1 成立.

综合 $\nu_\infty = 0$ 、 $\Lambda = \emptyset$ 、(2.9) 和 (2.20) 得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{p^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^{p^*} dx,$$

由 Fatou 引理有

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^{p^*} dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{p^*} dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{p^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^{p^*} dx,$$

因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{p^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^{p^*} dx.$$

设 $\|u_n\| = A + o(1)$, 由 $0 = \langle I'(u_n), u_n - u \rangle + o(1)$ 和 (1.6) 得

$$0 = \langle I'(u_n), u_n - u \rangle + o(1)$$

$$\begin{aligned}
 &= (a + b\|u_n\|^p) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2} u_n (u_n - u) dx \\
 &\quad - \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_n|^{q-2} u_n (u_n - u) dx + o(1) \\
 &= (a + bA^p)(A^p - \|u\|^p),
 \end{aligned}$$

从而 $\|u\| = A$, 即 $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$, 结合弱收敛知强收敛, 即在 $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中, $u_n \rightarrow u$. $\square$

引理 2.9 (Brézis-Lieb 引理, 参见文献 [23, 引理 1.32]) 假设 Ω 为 $\mathbb{R}^N$ 中的一个开子集, 并且有 $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$. 如果 $\{u_n\}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中是有界的并且 u_n 在区域 Ω 上几乎处处收敛于 u , 那么有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |u_n|^p dx - \int_{\Omega} |u_n - u|^p dx \right) = \int_{\Omega} |u|^p dx.$$

3 $\mu > 0$ 时的结果

3.1 定理 1.1 的证明

首先证明对任意的 $\mu \in (0, \mu^*)$, 方程 (1.1) 在 $N \leq 2p$ 时有一个非平凡解, 这个解是泛函 I 的一个局部极小化子.

由引理 2.3、2.4 和 Ekeland 变分原理可知, 存在 $u_n \in \mathbb{B}_\tau$, 使得 $I(u_n) \rightarrow c$ 于 $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $I'(u_n) \rightarrow 0$ 于 $(\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N))^*$. 从而存在 $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 使得

$$\begin{aligned}
 u_n &\rightharpoonup u, \quad \text{于 } \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \\
 u_n &\rightarrow u, \quad \text{于 } L^s_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N), \quad p \leq s < p^*, \\
 u_n &\rightarrow u, \quad \text{a.e. 于 } \mathbb{R}^N.
 \end{aligned}$$

因为 $\bar{\mathbb{B}}_\tau$ 是闭凸集, 闭凸集是弱闭的, 所以 $u \in \bar{\mathbb{B}}_\tau$, 故 $I(u) \geq c$. 下面证明 $I(u) \leq c$. 由 $u_n \rightharpoonup u$ 于 $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ 且 $u_n \rightarrow u$ a.e. 于 $\mathbb{R}^N$ 知, $|u_n|^{q-2} u_n \rightarrow |u|^{q-2} u$ 于 $L^{\frac{p^*}{q-1}}(\mathbb{R}^N)$, 故结合 (f) 可得

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_n|^{q-2} u_n u dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^{q-1} dx, \quad n \rightarrow \infty.$$

定义 $A = \|u_n\| + o(1)$. 根据 $I'(u_n) \rightarrow 0$ 于 $(\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N))^*$ 和 (1.6) 可得

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle I'(u_n), u \rangle + o(1) \\
 &= (a + b\|u_n\|^p) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2} u_n u dx \\
 &\quad - \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_n|^{q-2} u_n u dx + o(1) \\
 &= (a + bA^p) \|u\|^p - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q dx,
 \end{aligned}$$

因此, 结合范数的弱下半连续性和 Fatou 引理, 有

$$\begin{aligned}
 c \leq I(u) &= \frac{a}{p} \|u\|^p + \frac{b}{2p} \|u\|^{2p} - \frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q dx \\
 &\leq \frac{a}{p} \|u\|^p + \frac{b}{2p} A^p \|u\|^p - \frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{p} \|u\|^p + \frac{b}{2p} A^p \|u\|^p - \frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q dx \\
&\quad - \frac{1}{2p} \left[(a + bA^p) \|u\|^p - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q dx \right] \\
&= \frac{a}{2p} \|u\|^p + \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx - \mu \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q dx \\
&\leq \frac{a}{2p} \|u_n\|^p + \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx - \mu \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_n|^q dx + o(1) \\
&= I(u_n) - \frac{1}{2p} \langle I'(u_n), u_n \rangle + o(1) \\
&= I(u_n) + o(1) = c,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

