初始值具有大震荡的椭圆 BGK 模型整体解的存在性

献给李大潜教授 80 华诞

段仁军¹, 王勇^{1,2}, 杨彤^{3*}

1. 香港中文大学数学系, 香港;

2. 中国科学院数学与系统科学研究院应用数学研究所, 北京 100190;

3. 香港城市大学数学系, 香港

E-mail: rjduan@math.cuhk.edu.hk, yongwang@amss.ac.cn, matyang@cityu.edu.hk

收稿日期: 2016-08-22; 接受日期: 2016-11-24; 网络出版日期: 2017-01-23; * 通信作者

Hong Kong General Research Fund (Grant Nos. 409913 and 103412) 和国家自然科学基金 (批准号: 11401565) 资助项目

摘要 椭圆 BGK 模型的提出是为了正确匹配经典 BGK 模型的 Navier-Stokes 方程逼近中的 Prandtl 数. 本文证明了在初始值有较大震荡情形下该模型 Cauchy 问题温和解的整体存在性, 证明方法来源于最近关于 Boltzmann 方程类似问题的研究.

关键词 椭圆 BGK 模型 整体解 大初值

MSC (2010) 主题分类 35Q20, 35B35, 35B45

1 引言

本文考虑下面的椭圆 BGK 模型 (简称 ES-BGK):

$$F_t + v \cdot \nabla_x F = A_\nu(M_\nu - F), \quad (1.1)$$

其中未知量 $F = F(t, x, v) \geq 0$ 表示在位置 $x \in \Omega = \mathbb{R}^3$ (或者 $\mathbb{T}^3$) 处, 速度 $v \in \mathbb{R}^3$ 及时间 $t > 0$ 时气体粒子的密度分布函数; $A_\nu = A_\nu(F)$ 是碰撞频率函数, $M_\nu = M_\nu(F)$ 是各项异性 Gauss 函数, 这两个函数都依赖于未知函数 F . 在这里, $A_\nu(F)$ 与给定的参数 $\nu \in (-1/2, 1)$ 相对应, 且这个参数与上面的 Boltzmann 型模型^[1] 中的 Prandtl 数相关, 后面将给出它们的具体形式. 读者可以分别参阅 ES-BGK 模型的起源^[2,3]、背景^[4]、数值研究^[5-7] 和最近关于解的存在性的数学研究^[8,9].

给定 $F(t, x, v)$, 我们定义通常的流体质量密度 ρ 、速度 u 、温度 T 和应力张量 Θ 分别为

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^3} F(t, x, v) dv, \\ u(t, x) &= \frac{1}{\rho} \int_{\mathbb{R}^3} v F(t, x, v) dv, \end{aligned}$$

英文引用格式: Duan R J, Wang Y, Yang T. Global existence for the ellipsoidal BGK model with initial large oscillations (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1143–1154, doi: 10.1360/N012016-00150

$$\begin{aligned} T(t, x) &= \frac{1}{3\rho} \int_{\mathbb{R}^3} |v - u|^2 F(t, x, v) dv, \\ \Theta(t, x) &= \frac{1}{\rho} \int_{\mathbb{R}^3} (v - u) \otimes (v - u) F(t, x, v) dv. \end{aligned}$$

进一步, 我们记温度张量为

$$\mathcal{T}_\nu = (1 - \nu)T \text{Id} + \nu\Theta, \quad (1.2)$$

其中 Id 为 3×3 的单位矩阵. 则碰撞频率 $A_\nu = A_\nu(F)$ 和各向异性 Gauss 函数 $M_\nu = M_\nu(F)$ 分别定义为

$$M_\nu = \frac{\rho}{\sqrt{\det(2\pi\mathcal{T}_\nu)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(v - u)^t \mathcal{T}_\nu^{-1}(v - u)\right)$$

和

$$A_\nu = \frac{\rho T}{1 - \nu}.$$

本文研究方程 (1.1) 的 Cauchy 问题的适定性, F 的初始值给定为

$$F(t, x, v)|_{t=0} = F_0(x, v). \quad (1.3)$$

回顾 ES-BGK 模型 (1.1) 中右边的碰撞项满足 (参见文献 [1, 5])

$$\int_{\mathbb{R}^3} (M_\nu - F) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} dv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

这使得对任意的解 $F(t, x, v)$, 我们有形如文献 [10] 中的质量亏损守恒、动量亏损守恒和能量亏损守恒, 即对任意的 $t > 0$, 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} (F(t, x, v) - \mu(v)) dv dx &= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} (F_0(x, v) - \mu(v)) dv dx \triangleq M_0, \\ \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} v(F(t, x, v) - \mu(v)) dv dx &= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} v(F_0(x, v) - \mu(v)) dv dx \triangleq J_0, \\ \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 (F(t, x, v) - \mu(v)) dv dx &= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 (F_0(x, v) - \mu(v)) dv dx \triangleq E_0, \end{aligned}$$

其中

$$\mu(v) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{|v|^2}{2}\right)$$

为标准化的全局 Maxwell. 正如文献 [1] 中表示一样, 熵的耗散性质仍成立, 即对任意的 $t > 0$, 有

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} (F \ln F - \mu \ln \mu) dv dx \leq 0.$$

为后文所需 (同文献 [11]), 我们记

$$\mathcal{E}(F_0) := \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} F_0 \ln F_0 - \mu \ln \mu dv dx + \left[\frac{3}{2} \ln(2\pi) - 1\right] M_0 + \frac{1}{2} E_0.$$

注意到当 $F_0(x, v) \geq 0$ 时, $\mathcal{E}(F_0) \geq 0$ 恒成立 (参见文献 [11]).

