广义树映射的吸引中心和 ω - 极限集空间

孙太祥, 曾凡平, 秦斌, 粟光旺*

广西财经学院信息与统计学院, 南宁 530003

E-mail: stxhql@gxu.edu.cn, z1963f@163.com, q3009b@163.com, slg6w3@163.com

收稿日期: 2017-07-27; 接受日期: 2017-12-15; 网络出版日期: 2018-05-14; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11761011)、广西自然科学基金 (批准号: 2016GXNSFAA380286 和 2016GXNSFBA380235)、广西高校中青年教师基础能力提升 (批准号: 2017KY0598) 和广西财经学院科学基金 (批准号: 2017QNA04) 资助项目

摘要 设 $\mathbf{D}$ 是广义树 (即具有有限个分支点的树突 (dendrite)), f 是 $\mathbf{D}$ 上的连续自映射. 用 $P(f)$ 、 $R(f)$ 、 $SA(f)$ 、 $\Gamma(f)$ 、 $UT(f)$ 、 $\omega(x, f)$ 和 $\Omega(f)$ 分别表示 f 的周期点集、回归点集、特殊 α - 极限点集、 γ - 极限点集、单侧 γ - 极限点集、 x 的 ω - 极限集和非游荡集. 对任意 $A \subset \mathbf{D}$, 记 $\omega(A) = \bigcup_{x \in A} \omega(x, f)$. 对任意的自然数 $n \geq 2$, 记 $\omega^n(f) = \omega(\omega^{n-1}(f))$, 其中 $\omega(f) = \bigcup_{x \in \mathbf{D}} \omega(x, f)$. 本文证明: 对任意的正整数 n , 有 $\omega^{n+2}(f) = \omega^2(f) = \omega(\Omega(f)) = \omega(SA(f)) = \omega(\Gamma(f)) = \omega(P(f) \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(UT(f)))) = \omega(\overline{P(f)}) = \omega(R(f) \cup UT(f)) = P(f) \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(UT(f))) \subset \overline{P(f)}$. 此外, 本文还构造了一个只有一个分支点的广义树 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{D}$ 上的一个连续自映射 f , 使得 $\{\omega(x, f) : x \in \mathbf{D}\}$ 在 Hausdorff 度量下不是闭的.

关键词 广义树映射 ω - 极限集 回归点 特殊 α - 极限点 γ - 极限点

MSC (2010) 主题分类 37E25, 37B40, 54H20

1 引言

本文分别用 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{N}^*$ 表示正整数集和非负整数集. 对任意度量空间 (X, d) 和 $Y \subset X$, 分别用 $\overline{Y}$ 和 $\#(Y)$ 表示 Y 在 X 上的闭包和 Y 的元素个数. 对任意 $z \in X$ 和 $\varepsilon > 0$, 记 $B(z, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, z) < \varepsilon\}$. 用 $C^0(X)$ 表示 X 上所有的连续自映射的集.

所谓树突 (dendrite), 就是一个局部连通的且紧致连通的不含简单封闭曲线的度量空间. 设 $(\mathbf{D}, d)$ 是一个非退化的树突, $x \in \mathbf{D}$ 称为 $\mathbf{D}$ 的一个端点, 如果 $\mathbf{D} - \{x\}$ 是连通的; $x \in \mathbf{D}$ 称为 $\mathbf{D}$ 的一个分支点, 如果 $\mathbf{D} - \{x\}$ 有 $k \geq 3$ 个连通分支. 用 $\text{En}(\mathbf{D})$ 和 $\text{Br}(\mathbf{D})$ 分别表示 $\mathbf{D}$ 的端点集和分支点集. 众所周知 (参见文献 [1]), 对任意 $x, y \in \mathbf{D}$ 且 $x \neq y$, 存在 $\mathbf{D}$ 上唯一的一条弧 (用 $[x, y]$ (或 $[x, y]_{\mathbf{D}}$) 记此唯一的一条弧), 使得 $\text{En}([x, y]) = \{x, y\}$, 这里一条弧指的是与 $[0, 1]$ 同胚的空间. 记 $[x, y] = (y, x) = [x, y] - \{y\}$, $(x, y) = [x, y] - \{x\}$. 此外, 也记 $[x, x] = \{x\}$. 若 $\text{En}(\mathbf{D}) = 2$ (或是一个有限集), 则称 $\mathbf{D}$ 是一个区间 (或是一个树). 若 $\text{Br}(\mathbf{D})$ 是一个有限集, 则称 $\mathbf{D}$ 是一个广义树. 易见区间是树, 树是广义树, 反之不然. 树突 (或区间, 或树, 或广义树) 上每个连续自映射称为树突 (或区间, 或树, 或广义树) 映射.