所以, u 是 c 的一个极小化子. 由于 (3.1) 中的不等号可以取等号, 所以 $A = \|u\|$, 即 $\{u_n\}$ 在 $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中依范数收敛, 结合弱收敛可得强收敛. 从而推出 $I'(u_n) \rightarrow I'(u) = 0$ 于 $(\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N))^*$. 由 $I(u) < 0$ 得出 u 为方程 (1.1) 的一个非平凡解.

下面将证明, 对于很小的 $\mu > 0$, 方程 (1.1) 在 $N \leq 2p$ 时有另一个解, 这个解是山路解.

由引理 2.6 和 2.7 知, 存在 $\mu_{**} \in (0, \mu_*]$ 使得对于任意的 $\mu \in (0, \mu_{**})$, 有有界序列 $\{u_n\} \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 满足 $I(u_n) \rightarrow m < M - B\mu^{\frac{p}{p-q}}$, $I'(u_n) \rightarrow 0$ 于 $(\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N))^*$. 由引理 2.8 知, 存在函数 $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 使得在子列的意义下 $u_n \rightarrow u$ 于 $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. 于是有 $I(u_n) \rightarrow m = I(u)$, $I'(u_n) \rightarrow 0 = I'(u)$ 于 $(\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N))^*$, 即 u 是 I 的临界点. 由于 $I(u) = m > 0$, 因此, u 是方程 (1.1) 的另一个非平凡解.

3.2 定理 1.2 的证明

我们分 4 步给出定理 1.2 的证明.

第 1 步 I 是强制的.

事实上, 当 $N = 2p$, $a = 0$, $b > \frac{1}{S^2}$ 时, 对所有的 $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 利用 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式, 有

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{b}{2p} \|u\|^{2p} - \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2p} dx - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q dx \\
&\geq \frac{b}{2p} \|u\|^{2p} - \frac{1}{2pS^2} \|u\|^{2p} - \frac{\mu}{qS^{\frac{q}{p}} |f|_{\frac{p^*}{p^*-q}}} \|u\|^q \\
&= \frac{1}{2p} \left(b - \frac{1}{S^2} \right) \|u\|^{2p} - \frac{\mu}{qS^{\frac{q}{p}} |f|_{\frac{p^*}{p^*-q}}} \|u\|^q.
\end{aligned}$$

当 $N = 2p$, $a > 0$, $b \geq \frac{1}{S^2}$ 时, 对所有的 $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 利用 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式, 有

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{a}{p} \|u\|^p + \frac{b}{2p} \|u\|^{2p} - \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2p} dx - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q dx \\
&\geq \frac{a}{p} \|u\|^p + \frac{1}{2pS^2} \|u\|^{2p} - \frac{1}{2pS^2} \|u\|^{2p} - \frac{\mu}{qS^{\frac{q}{p}} |f|_{\frac{p^*}{p^*-q}}} \|u\|^q \\
&= \frac{a}{p} \|u\|^p - \frac{\mu}{qS^{\frac{q}{p}} |f|_{\frac{p^*}{p^*-q}}} \|u\|^q.
\end{aligned}$$

当 $N > 2p$, $a \geq 0$, $b > 0$ 时, 对所有的 $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 利用 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式, 有

$$I(u) = \frac{a}{p} \|u\|^p + \frac{b}{2p} \|u\|^{2p} - \frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q dx$$

$$\geq \frac{a}{p} \|u\|^p + \frac{b}{2p} \|u\|^{2p} - \frac{1}{p^* S^{\frac{p^*}{p}}} \|u\|^{p^*} - \frac{\mu}{q S^{\frac{q}{p}}} |f|_{\frac{p^*}{p^*-q}} \|u\|^q.$$

由于 $q < p$, 且 $N > 2p$ 时 $p^* < 2p$, 所以, 当 $\|u\| \rightarrow \infty$ 时, $I(u) \rightarrow \infty$, 故 I 是强制的.

第 2 步 存在 $e \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 满足 $I(e) < 0$.