本文的主要结论叙述如下.

定理 1.1 令 $\beta > 7$ 且 $w(v) = (1 + |v|)^\beta$. 假设 $F_0(x, v) \geq 0$, $\|wF_0\|_{L^\infty} < +\infty$, 并且有常数 $C_0 > 0$ 使得

$$\inf_{t \geq 0, x \in \Omega} \int_{\mathbb{R}^3} F_0(x - vt, v) dv \geq C_0, \quad (1.4)$$

则存在常数 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $\tilde{C}_1 \geq 1$, 它们仅依赖于 β, ν, C_0 和 $\|wF_0\|_{L^\infty}$, 使得初值 $F_0(x, v)$ 进一步满足

$$\mathcal{E}(F_0) + \sup_{t \geq t_1, x \in \Omega} e^{-\frac{t}{1-\nu}} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (1, v, |v|^2, v \otimes v) [F_0(x - vt, v) - \mu(v)] dv \right| \leq \varepsilon_0, \quad (1.5)$$

其中 $t_1 := (\tilde{C}_2 \|wF_0\|_{L^\infty})^{-1} > 0$, 这里常数 $\tilde{C}_2 \geq 1$ 仅依赖于 β 和 ν , 则 ES-BGK 模型的 Cauchy 问题 (1.1) 和 (1.3) 存在唯一的全局温和解 $F(t, x, v) \geq 0$, 并满足

$$\sup_{t \geq 0} \|wF(t)\|_{L^\infty} \leq \tilde{C}_1.$$

需要指出的是, 在定理 1.1 的假设下, 初始值 $F_0(x, v)$ 允许有大的震荡. 例如, 取

$$F_0(x, v) = \rho_0(x)\mu(v),$$

其中 $0 < C^{-1} \leq \rho_0(x) \leq C$ 和 $\|\rho_0 - 1\|_{L_x^1} \ll 1$, 则显然 $F_0(x, v)$ 符合定理 1.1 的所有条件. 事实上, 首先, 易观察 $\|wF_0\|_{L^\infty} < \infty$, (1.4) 成立, 而且

$$\mathcal{E}(F_0) \leq \|\rho_0 \ln \rho_0 - \rho_0 + 1\|_{L_x^1} + C\|\rho_0 - 1\|_{L_x^1}.$$

为了估计 (1.5) 中左边的第二项, 我们如同文献 [11] 中一样分两种情形讨论:

当 $\Omega = \mathbb{R}^3$ 时, 对任意 $t \geq t_1$ 和 $x \in \mathbb{R}^3$, 可知

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|^2) |F_0(x - vt, v) - \mu(v)| dv &\leq C \int_{\mathbb{R}^3} |\rho_0(x - vt) - 1| dv \\ &= Ct^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} |\rho_0(y) - 1| dy \leq Ct_1^{-3} \|\rho_0 - 1\|_{L_x^1}. \end{aligned}$$

当 $\Omega = \mathbb{T}^3$ 时, 对任意 $t \geq t_1$ 和 $x \in \mathbb{T}^3$, 可知

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|^2) |F_0(x - vt, v) - \mu(v)| dv &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\rho_0(x - vt) - 1| (1 + |v|^2) \mu(v) dv \\ &\leq C \int_{|v| \geq N} (1 + |v|^2) \mu(v) dv + \frac{C[1 + (Nt)^3]}{t^3} \int_{\mathbb{T}^3} |\rho_0(y) - 1| dy, \end{aligned}$$

因此,

$$\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|^2) |F_0(x - vt, v) - \mu(v)| dv \leq c(N) + C(t_1^{-3} + N^3) \|\rho_0 - 1\|_{L_x^1},$$

其中当 $N \rightarrow \infty$ 时有 $c(N) \rightarrow 0$. 注意到 $t_1 > 0$ 仅依赖于 ρ_0 的上界. 因此, 基于以上估计, 当 $\|\rho_0 \ln \rho_0 - \rho_0 + 1\|_{L_x^1} + \|\rho_0 - 1\|_{L_x^1}$ 足够小时, 定理 1.1 中 (1.5) 的小性假设是可以满足的. 这种情形下, 易知初始值允许有大的震荡. 事实上, (1.5) 应该包含更一般的较大震荡的初始数据.

本文余下的内容安排如下: 第 2 节给出一些基本引理; 第 3 和 4 节分别给出局部 L^∞ 估计和整体 L^∞ 估计, 于是定理 1.1 用文献 [11] 方法可以很快得证.

记号 在本文中, C 代表正常数, 它在不同的地方可以发生变化. $\|\cdot\|_{L^2}$ 为标准的 $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_v^3)$ -范数, $\|\cdot\|_{L^\infty}$ 为 $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_v^3)$ -范数.

2 预备知识

在以下引理中, 为了给出 $F(t, x, v)$ 的速度加权 L^∞ 范数的下界, 我们需要用到一些有用的不等式 (参见文献 [12]).

引理 2.1 令 $N_q(F) = \|(1 + |v|)^q F(t, x, v)\|_{L_{x,v}^\infty}$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{T^{\frac{3}{2}}} &\leq C N_0(F), \\ \rho(T + |u|^2)^{\frac{q-3}{2}} &\leq C_q N_q(F), \quad q > 5 \quad \text{或} \quad 0 \leq q < 3, \\ \frac{\rho|u|^q}{((T + |u|^2)T)^{\frac{3}{2}}} &\leq C_q N_q(F), \quad q > 1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

成立, 其中 C 和 C_q 为与 F 无关的常数.