英文引用格式: Sun T X, Zeng F P, Qin B, et al. The attracting centre and space of ω -limit sets of a general tree map (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1131–1142, doi: 10.1360/N012017-00170

对任意 $f \in C^0(\mathbf{D})$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 记 $f^0(x) = x$ 和 $f^n = f \circ f^{n-1}$. 对 $f \in C^0(\mathbf{D})$ 和 $x \in \mathbf{D}$, 我们给出下列记号:

$$O(x, f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}^*\},$$

$$\Lambda(x, f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(x),$$

$$P(f) = \{x : \text{存在某个 } n \in \mathbb{N}, \text{ 使得 } f^n(x) = x\},$$

$$\omega(x, f) = \left\{y : \text{存在一列正整数 } n_1 < n_2 < \cdots, \text{ 使得 } \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y\right\},$$

$$R(f) = \{x : x \in \omega(x, f)\},$$

$$\text{SA}(x, f) = \left\{y : \text{存在一个点列 } x = x_0, x_1, x_2, \dots \in \mathbf{D}, \text{ 使得 } \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = y \text{ 和 } x_{k-1} \in \Lambda(x_k, f) \text{ (对任意 } k \in \mathbb{N})\right\},$$

$$\Gamma(x, f) = \left\{y : \text{存在一列点 } x_1, x_2, \dots \in \Lambda(x, f) \text{ 和一列正整数 } n_1 < n_2 < \cdots, \text{ 使得 } \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y\right\},$$

$$\text{U}\Gamma(x, f) = \left\{y : \text{存在 } \mathbf{D} - \{x\} \text{ 的一个连通分支 } L, \text{ 一列点 } x_1, x_2, \dots \in \Lambda(x, f) \cap L \text{ 和一列正整数 } n_1 < n_2 < \cdots, \text{ 使得 } f^{n_k}(x) \in L \text{ (对任意 } k \in \mathbb{N}) \text{ 和 } \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y\right\},$$

$$\Omega(f) = \left\{y : \text{存在一列点 } x_1, x_2, \dots \in \mathbf{D} \text{ 和一列正整数 } n_1 \leq n_2 \leq \cdots, \text{ 使得 } \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x_k) = y\right\}.$$

分别称 $P(f)$ 、 $R(f)$ 和 $\Omega(f)$ 为 f 的周期点集、回归点集和非游荡集. 称 $O(x, f)$ 、 $\Lambda(x, f)$ 、 $\omega(x, f)$ 、 $\text{SA}(x, f)$ 和 $\text{U}\Gamma(x, f)$ 分别为 x 在 f 下的轨道、逆轨道、 ω - 极限集、特殊 α - 极限点集和单侧 γ - 极限点集. 记

$$\begin{aligned} \omega(f) &= \bigcup_{x \in \mathbf{D}} \omega(x, f), & \Gamma(f) &= \bigcup_{x \in \mathbf{D}} \Gamma(x, f), \\ \text{SA}(f) &= \bigcup_{x \in \mathbf{D}} \text{SA}(x, f), & \text{U}\Gamma(f) &= \bigcup_{x \in \mathbf{D}} \text{U}\Gamma(x, f). \end{aligned}$$

对任意 $A \subset \mathbf{D}$, 记 $\omega(A) = \bigcup_{x \in A} \omega(x, f)$. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 记 $\omega^{n+1}(f) = \omega(\omega^n(f))$. 容易得到下列包含关系:

- (1) $P(f) \subset R(f) \subset \omega(f) \subset \Omega(f)$, $\text{AS}(f) \subset \Omega(f)$, $\text{U}\Gamma(f) \subset \Gamma(f) \subset \omega(f)$.
- (2) $f(P(f)) = P(f)$, $f(R(f)) = R(f)$, $f(\omega(f)) = \omega(f)$, $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$, $f(\text{SA}(f)) \subset \text{SA}(f)$, $f(\Gamma(f)) = \Gamma(f)$.