事实上, 当 $N \geq 2p$, $a \geq 0$, $b > 0$ 时, 对任意的 $\mu > 0$, $t > 0$, 有

$$I(tu) = \frac{at^p}{p} \|u\|^p + \frac{bt^{2p}}{2p} \|u\|^{2p} - \frac{t^{p^*}}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx - \frac{\mu t^q}{q} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q dx,$$

又因为 $N \geq 2p$ 时 $p^* \leq 2p$, 因此存在足够小的 t 使得 $I(tu) < 0$.

第 3 步 $\gamma := \inf_{u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} I(u) < 0$ 可达.

由 Ekeland 变分原理可知, 存在 $u_n \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 使得 $I(u_n) \rightarrow \gamma$ 于 $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $I'(u_n) \rightarrow 0$ 于 $(\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N))^*$. 由于 I 是强制的, 故 u_n 在 $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中有界, 从而存在 $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 使得

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u, \quad \text{于 } \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \\ u_n &\rightarrow u, \quad \text{于 } L_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^N), \quad p \leq s < p^*, \\ u_n &\rightarrow u, \quad \text{a.e. 于 } \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

定义 $\omega_n = u_n - u$, 根据引理 2.9 且 (f) 成立, 可得

$$\begin{aligned} \|u_n\|^p &= \|\omega_n\|^p + \|u\|^p + o(1), \\ \|u_n\|^{2p} &= \|\omega_n\|^{2p} + \|u\|^{2p} + 2\|\omega_n\|^p \|u\|^p + o(1), \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\omega_n|^{p^*} dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx + o(1), \\ \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |\omega_n|^q dx &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_n|^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u|^q dx + o(1). \end{aligned}$$

当 $N = 2p$, $a > 0$, $b \geq \frac{1}{S^2}$ 时, 由 Sobolev 不等式可得

$$\frac{a}{p} \|\omega_n\|^p + \frac{b}{2p} \|\omega_n\|^{2p} - \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} |\omega_n|^{2p} dx \geq \frac{b}{2p} \|\omega_n\|^{2p} - \frac{1}{2p S^2} \|\omega_n\|^{2p} \geq 0.$$

当 $N > 2p$, $a \geq 0$, $b > 0$ 且满足 $a^{N-2p} b^p S^N N^{N-p} \geq (2p)^p (N-2p)^{N-2p}$ 时, 利用 Young 不等式, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^* S^{\frac{p^*}{p}}} \|\omega_n\|^{p^*} &= \|\omega_n\|^{2p-p^*} \left(\frac{a}{2p-p^*} \right)^{\frac{2p-p^*}{p}} \|\omega_n\|^{2p^*-2p} \left(\frac{a}{2p-p^*} \right)^{\frac{p^*-2p}{p}} \frac{1}{p^* S^{\frac{p^*}{p}}} \\ &\leq \frac{a}{p} \|\omega_n\|^p + \frac{\|\omega_n\|^{2p} \left(\frac{a}{2p-p^*} \right)^{\frac{p^*-2p}{p}} \left(\frac{1}{p^* S^{\frac{p^*}{p}}} \right)^{\frac{p}{p^*-p}}}{\frac{p}{p^*-p}} \\ &\leq \frac{a}{p} \|\omega_n\|^p + \frac{b}{2p} \|\omega_n\|^{2p}, \end{aligned}$$

上式中用到了

$$2^{p^*-p} a^{p^*-2p} (p^*-p)^{p^*-p} \leq b^{p^*-p} S^{p^*} p^{*p} (2p-p^*)^{p^*-2p},$$

即 $a^{N-2p} b^p S^N N^{N-p} \geq (2p)^p (N-2p)^{N-2p}$. 因此有

$$I(\omega_n) = \frac{a}{p} \|\omega_n\|^p + \frac{b}{2p} \|\omega_n\|^{2p} - \frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\omega_n|^{p^*} dx$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{a}{p} \|\omega_n\|^p + \frac{b}{2p} \|\omega_n\|^{2p} - \frac{1}{p^* S^{\frac{p^*}{p}}} \|\omega_n\|^{p^*} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned} \gamma &= I(u_n) + o(1) \\ &= I(\omega_n) + I(u) + 2\|\omega_n\|^p \|u\|^p + o(1) \\ &\geq I(u). \end{aligned}$$

另一方面, γ 的定义保证了 $\gamma \leq I(u)$ 成立, 所以, u 是 γ 的一个极小化子.