下面引理给出了温度张量函数 $\mathcal{T}_\nu$ 与温度标量函数 T 的关系, 其证明可参见文献 [8].

引理 2.2 令 $-1/2 < \nu < 1$, 定义

$$C_{\nu 1} \triangleq \min\{1 - \nu, 1 + 2\nu\}, \quad C_{\nu 2} \triangleq \max\{1 - \nu, 1 + 2\nu\}.$$

如果密度函数 $\rho(t, x) > 0$, 则有 $C_{\nu 1} T(t, x) \text{Id} \leq \mathcal{T}_\nu \leq C_{\nu 2} T(t, x) \text{Id}$ 成立.

由引理 2.2 可以得出以下推论.

推论 2.3 假设 $0 < T(t, x) < \infty$, 则有

$$C_{\nu 2}^{-1} T^{-1}(t, x) \text{Id} \leq \mathcal{T}_\nu^{-1} \leq C_{\nu 1}^{-1} T^{-1}(t, x) \text{Id}, \quad C_{\nu 1}^3 T^3(t, x) \leq \det \mathcal{T}_\nu \leq C_{\nu 2}^3 T^3(t, x)$$

成立.

为后文所需, 我们仍需以下命题, 其证明方法可参见文献 [10, 11].

命题 2.4 若 $F(t, x, v)$ 为 (1.1) 和 (1.3) 的解, 则有

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|F(t, x, v) - \mu(v)|^2}{4\mu(v)} I_{\{|F(t, x, v) - \mu(v)| \leq \mu(v)\}} dv dx \\ &+ \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4} |F(t, x, v) - \mu(v)| I_{\{|F(t, x, v) - \mu(v)| \geq \mu(v)\}} dv dx \\ &\leq \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} (F_0 \ln F_0 - \mu \ln \mu) dv dx + \left[\frac{3}{2} \ln(2\pi) - 1 \right] M_0 + \frac{1}{2} E_0 = \mathcal{E}(F_0). \end{aligned}$$

3 局部估计

ES-BGK 模型方程 (1.1) 的温和形式可以写成

$$\begin{aligned} F(t, x, v) &= F_0(x - vt, v) e^{-\int_0^t A_\nu(\tau, x - v(t - \tau)) d\tau} \\ &+ \int_0^t e^{-\int_s^t A_\nu(\tau, x - v(t - \tau)) d\tau} A_\nu(s, x - v(t - s)) M_\nu(s, x - v(t - s), v) ds. \end{aligned} \quad (3.1)$$

基于此温和公式, 当初始数据可能有大的震荡时仍可以在很小的时间段内得出解的速度加权 L^∞ 范数的先验估计.

引理 3.1 令 $\beta > 5$ 且 $w(v) = (1 + |v|)^\beta$, $t_1 \triangleq (4C_\beta(\nu)\|wF_0\|_{L^\infty})^{-1} > 0$, 则对任意的 $t \in [0, t_1]$, 有

$$\|wF(t)\|_{L^\infty} \leq 2\|wF_0\|_{L^\infty},$$

其中 $C_\beta(\nu)$ 为仅依赖 β 和 ν 的可以具体计算的常数.

证明 由 (3.1) 可知,

$$|w(v)F(t, x, v)| \leq \|w(v)F_0(v)\|_{L^\infty} + \int_0^t A_\nu(s, x - v(t-s)) \cdot w(v)M_\nu(s, x - v(t-s), v)ds. \quad (3.2)$$

为了估计 (3.2) 中最后一个积分项, 首先, 注意到

$$\begin{aligned} A_\nu(s, x - v(t-s)) &= \frac{1}{1-\nu}(\rho T)(s, x - v(t-s)) \\ &\leq \frac{1}{3(1-\nu)}\left(3\rho T + \frac{1}{2}|u|^2\right)(s, x - v(t-s)) \\ &\leq \frac{1}{3(1-\nu)} \int_{\mathbb{R}^3} |\eta|^2 F(s, x - v(t-s), \eta) d\eta \\ &\leq C_\beta(\nu) \sup_{y, \eta} (1 + |\eta|)^\beta F(s, y, \eta), \end{aligned} \quad (3.3)$$

由于 $\beta > 5$, $C_\beta(\nu)$ 为仅依赖 β 和 ν 的一般常数, 它的值在每一行可能会发生改变. 进一步, 由引理 2.1 和推论 2.3 可得

$$M_\nu(s, y, v) \leq C(\nu) \frac{\rho}{T^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{|v-u|^2}{C(\nu)T}\right) \leq C(\nu) \frac{\rho}{T^{\frac{3}{2}}} \leq C(\nu)\|F(s)\|_{L^\infty} \quad (3.4)$$

和

$$\begin{aligned} |v|^\beta M_\nu(s, y, v) &\leq C_\beta |u|^\beta M_\nu(s, y, v) + C_\beta |v-u|^\beta M_\nu(s, y, v) \\ &\leq C_\beta(\nu) \frac{\rho}{T^{\frac{3}{2}}} |u|^\beta + C_\beta(\nu) \rho T^{\frac{\beta-3}{2}} \\ &\leq C_\beta(\nu) \|(1 + |v|)^\beta F(s)\|_{L^\infty}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

结合 (3.4) 和 (3.5), 可得

$$|w(v)M_\nu(s, y, v)| \leq C_\beta(\nu)\|wF(s)\|_{L^\infty}. \quad (3.6)$$

则当 $y = x - v(t-s)$ 时, 由 (3.3) 和 (3.6) 可知,

$$|A_\nu(s, y) \cdot w(v)M_\nu(s, y, v)| \leq C_\beta(\nu)\|wF(s)\|_{L^\infty}^2. \quad (3.7)$$

将 (3.7) 代入 (3.2), 对任意的 $t \geq 0$, 有

$$\|wF(t)\|_{L^\infty} \leq \|wF_0\|_{L^\infty} + C_\beta(\nu) \int_0^t \|wF(s)\|_{L^\infty}^2 ds.$$

取 $t_1 = (4C_\beta(\nu)\|wF_0\|_{L^\infty})^{-1} > 0$, 我们容易由连续性方法得到

$$\sup_{0 \leq t \leq t_1} \|wF(t)\|_{L^\infty} \leq 2\|wF_0\|_{L^\infty}.$$

故引理 3.1 证毕. □

作为引理 3.1 的一个结论, 可进一步得到后文证明所需的宏观变量的有界性.