已有众多学者对区间映射进行了研究, 得到了诸多有意义的结果, 在此我们对部分结果归纳如下:

定理 A 设 I 是一个紧致区间, $f \in C^0(I)$, 则下列结论成立:

- (1) $\text{SA}(f) \subset \overline{R(f)}$;
- (2) $\text{SA}(f) = \text{U}\Gamma(f) \cup P(f)$;
- (3) 若 $x \in \text{SA}(f)$, 则 $x \in \text{SA}(x, f)$;

- (4) f 的每个负轨道的 α - 极限集都是 I 上某个点的 ω - 极限集;
- (5) $\overline{P(f)} = \overline{R(f)}$;
- (6) $\Omega(f|_{\Omega(f)}) = \overline{R(f)}$;
- (7) 若对某正整数 $n \geq 2$, 有 $x \in \Omega(f) - \Omega(f^n)$, 则 $x \in \text{EP}(f)$, 其中 $\text{EP}(f) = \{x \in I : \text{存在 } n, m \in \mathbb{N}, \text{使得 } f^{m+n}(x) = f^m(x)\}$;
- (8) $\Omega(f) \subset \overline{\text{EP}(f)}$;
- (9) $\omega(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(\Omega(f))$;
- (10) $x \in \Omega(f) \Leftrightarrow$ 存在一列点 $x_1, x_2, \dots \in \mathbf{D}$ 和一列正整数 $n_1 < n_2 < \dots$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = f^{n_k}(x_k) = x$;
- (11) $P(f)$ 的孤立点也是 $\Omega(f)$ 的孤立点;
- (12) 若 $x \in \omega(f) - \overline{P(f)}$, 则 $x \notin \text{EP}(f)$;
- (13) 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $\omega^{n+2}(f) = \omega^2(f)$;
- (14) $\omega(f)$ 是一个闭集;
- (15) $\{\omega(x, f) : x \in I\}$ 在 Hausdorff 度量下是闭的;
- (16) $v \in \omega(f) \Leftrightarrow v \in P(f)$, 或存在一个开弧 $L = (v, w)$, 使得每个开弧 $(v, c) \subset L$ 含某条轨线的两个点.

由文献 [2–9] 可知, 定理 A 对树映射也成立, 且除结论 (5) 外定理 A 的其余结论对图映射也成立. 是否可以将定理 A 的所有结论推广到广义树 (或树突) 映射上? 答案是否定的. 文献 [8, 10] 构造了 4 个广义树映射, 分别使定理 A 的结论 (1)–(4) 不成立. 文献 [11] 证明了, (1) 对广义树映射, 定理 A 的结论 (5) 成立; (2) 对广义树映射 f , $\Omega(f|_{\Omega(f)}) = \overline{R(f)}$, 且存在具有 2 个分支点的广义树和其上的一个映射 f , 使得 $\Omega(f|_{\Omega(f)}) \neq \overline{R(f)}$. 若将文献 [12] 的定理 2.1 中的线段 $\{(0, 0, y) : 0 \leq y \leq 1\}$ 和定理 2.2 中的线段 P_3B 分别粘合成一点, 可知定理 A 的结论 (7) 和 (8) 对广义树映射不成立. 若将文献 [13] 的命题 1 中的线段 $\{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\}$ 、命题 2 中的线段 BQ_1 、命题 3 中的线段 GO_1 分别粘合成一点, 易知定理 A 的结论 (9)–(11) 对广义树映射不成立. 在文献 [14] 中, 将定理 2 中的线段 OO_2 粘合成一点, 可知定理 A 的结论 (12) 对广义树映射不成立. 本文将证明: 对广义树映射, 定理 A 的结论 (13) 成立. 此外, 我们还构造了一个只有一个分支点的广义树 $\mathbf{D}$ 和其上的一个连续映射 f , 使得定理 A 的结论 (14)–(16) 不成立.

与树突映射的极小集和中心等动力性质研究相关的近期文章参见文献 [15–20], 与树突映射的回归性和可迁性等动力性质研究相关的近期文章参见文献 [21–23].

2 广义树映射的吸引中心

本节将证明下面的定理.

定理 2.1 设 $\mathbf{D}$ 是一个广义树, $f \in C^0(\mathbf{D})$, 则对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 有 $\omega^{n+2}(f) = \omega^2(f) = \omega(\Omega(f)) = \omega(\text{SA}(f)) = \omega(\overline{P(f)}) = \omega(R(f) \cup \text{UF}(f)) = \omega(\Gamma(f)) = \omega(P(f) \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\text{UF}(f)))) = P(f) \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\text{UF}(f))) \subset \overline{P(f)}$.