第 4 步 u 是方程 (1.1) 的非平凡解.

由于 u 是 γ 的一个极小化子, 因此,

$$\begin{aligned} \langle I'_+(u), v \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{I(u+tv) - I(u)}{t} \geq 0, \\ \langle I'_+(u), -v \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{I(u-tv) - I(u)}{t} \geq 0 \end{aligned}$$

对任意的 $v \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 都成立, 所以 $\langle I'_+(u), v \rangle = 0$. 同理可证 $\langle I'_-(u), v \rangle = 0$. 从而 $I'(u) = 0$. 再由 $I(u) = \gamma < 0$ 可得 u 是方程 (1.1) 的非平凡解. 定理 1.2 证毕.

4 $\mu = 0$ 时的结果

4.1 定理 1.3 的证明

必要性 若 $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 是 (1.1) 的一个解, 设 $t > 0$ 满足

$$t^p = \frac{1}{a + b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx}, \quad \omega(\cdot) = u\left(\frac{1}{t} \cdot\right) = u_{\frac{1}{t}}(\cdot),$$

则 $\omega \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 满足 $u(\cdot) = \omega(t \cdot)$ 且有

$$-\Delta_p \omega(x) = -\frac{1}{t^p} \Delta_p u\left(\frac{1}{t}x\right) = \frac{1}{t^p} \frac{|u(\frac{1}{t}x)|^{p^*-2} u(\frac{1}{t}x)}{a + b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(\frac{1}{t}x)|^p d(\frac{1}{t}x)} = |\omega(x)|^{p^*-2} \omega(x),$$

此时,

$$t^p = \frac{1}{a + b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx} = \frac{1}{a + t^{p-N} b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega|^p dx},$$

即 t^p 满足 $t^p a + t^{2p-N} b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega|^p dx = 1$.

充分性 若 $\omega \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ($t > 0$) 满足定理中的条件, 设 $u(\cdot) = \omega(t \cdot) = \omega_t(\cdot)$, 则 $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 满足

$$\begin{aligned} -\Delta_p u(x) &= -t^p \Delta_p \omega(tx) = t^p |\omega(tx)|^{p^*-2} \omega(tx) \\ &= \frac{|u(x)|^{p^*-2} u(x)}{a + t^{p-N} b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega|^p dx} \\ &= \frac{|u(x)|^{p^*-2} u(x)}{a + b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx}, \end{aligned}$$

即 u 是 (1.1) 的解.

注 4.1 参见文献 [16, 定理 1.1] 的证明方法, 对任意的 $t > 0$ 和 (1.8) 中的 U_{δ, x_0} , 定义

$$V_{\delta, x_0, t} = t^{\frac{N-p}{p^2}} U_{\delta, x_0},$$

可得

$$-t\Delta_p V_{\delta, x_0, t} = V_{\delta, x_0, t}^{p^*-1},$$

通过考虑如下关于 t 的方程的解:

$$t = a + b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(t^{\frac{N-p}{p^2}} U_{\delta, x_0})|^p dx = a + b S^{\frac{N}{p}} t^{\frac{N-p}{p}},$$

我们得到方程 (1.1) 在 $\mu = 0$ 时解的形式如下:

(1) 当 $N < 2p$, $a \geq 0$, $b > 0$ 时, 方程 (1.1) 有一族正解, 形式为 $\lambda U_{\delta, x_0}$, 其中 λ 是与 N 和 p 有关的一个常数.

(2) 当 $N = 2p$, $a = 0$, $b = \frac{1}{S^2}$ 时, 方程 (1.1) 有一族正解, 形式为 $\lambda^{\frac{1}{p}} U_{\delta, x_0}$, 其中 λ 是任意正数; 当 $N = 2p$, $a > 0$, $0 < b < \frac{1}{S^2}$ 时, 方程 (1.1) 有一族正解, 它们是 $(\frac{a}{1-bS^2})^{\frac{1}{p}} U_{\delta, x_0}$.