引理 3.2 令 $\beta > 5$ 且 $w(v) = (1 + |v|)^\beta$. 假设存在常数 $C_0 > 0$ 使得 $F_0(x, v) \geq 0$ 且对任意的 $t \geq 0$ 和 $x \in \Omega$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^3} F_0(x - vt, v) dv \geq C_0,$$

则对任意的 $0 \leq t \leq t_1$ 和 $x \in \Omega$, 有

$$C_1^{-1} \leq \rho(t, x), \quad T(t, x) \leq C_1, \quad |u(t, x)| \leq C_1, \quad (3.8)$$

其中 $t_1 > 0$ 为引理 3.1 中给定的数, $C_1 \geq 1$ 为仅依赖 C_0 、 ν 、 β 和 $\|wF_0\|_{L^\infty}$ 的可以具体计算的常数.

证明 首先, 注意到引理 3.1 中当 $0 \leq t \leq t_1$ 和 $x \in \Omega$ 时, 有

$$\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} F(t, x, v) dv \leq C\|wF(t)\|_{L^\infty} \leq C\|wF_0\|_{L^\infty}, \quad (3.9)$$

$$|(\rho u)(t, x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} vF(t, x, v) dv \right| \leq C\|wF(t)\|_{L^\infty} \leq C\|wF_0\|_{L^\infty}, \quad (3.10)$$

$$(\rho|u|^2 + 3\rho T)(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 F(t, x, v) dv \leq C\|wF(t)\|_{L^\infty} \leq C\|wF_0\|_{L^\infty}, \quad (3.11)$$

其中 $\beta > 5$. 对于密度 $\rho(t, x)$ 的下界, 结合 (3.1) 和 (3.11) 可得

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^3} F(t, x, v) dv \geq \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\int_0^t A_\nu(\tau, x - v(t-\tau)) d\tau} F_0(x - vt, v) dv \\ &\geq \exp\left(-\int_0^t \frac{\|(\rho T)(s)\|_{L^\infty}}{1-\nu} ds\right) \int_{\mathbb{R}^3} F_0(x - vt, v) dv \\ &\geq C_0 \exp\left(-\int_0^t \frac{\|wF_0\|_{L^\infty}}{C(1-\nu)} ds\right) \geq C_0 \exp\left(-\frac{t_1\|wF_0\|_{L^\infty}}{C(1-\nu)}\right) \\ &= C_0 \exp\left(-\frac{1}{4CC_\beta(\nu)(1-\nu)}\right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

进一步, 由 (2.1) 和 (3.9)–(3.12) 可得

$$T(t, x) + |u(t, x)| \leq C\|wF_0\|_{L^\infty} C_0^{-1} \exp\left(\frac{1}{4CC_\beta(\nu)(1-\nu)}\right)$$

和

$$T(t, x) \geq \left(\frac{\rho(t, x)}{C\|wF_0\|_{L^\infty}}\right)^{\frac{2}{3}} \geq \left(\frac{C_0}{C\|wF_0\|_{L^\infty}} \exp\left(-\frac{1}{4CC_\beta(\nu)(1-\nu)}\right)\right)^{\frac{2}{3}}.$$

因此, 通过定义

$$\begin{aligned} C_1 \triangleq \max &\left\{ C\|wF_0\|_{L^\infty}, \left(\frac{C_0}{C\|wF_0\|_{L^\infty}} \exp\left(-\frac{1}{4CC_\beta(\nu)(1-\nu)}\right)\right)^{-\frac{2}{3}}, \right. \\ &\left. C_0^{-1} \exp\left(\frac{1}{4CC_\beta(\nu)(1-\nu)}\right), C\|wF_0\|_{L^\infty} C_0^{-1} \exp\left(\frac{1}{4CC_\beta(\nu)(1-\nu)}\right) \right\}, \end{aligned}$$

可得 (3.8) 中的估计. 故引理 3.2 证毕. $\square$

4 整体估计

本节考虑基于以下先验假设下的 Cauchy 问题 (1.1) 和 (1.3) 的解 $F(t, x, v)$ 的全局估计, 即对任意 $t \geq t_1$ 和 $x \in \Omega$, 有

$$(2C_1)^{-1} \leq \rho(t, x), \quad T(t, x) \leq 2C_1, \quad |u(t, x)| \leq 2C_1, \quad (4.1)$$

其中 $t_1 > 0$ 和 $C_1 > 0$ 分别为引理 3.1 和 3.2 中给定的数. 首先, 我们可以得到引理 4.1.

引理 4.1 令 $\beta > 5$ 且 $w(v) = (1 + |v|)^\beta$. 基于假设 (4.1), 当 $t \geq 0$ 时, 有

$$\|wF(t)\|_{L^\infty} \leq \|wF_0\|_{L^\infty} + C(\nu)C_1^{\frac{13}{2}}, \quad (4.2)$$

其中 $C(\nu) > 0$ 为仅依赖 ν 的常数.