为证明定理 2.1, 我们需要下列引理.

引理 2.2 [24] 设 I 是一个紧致区间, $f \in C^0(I)$, 则 $R(f) \subset \text{SA}(f) = \text{UF}(f) \cup P(f)$.

引理 2.3 设 $\mathbf{D}$ 是一个广义树, $f \in C^0(\mathbf{D})$, 则 $R(f) - P(f) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\text{UF}(f))$.

证明 设 $x \in R(f) - P(f)$. 因为 $f(R(f) - P(f)) = R(f) - P(f)$, 所以可以选取一列点 $x_0 = x, x_1, x_2, \dots \in R(f) - P(f)$, 使得 $f(x_n) = x_{n-1}$ (对任意 $n \in \mathbb{N}$) 和 $x_i \neq x_j$ (对任意 $i \neq j$). 注意到 $\#(\text{Br}(\mathbf{D})) < \infty$, 故存在某个 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得 $y = x_N \notin \text{Br}(\mathbf{D})$. 选取 $\varepsilon > 0$, 使得下列结论成立:

- (1) $B(y, \varepsilon)$ 是连通的且 $B(y, \varepsilon) \cap \text{Br}(\mathbf{D}) = \emptyset$;
- (2) 存在一列正整数 $\mu_1 < \mu_2 < \dots$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\mu_n}(y) = y$;
- (3) 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $f^{\mu_n}(y) \in B(y, \varepsilon)$ 和 $f^{\mu_{n+1}}(y) \in (y, f^{\mu_n}(y))$.

为方便起见, 可设 $B(y, \varepsilon) \subset [0, 1]$ 且

$$0 < y < \dots < f^{\mu_n}(y) < \dots < f^{\mu_2}(y) < f^{\mu_1}(y) < \frac{2}{3}.$$

记 $K_i = \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{j\mu_i}([y, f^{\mu_i}(y)])$, 则 K_i 是 $\mathbf{D}$ 的连通子集, 且对任意 $i \in \mathbb{N}$, 有 $f^{\mu_i}(\overline{K_i}) \subset \overline{K_i}$.

若对某个 $i \in \mathbb{N}$, 有 $K_i \subset [0, 1]$, 则记 $g = f^{\mu_i}|_{\overline{K_i}}$. 注意到 $y \in R(f^{\mu_i})$, 则由引理 2.2 可知, $y \in R(g) \subset \text{UT}(g) \subset \text{UT}(f)$. 下设对任意 $i \in \mathbb{N}$, 都有 $K_i \not\subset I$.

若对无数个 $i \in \mathbb{N}$, 有 $K_i \supset [y, 1]$, 则选取 $K_{r_1} \supset [y, 1]$, 使得 $r_1 > 2$, 从而存在 $u_1 \in (y, f^{\mu_{r_1}}(y))$, 使得 $f^{\mu_1}(y) \in O(f(u_1), f)$. 选取 $K_{r_2} \supset [y, 1]$ 且满足 $f^{\mu_{r_2}}(y) < u_1$, 则存在 $u_2 \in (y, f^{\mu_{r_2}}(y))$, 使得 $u_1 \in O(f(u_2), f)$. 继续这个过程, 我们可以得到一个点列 $f^{\mu_1}(y) = u_0, u_1, u_2, \dots \in (y, f^{\mu_1}(y))$, 使得 $u_{i-1} \in O(f(u_i), f)$ (对每个 $i \in \mathbb{N}$) 且 $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = y$, 即 $y \in \text{UT}(f^{\mu_1}(y), f)$.

若存在某个 $\tau \in \mathbb{N}$, 使得 $K_i \not\supset [y, 1]$ (对任意 $i \geq \tau$), 则对任意 $i \geq \tau$, 存在 $y > e_i > 0$, 使得 $K_i - [y, f^{\mu_i}(y)] \supset [e_i, y]$. 从而对每个 $i \geq \tau$, 可以找到点 $u_i \in (y, f^{\mu_i}(y))$ 和 $\lambda_i \in \mathbb{N}$, 使得 $y = f^{\lambda_i \mu_i}(u_i)$, 这也可以得到 $y \in \text{UT}(y, f)$. 证毕. $\square$

引理 2.4 ^[24] 设 X 是一个紧致度量空间, $f \in C^0(X)$. 若 $y \in X$ 且 $x \in \text{SA}(y, f)$, 则 $\overline{O(x, f)} \in \text{SA}(y, f)$.