(3) (i) 当 $N > 2p$, $a = 0$, $b > 0$ 时, 方程 (1.1) 存在一族解, 形式为 $b^{\frac{N-p}{p(2p-N)}} S^{\frac{N(N-p)}{p^2(2p-N)}} U_{\delta, x_0}$;

(ii) 当 $N > 2p$, $a > 0$, $b > 0$ 且满足 $a^{N-2p} b^p S^N (N-p)^{N-p} = p^p (N-2p)^{N-2p}$ 时, 方程 (1.1) 存在一族解, 其形式为 $(\frac{ap}{(N-2p)bS^{\frac{N}{p}}})^{\frac{1}{p}} U_{\delta, x_0}$;

(iii) 当 $N > 2p$, $a > 0$, $b > 0$ 且满足 $a^{N-2p} b^p S^N (N-p)^{N-p} < p^p (N-2p)^{N-2p}$ 时, 方程 (1.1) 存在一族解, 其形式为 $\lambda_i^{\frac{N-p}{p^2}} U_{\delta, x_0}$ ($i = 1, 2$), λ_i 是某个正常数, 满足

$$0 < \lambda_1 < \left(\frac{ap}{(N-2p)bS^{\frac{N}{p}}} \right)^{\frac{1}{p}} < \lambda_2.$$

4.2 定理 1.5 的证明

假设 $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ 是方程 (1.1) 的解, 利用方程 (1.1) 和 Sobolev 不等式, 在以下三种情形下, 我们分别得出如下矛盾:

(1) 当 $N = 2p$, $a = 0$, $b > \frac{1}{S^2}$ 时,

$$\frac{1}{S^2} \|u\|^{2p} < b \|u\|^{2p} = |u|_{2p}^{2p} \leq \frac{1}{S^2} \|u\|^{2p};$$

(2) 当 $N = 2p$, $a > 0$, $b \geq \frac{1}{S^2}$ 时,

$$\frac{1}{S^2} \|u\|^{2p} \leq b \|u\|^{2p} < a \|u\|^p + b \|u\|^{2p} = |u|_{2p}^{2p} \leq \frac{1}{S^2} \|u\|^{2p};$$

(3) 当 $N > 2p$, $a, b > 0$, 且满足 $a^{N-2p} b^p S^N (N-p)^{N-p} > p^p (N-2p)^{N-2p}$ 时, 由 Young 不等式得

$$\begin{aligned} \frac{1}{S^{\frac{p^*}{p}}} \|u\|^{p^*} &= \|u\|^{2p-p^*} \left(\frac{ap}{2p-p^*} \right)^{\frac{2p-p^*}{p}} \|u\|^{2p^*-2p} \left(\frac{ap}{2p-p^*} \right)^{\frac{p^*-2p}{p}} \frac{1}{S^{\frac{p^*}{p}}} \\ &\leq a \|u\|^p + \|u\|^{2p} \left(\frac{p^*-p}{2p-p^*} \right) \left(\frac{ap}{2p-p^*} \right)^{-\frac{p}{p^*-p}} S^{-\frac{p^*}{p^*-p}} a \\ &< a \|u\|^p + b \|u\|^{2p}, \end{aligned}$$

从而可得

$$\frac{1}{S^{\frac{p^*}{p}}} \|u\|^{p^*} < a\|u\|^p + b\|u\|^{2p} = |u|_{p^*}^{p^*} \leq \frac{1}{S^{\frac{p^*}{p}}} \|u\|^{p^*}.$$

致谢 作者衷心感谢匿名审稿人对于本文提出的许多宝贵意见.