证明 由 (2.1)、(3.4) 和 (4.1) 可知,

$$\begin{aligned} |wF(t, x, v)| &\leq \|wF_0\|_{L^\infty} + \int_0^t e^{-\frac{t-s}{4C_1^2(1-\nu)}} \frac{4C_1^2}{1-\nu} M_\nu(s, x-v(t-s), v) ds \\ &\leq \|wF_0\|_{L^\infty} + C(\nu) \int_0^t \frac{4C_1^2}{1-\nu} e^{-\frac{t-s}{4C_1^2(1-\nu)}} \frac{\rho}{T^{\frac{3}{2}}} ds \\ &\leq \|wF_0\|_{L^\infty} + C(\nu)C_1^{\frac{9}{2}} \int_0^t \frac{1}{1-\nu} e^{-\frac{t-s}{4C_1^2(1-\nu)}} ds \\ &\leq \|wF_0\|_{L^\infty} + C(\nu)C_1^{\frac{13}{2}}, \end{aligned}$$

因此可得 (4.2). 故引理 4.1 证毕. $\square$

为了封闭先验假设 (4.1), 我们需要以下的引理, 其证明基于温和形式 (3.1) 的改写:

$$\begin{aligned} F(t, x, v) - \mu &= [F_0(x-vt, v) - \mu] e^{-\int_0^t A_\nu(\tau, x-v(t-\tau)) d\tau} \\ &\quad + \int_0^t e^{-\int_s^t A_\nu(\tau, x-v(t-\tau)) d\tau} A_\nu(s, x-v(t-s)) [M_\nu(s, x-v(t-s), v) - \mu] ds. \end{aligned} \quad (4.3)$$

引理 4.2 令 $\beta > 7$ 且 $w(v) = (1 + |v|)^\beta$. 当任意 $t \geq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \Omega} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (1, v, |v|^2, v \otimes v) [F(t, x, v) - \mu(v)] dv \right| \\ \leq e^{-\frac{t}{1-\nu}} \sup_{x \in \Omega} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (1, v, |v|^2, v \otimes v) [F_0(x-vt, v) - \mu(v)] dv \right| + C \{ \sqrt{\mathcal{E}(F_0)} + \mathcal{E}(F_0)^{\frac{\beta-5}{2\beta-7}} \}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中 $C \geq 1$ 为仅依赖 C_0 、 ν 、 β 和 $\|wF_0\|_{L^\infty}$ 的常数.

证明 事实上, 由 (4.3) 可知, 当 $y := x - v(t-s)$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} [F(t, x, v) - \mu(v)] dv \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^3} [F_0(x-vt, v) - \mu(v)] \cdot \exp \left(- \int_0^t A_\nu(\tau, y) d\tau \right) dv \right| \\ &\quad + \int_0^t e^{-\frac{t-s}{4C_1^2(1-\nu)}} \frac{4C_1^2}{1-\nu} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|^2) |M_\nu(F)(s, y, v) - \mu(v)| dv ds. \end{aligned} \quad (4.5)$$

注意到

$$[F_0(x-vt, v) - \mu(v)] \cdot \exp \left(- \int_0^t A_\nu(\tau, y) d\tau \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= [F_0(x - vt, v) - \mu(v)] \cdot \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{1-\nu} d\tau\right) \\
 &\quad + [F_0(x - vt, v) - \mu(v)] \cdot \left\{ \exp\left(-\int_0^t A_\nu(\tau, y) d\tau\right) - \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{1-\nu} d\tau\right) \right\}.
 \end{aligned}$$

这蕴含了

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_{\mathbb{R}^3} [F_0(x - vt, v) - \mu(v)] \cdot \exp\left(-\int_0^t A_\nu(\tau, y) d\tau\right) dv \right| \\
 &\leq e^{-\frac{t}{1-\nu}} \left| \int_{\mathbb{R}^3} [F_0(x - vt, v) - \mu(v)] dv \right| \\
 &\quad + \frac{C}{1-\nu} e^{-\frac{t}{4C_1^2(1-\nu)}} (1 + \|wF_0\|_{L^\infty}) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} w(v)^{-1} |(\rho T)(\tau, y) - 1| dv d\tau \\
 &\leq e^{-\frac{t}{1-\nu}} \left| \int_{\mathbb{R}^3} [F_0(x - vt, v) - \mu(v)] dv \right| \\
 &\quad + \frac{C}{1-\nu} e^{-\frac{t}{4C_1^2(1-\nu)}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} w(v)^{-1} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (1, \eta, |\eta|^2) [F(s, y, \eta) - \mu(\eta)] d\eta \right| dv ds. \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

进一步计算可得

$$\begin{aligned}
 |M_\nu(s, y, v) - \mu| &\leq C(|\rho(s, y) - 1| + |u(s, y)| + |\mathcal{T}_\nu(s, y) - \text{Id}|) e^{-\frac{|v|^2}{C}} \\
 &\leq C(|\rho(s, y) - 1| + |(\rho u)(s, y)| + |\rho \mathcal{T}_\nu(s, y) - \text{Id}|) e^{-\frac{|v|^2}{C}}. \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

由 (1.2), 我们有

$$\begin{aligned}
 \rho \mathcal{T}_\nu &= (1 - \nu) \rho T \text{Id} + \nu \rho \Theta \\
 &= \frac{1-\nu}{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\eta - u|^2 [F(s, y, \eta) - \mu] d\eta + \nu \int_{\mathbb{R}^3} (\eta - u) \otimes (\eta - u) [F(s, y, \eta) - \mu] d\eta \\
 &\quad + \frac{1-\nu}{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\eta - u|^2 \mu d\eta + \nu \int_{\mathbb{R}^3} (\eta - u) \otimes (\eta - u) \mu d\eta \\
 &= \frac{1-\nu}{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\eta - u|^2 [F(s, y, \eta) - \mu] d\eta + \nu \int_{\mathbb{R}^3} (\eta - u) \otimes (\eta - u) [F(s, y, \eta) - \mu] d\eta \\
 &\quad + \text{Id} + \frac{1-\nu}{3} |u|^2 \text{Id} + \nu u \otimes u, \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

其中 $u = u(s, y)$. 利用 (4.8), 从 (4.7) 可得

$$\begin{aligned}
 |M_\nu(F)(s, y, v) - \mu| &\leq C(|\rho(s, y) - 1| + |(\rho u)(s, y)|) \cdot e^{-\frac{|v|^2}{C}} \\
 &\quad + C e^{-\frac{|v|^2}{C}} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (1, \eta, |\eta|^2, \eta \otimes \eta) \{F(s, y, \eta) - \mu\} d\eta \right| \\
 &\leq C e^{-\frac{|v|^2}{C}} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (1, \eta, |\eta|^2, \eta \otimes \eta) [F(s, y, \eta) - \mu] d\eta \right|,
 \end{aligned}$$

上式结合 (4.5) 和 (4.6), 可推导出

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\mathbb{R}^3} [F(t, x, v) - \mu(v)] dv \right| &\leq C \int_0^t e^{-\frac{t-s}{4C_1^2(1-\nu)}} \frac{4C_1^2}{1-\nu} \int_{\mathbb{R}^3} w(v)^{-1} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (1, \eta, |\eta|^2, \eta \otimes \eta) [F(s, y, \eta) \right. \\
 &\quad \left. - \mu(\eta)] d\eta \right| dv d\tau + e^{-\frac{t}{1-\nu}} \left| \int_{\mathbb{R}^3} [F_0(x - vt, v) - \mu(v)] dv \right|.
 \end{aligned}$$

同理可知,

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\mathbb{R}^3} (1, v, |v|^2, v \otimes v) [F(t, x, v) - \mu(v)] dv \right| \\
 & \leq \int_0^t C e^{-\frac{t-s}{4C_1^2(1-\nu)}} \frac{4C_1^2}{1-\nu} \int_{\mathbb{R}^3} w(v)^{-1} |v|^2 \left| \int_{\mathbb{R}^3} (1, \eta, |\eta|^2, \eta \otimes \eta) [F(s, y, \eta) - \mu] d\eta \right| dv d\tau \\
 & \quad + e^{-\frac{t}{1-\nu}} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (1, v, |v|^2, v \otimes v) [F_0(x - vt, v) - \mu(v)] dv \right| \\
 & =: e^{-\frac{t}{1-\nu}} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (1, v, |v|^2, v \otimes v) [F_0(x - vt, v) - \mu(v)] dv \right| + \int_{t-\lambda}^t (\cdots) d\tau + \int_0^{t-\lambda} (\cdots) d\tau, \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

其中 $\lambda > 0$ 为后文我们将取的一个很小的常数. 我们还需要继续估计 (4.9) 中右边的第二和三项, 关于第二项, 我们有

$$\int_{t-\lambda}^t (\cdots) ds \leq C\lambda \sup_{y \in \mathbb{R}^3, t-\lambda \leq s \leq t} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (1, \eta, |\eta|^2, \eta \otimes \eta) [F(s, y, \eta) - \mu] d\eta \right|. \quad (4.10)$$

我们现在估计 (4.9) 中右边的第三项. 当 $\Omega = \mathbb{R}^3$ 时, 我们将积分项分为两部分:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^3} w(v)^{-1} |v|^2 \left| \int_{\mathbb{R}^3} (1, \eta, |\eta|^2, \eta \otimes \eta) [F(s, y, \eta) - \mu] d\eta \right| dv \\
 & \leq \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|)^{-\beta+2} (1 + |\eta|^2) |[F(s, y, \eta) - \mu]| \cdot I_{\{|F(s, y, v) - \mu| \leq \mu\}} d\eta dv \\
 & \quad + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|)^{-\beta+2} (1 + |\eta|^2) |[F(s, y, \eta) - \mu]| \cdot I_{\{|F(s, y, v) - \mu| \geq \mu\}} d\eta dv \\
 & =: J_1 + J_2. \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

对于 (4.11) 右边的项, 当 $\beta > 7$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 J_1 & \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|)^{-2\beta+4} e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} (1 + |\eta|^2)^2 d\eta dv \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|[F(s, y, \eta) - \mu]|^2}{\mu(\eta)} I_{\{|F(s, y, v) - \mu| \leq \mu\}} d\eta dv \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|[F(s, y, \eta) - \mu]|^2}{\mu(\eta)} I_{\{|F(s, y, v) - \mu| \leq \mu\}} d\eta dv \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq \frac{C}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|[F(s, y, \eta) - \mu]|^2}{\mu(\eta)} I_{\{|F(s, y, v) - \mu| \leq \mu\}} d\eta dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq \frac{C}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\mathcal{E}(F_0)} \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
 J_2 & \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|)^{-2\beta+4} (1 + |\eta|)^{4-\beta} [1 + \|w(\eta)F(s, y, \eta)\|_{L^\infty}] d\eta dv \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |[F(s, y, \eta) - \mu]| I_{\{|F(s, y, v) - \mu| \geq \mu\}} d\eta dv \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq C [1 + \|wF(s)\|_{L^\infty}]^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |[F(s, y, \eta) - \mu]| I_{\{|F(s, y, v) - \mu| \geq \mu\}} d\eta dv \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{C}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} [1 + \|wF(s)\|_{L^\infty}]^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |F(s, y, \eta) - \mu| I_{\{|F(s, y, v) - \mu| \geq \mu\}} d\eta dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \frac{C}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} [1 + \|wF(s)\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}] \sqrt{\mathcal{E}(F_0)} \leq \frac{C}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\mathcal{E}(F_0)},
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