参考文献

- Kirchhoff G. *Mechanik*. Leipzig: Teubner, 1883
- Lions J L. On some questions in boundary value problems of mathematical physics. In: *Contemporary Development in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations*. Amsterdam-New York: North-Holland, 1978, 284–346
- Arosio A, Panizzi S. On the well-posedness of the Kirchhoff string. *Trans Amer Math Soc*, 1996, 348: 305–331
- Alves C O, Corrêa F J S A. On existence of solutions for a class of problem involving a nonlinear operator. *Comm Appl Nonlinear Anal*, 2001, 8: 43–56
- Cavalcanti M M, Domingos Cavalcanti V N, Soriano J A. Global existence and uniform decay rates for the Kirchhoff-Carrier equation with nonlinear dissipation. *Adv Difference Equ*, 2001, 6: 701–730
- D’Ancona P, Spagnolo S. Global solvability for the degenerate Kirchhoff equation with real analytic data. *Invent Math*, 1992, 108: 247–262
- Guo H, Zhang Y M, Zhou H S. Blow-up solutions for a Kirchhoff type elliptic equation with trapping potential. *Commun Pure Appl Anal*, 2018, 17: 1875–1897
- Brézis H, Nirenberg L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Comm Pure Appl Math*, 1983, 36: 437–477
- Alves C O, Corrêa F J S A, Figueiredo G M. On a class of nonlocal elliptic problems with critical growth. *Differ Equ Appl*, 2010, 2: 409–417
- Figueiredo G M. Existence of a positive solution for a Kirchhoff problem type with critical growth via truncation argument. *J Math Anal Appl*, 2013, 401: 706–713
- Fiscella A, Valdinoci E. A critical Kirchhoff type problem involving a nonlocal operator. *Nonlinear Anal*, 2014, 94: 156–170
- Naimen D. The critical problem of Kirchhoff type elliptic equations in dimension four. *J Differential Equations*, 2014, 257: 1168–1193
- Naimen D. Positive solutions of Kirchhoff type elliptic equations involving a critical Sobolev exponent. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl*, 2014, 21: 885–914
- Figueiredo G M, Santos Junior J R. Multiplicity of solutions for a Kirchhoff equation with subcritical or critical growth. *Differential Integral Equations*, 2012, 25: 853–868
- He X, Zou W. Ground states for nonlinear Kirchhoff equations with critical growth. *Ann Mat Pura Appl (4)*, 2014, 193: 473–500
- Liu J, Liao J F, Tang C L. Positive solutions for Kirchhoff-type equations with critical exponent in $\mathbb{R}^N$. *J Math Anal Appl*, 2015, 429: 1153–1172
- Huang J C, Jiang Z M, Li Z Y, et al. Multiplicity of solutions for a p -Kirchhoff equation. *Bound Value Probl*, 2017, 41: 1–16
- Zhou C X, Song Y Q. Multiplicity of solutions for elliptic problems of p -Kirchhoff type with critical exponent. *Bound Value Probl*, 2015, 223: 1–12
- Li G. The existence of quasilinear elliptic equation with critical Sobolev exponents on unbounded domain. *Acta Math Sci Ser B Engl Ed*, 1994, 14: 64–74
- Li G, Ye H. Existence of positive ground state solutions for the nonlinear Kirchhoff type equations in $\mathbb{R}^3$. *J Differential Equations*, 2014, 257: 566–600
- Sciunzi B. Classification of positive $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ -solutions to the critical p -Laplace equation in $\mathbb{R}^N$. *Adv Math*, 2016, 291: 12–23
- Azzollini A. A note on the elliptic Kirchhoff equation in $\mathbb{R}^N$ perturbed by a local nonlinearity. *Commun Contemp Math*, 2015, 17: 1450039
- Willem M. *Minimax Theorems*. Boston: Birkhäuser, 1996
- Lions P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations: The limit cases, I and II. *Rev Mat Iberoam*, 1985, 1: 145–201; 45–121
- Júlio F, Corrêa S A, Figueiredo G M. On an elliptic equation of p -Kirchhoff type via variational methods. *Bull Aust Math Soc*, 2006, 74: 263–277

- 26 Chabrowski J. Concentration-compactness principle at infinity and semilinear elliptic equations involving critical and subcritical Sobolev exponents. Calc Var Partial Differential Equations, 1995, 3: 493–512

The existence of nontrivial solutions for p -Kirchhoff type equations with critical exponent in $\mathbb{R}^N$

Gongbao Li & Yahui Niu

Abstract We study the existence of nontrivial solutions of the p -Kirchhoff type equation

$$\begin{cases} -\left(a + b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\right) \Delta_p u = |u|^{p^*-2} u + \mu f(x) |u|^{q-2} u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

with critical nonlinearity, where $a \geq 0$, $b > 0$, $1 < p < N$, $1 < q < p$, $p^* = \frac{Np}{N-p}$, $\mu \geq 0$, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ is the p -Laplacian of u , $f \in L^{\frac{p^*}{p^*-q}}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ and f is nonnegative. Under certain conditions, we prove the existence of at least two nontrivial solutions of the above equation by the methods of Ekeland variational principle and the mountain pass theorem.

Keywords p -Kirchhoff equation, critical nonlinearity, Ekeland variational principle, mountain pass theorem, two nontrivial solutions

MSC(2010) 35A15, 35B33

doi: 10.1360/N012017-00142