这里作了变量替换 $v \rightarrow y = x - v(t-s)$, 在 (4.12) 和 (4.13) 中利用了 (4.2) 和命题 2.4. 则当 $\Omega = \mathbb{R}^3$ 时, 由 (4.11)–(4.13) 可知,

$$\int_{\mathbb{R}^3} w(v)^{-1} |v|^2 \left| \int_{\mathbb{R}^3} (1, \eta, |\eta|^2, \eta \otimes \eta) [F(s, y, \eta) - \mu] d\eta \right| dv \leq \frac{C \sqrt{\mathcal{E}(F_0)}}{(t-s)^{\frac{3}{2}}}. \tag{4.14}$$

当 $\Omega = \mathbb{T}^3$ 时, 我们将积分项分为三部分:

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbb{R}^3} w(v)^{-1} |v|^2 \left| \int_{\mathbb{R}^3} (1, \eta, |\eta|^2, \eta \otimes \eta) [F(s, x - v(t-s), \eta) - \mu(\eta)] d\eta \right| dv \\
 &\leq \int_{|v| \geq N} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|)^{-\beta+2} (1 + |\eta|^2) |F(s, y, \eta) - \mu| d\eta dv \\
 &\quad + \int_{|v| \leq N} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|)^{-\beta+2} (1 + |\eta|^2) |F(s, y, \eta) - \mu| \cdot I_{\{|F(s, y, v) - \mu| \leq \mu\}} d\eta dv \\
 &\quad + \int_{|v| \leq N} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|)^{-\beta+2} (1 + |\eta|^2) |F(s, y, \eta) - \mu| \cdot I_{\{|F(s, y, v) - \mu| \geq \mu\}} d\eta dv \\
 &=: J_3 + J_4 + J_5,
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

其中 $N > 0$ 为后文即将取的一个足够大的数. 对于 (4.15) 右边的项, 我们有

$$\begin{aligned}
 J_3 &\leq \int_{|v| \geq N} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|)^{-\beta+2} (1 + |\eta|)^{-\beta+2} (1 + \|w(\eta)F(s, y, \eta)\|_{L^\infty}) d\eta dv \\
 &\leq C \sup_{0 \leq s \leq t} (1 + \|w(\eta)F(s, y, \eta)\|_{L^\infty}) \int_{|v| \geq N} (1 + |v|)^{-\beta+2} dv \\
 &\leq C \int_{|v| \geq N} (1 + |v|)^{-\beta+2} dv \leq CN^{-\beta+5},
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
 J_4 &\leq C \left(\int_{|v| \leq N} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|F(s, y, \eta) - \mu|^2}{\mu(\eta)} I_{\{|F(s, y, v) - \mu| \leq \mu\}} d\eta dv \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq CN^{\frac{3}{2}} \left(\int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|F(s, y, \eta) - \mu|^2}{\mu(\eta)} I_{\{|F(s, y, v) - \mu| \leq \mu\}} d\eta dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq CN^{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathcal{E}(F_0)}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

和

$$\begin{aligned}
 J_5 &\leq C [1 + \|wF(s)\|_{L^\infty}]^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|v| \leq N} \int_{\mathbb{R}^3} |F(s, y, \eta) - \mu| I_{\{|F(s, y, v) - \mu| \geq \mu\}} d\eta dv \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq CN^{\frac{3}{2}} \left(\int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |F(s, y, \eta) - \mu| I_{\{|F(s, y, v) - \mu| \geq \mu\}} d\eta dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq CN^{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathcal{E}(F_0)},
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

这里我们再一次作了变量替换 $v \rightarrow y = x - v(t-s)$, 在 (4.17) 和 (4.18) 中, 我们用了 (4.2) 和命题 2.4. 令 $N^{-\beta+5} = N^{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathcal{E}(F_0)}$, 结合 (4.15)–(4.18) 可知, 当 $\Omega = \mathbb{T}^3$ 时,

$$\int_{\mathbb{R}^3} w(v)^{-1} |v|^2 \left| \int_{\mathbb{R}^3} (1, \eta, |\eta|^2, \eta \otimes \eta) [F(s, y, \eta) - \mu(\eta)] d\eta \right| dv \leq C \mathcal{E}(F_0)^{\frac{\beta-5}{2\beta-7}}. \tag{4.19}$$

将 (4.10)、(4.14) 和 (4.19) 代入 (4.9), 有

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^3} (1, v, |v|^2, v \otimes v) [F(t, x, v) - \mu(v)] dv \right| \\ & \leq e^{-\frac{t}{1-\nu}} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (1, v, |v|^2, v \otimes v) [F_0(x - vt, v) - \mu(v)] dv \right| \\ & \quad + C\lambda \sup_{y \in \mathbb{R}^3, t-\lambda \leq s \leq t} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (1, \eta, |\eta|^2, \eta \otimes \eta) [F(s, y, \eta) - \mu] d\eta \right| \\ & \quad + C\lambda^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\mathcal{E}(F_0)} + C\mathcal{E}(F_0)^{\frac{\beta-5}{2\beta-7}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

取 $\lambda > 0$ 充分小, 使得 $C\lambda \leq \frac{1}{2}$, 则由 (4.20) 可得 (4.4). 故引理 4.2 证毕. $\square$

推论 4.3 存在常数 $\varepsilon_0 > 0$ 使得如果

$$\mathcal{E}(F_0) + \sup_{t \geq t_1, x \in \Omega} e^{-\frac{t}{1-\nu}} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (1, v, |v|^2, v \otimes v) [F_0(x - vt, v) - \mu(v)] dv \right| \leq \varepsilon_0,$$

则对任意 $t \geq t_1$ 和 $x \in \Omega$, 有 $C_1^{-1} \leq \rho(t, x)$, $T(t, x) \leq C_1$ 和 $|u(t, x)| \leq C_1$.

定理 1.1 的证明 由引理 3.1、3.2、4.1、4.2 和推论 4.3 可以很快得知定理成立, 具体细节可参见文献 [11]. $\square$

在本文的结尾, 关于解的稳定性, 我们给出一个注记. 为简单起见, 我们仅考虑环面情形: 当 $\Omega = \mathbb{T}^3$ 和 $(M_0, J_0, E_0) = (0, 0, 0)$ 时, 即初始值和标准化的全局 Maxwell μ 有相同的流体质量、动量和能量, 如文献 [13], 由 Csiszár-Kullback 不等式, 可以很直接验证对所有的 $t > 0$, 我们有

$$\|F(t) - \mu\|_{L^1_{x,v}} \leq \sqrt{2H(F(t) | \mu)} \leq \sqrt{2H(F_0 | \mu)} = \sqrt{2\mathcal{E}(F_0)} \leq \sqrt{2\varepsilon_0},$$

其中 $H(\cdot | \cdot)$ 为相对熵且被定义为

$$H(F | G) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{T}^3} F \log \frac{F}{G} dx dv.$$

因此, 在定理 1.1 的条件下及在 $L^1_{x,v}$ 的意义下, 解关于时间是稳定的. 此外, 进一步研究定理 1.1 中解的大时间行为, 即解的渐近稳定性, 也是很有意义的. 然而, 正如在无扰动框架下证明整体解的存在性一样, 用文献 [11] (也可参见文献 [9]) 中的方法似乎不可能证明在不增加速度权 $\mu^{-1/2}$ 的情形下, 当时间趋于无穷时差值 $F(t, x, v) - \mu$ 趋于 0 这一命题. 作为一种可能性, 我们期望未来能通过改进文献 [14] 中的方法解决这个问题.

参考文献

- 1 Andries P, Le Tallec P, Perlat J P, et al. The Gaussian-BGK model of Boltzmann equation with small Prandtl number. *Eur J Mech B Fluids*, 2000, 19: 813–830
- 2 Bhatnagar P L, Gross E P, Krook M K. A model for collision processes in gases, I: Small amplitude process in charged and neutral one-component systems. *Phys Rev*, 1954, 94: 511–525
- 3 Walender P. On the temperature jump in a rarefied gas. *Ark Fysik*, 1954, 7: 507–553
- 4 Holway L H. Kinetic theory of shock structure using an ellipsoidal distribution function. In: *Rarefied Gas Dynamics*, vol. 1. New York: Academic Press, 1966, 193–215
- 5 Andries P, Bourgat J F, Le Tallec P, et al. Numerical comparison between the Boltzmann and ES-BGK models for rarefied gases. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2002, 191: 3369–3390

- 6 Filbet F, Jin S. An asymptotic preserving scheme for the ES-BGK model of the Boltzmann equation. *J Sci Comput*, 2011, 46: 204–224
- 7 Galli M A, Torczynski R. Investigation of the ellipsoidal-statistical Bhatnagar-Gross-Krook kinetic model applied to gas-phase transport of heat and tangential momentum between parallel walls. *Phys Fluids*, 2011, 23: 147–154
- 8 Yun S B. Classical solutions for the ellipsoidal BGK model with fixed collision frequency. *J Differential Equations*, 2015, 259: 6009–6037
- 9 Yun S B. Ellipsoidal BGK model near a global Maxwellian. *SIAM J Math Anal*, 2015, 47: 2324–2354
- 10 Guo Y. Bounded solutions for the Boltzmann equation. *Quart Appl Math*, 2010, 68: 143–148
- 11 Duan R J, Huang F M, Wang Y, et al. Global well-posedness of the Boltzmann equation with large amplitude initial data. *ArXiv:1603.06037*, 2016
- 12 Perthame B, Pulvirenti M. Weithted L^∞ bounds and uniqueness for the Boltzmann BGK model. *Arch Ration Mech Anal*, 1993, 125: 289–295
- 13 Carrillo J A, Jüngel A, Markowich P A, et al. Entropy dissipation methods for degenerate parabolic problems and generalized Sobolev inequalities. *Monatsh Math*, 2001, 133: 1–82
- 14 Gualdani M P, Mischler S, Mouhot C. Factorization for non-symmetric operators and exponential H-theorem. *ArXiv:1006.5523*, 2010

Global existence for the ellipsoidal BGK model with initial large oscillations

DUAN RenJun, WANG Yong & YANG Tong

Abstract The ellipsoidal BGK model was introduced to fit the correct Prandtl number in the Navier-Stokes approximation of the classical BGK model. In this paper, we establish the global existence of mild solutions to the Cauchy problem on the model for a class of initial data allowed to have large oscillations. The proof is motivated by a recent study of the same topic on the Boltzmann equation.

Keywords ellipsoidal BGK model, global solution, large initial data

MSC(2010) 35Q20, 35B35, 35B45

doi: 10.1360/N012016-00150