引理 2.5 设 $\mathbf{D}$ 是广义树, $f \in C^0(\mathbf{D})$, 则 $R(f) \subset \text{SA}(f)$.

证明 设 $x \in R(f)$. 因 $P(f) \subset \text{SA}(f)$, 故可假定 $x \notin P(f)$. 由于 $f(R(f) - P(f)) = R(f) - P(f)$, 我们可以选取一列点 $x_0 = x, x_1, x_2, \dots \in R(f) - P(f)$, 使得 $f(x_n) = x_{n-1}$ (对任意 $n \in \mathbb{N}$) 且 $x_i \neq x_j$ (对任意 $i \neq j$). 又因为 $\#(\text{Br}(\mathbf{D})) < \infty$, 所以存在某个 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得 $y = x_N \notin \text{Br}(\mathbf{D})$. 选取 $\varepsilon > 0$ 和 $\lambda > \mu > \gamma > N$, 使得 $B(y, \varepsilon)$ 是连通的, $B(y, \varepsilon) \cap \text{Br}(\mathbf{D}) = \emptyset$, $f^\lambda(y), f^\mu(y), f^\gamma(y) \in B(y, \varepsilon)$ 且 $f^\gamma(y) \in (f^\lambda(y), f^\mu(y))$. 为方便起见, 设 $B(y, \varepsilon) \subset [0, 1]$ 且 $0 < f^\lambda(y) < z = f^\gamma(y) < f^\mu(y) < 1$. 分以下 3 种情形讨论:

情形 1 存在两列正整数 $\max\{\lambda, \mu\} < n_1 < n_2 < \dots$ 和 $\max\{\lambda, \mu\} < m_1 < m_2 < \dots$, 使得

- (1) $f^\lambda(y) < f^{n_1}(z) < f^{n_2}(z) < \dots < z < \dots < f^{m_2}(z) < f^{m_1}(z) < f^\mu(y)$;
- (2) $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(z) = \lim_{i \rightarrow \infty} f^{m_i}(z) = z$.

记 $K_i = \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{jn_i}([f^{n_i}(z), z])$ 和 $J_i = \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{jm_i}([z, f^{m_i}(z)])$, 则 K_i 和 J_i 是 $\mathbf{D}$ 的连通子集且 $f^{n_i}(\overline{K_i}) \subset \overline{K_i}$ 和 $f^{m_i}(\overline{J_i}) \subset \overline{J_i}$ (对任意 $i \in \mathbb{N}$).

若对某个 $i \in \mathbb{N}$, 有 $K_i \subset [0, 1]$, 则记 $g = f^{n_i}|_{\overline{K_i}}$. 注意到 $z \in R(f^{n_i})$, 由引理 2.2 可知, $z \in R(g) \subset \text{SA}(g) \subset \text{SA}(f^{n_i}) \subset \text{SA}(f)$. 同理可证, 若对某个 $i \in \mathbb{N}$, 有 $J_i \subset I$, 则 $z \in \text{SA}(f)$. 下面假定对任意 $i \in \mathbb{N}$, 有 $K_i \not\subset [0, 1]$ 且 $J_i \not\subset [0, 1]$.

若对无限个 $i \in \mathbb{N}$, 有 $K_i \supset [f^\lambda(y), z]$, 则可选取 $K_{r_1} \supset [f^\lambda(y), z]$, 从而存在 $u_1 \in [f^{n_{r_1}}(z), z]$, 使得 $f^\lambda(y) \in O(f(u_1), f)$. 选取 $K_{r_2} \supset [f^\lambda(y), z]$ 满足 $u_1 < f^{n_{r_2}}(z)$, 则存在 $u_2 \in [f^{n_{r_2}}(z), z]$, 使得 $u_1 \in O(f(u_2), f)$. 继续这个过程, 我们可以得到一列点 $f^\lambda(y) = u_0, u_1, u_2, \dots \in [f^\lambda(y), z]$, 使得

$u_{i-1} \in O(f(u_i), f)$ (对任意 $i \in \mathbb{N}$) 且 $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = z$. 从而, $z \in \text{SA}(f^\lambda(y), f)$. 同理可证, 若对无限个 $i \in \mathbb{N}$, 有 $J_i \supset [z, f^\mu(y)]$, 则 $z \in \text{SA}(f^\mu(y), f)$.

若存在 $\tau \in \mathbb{N}$, 使得对任意的 $i \geq \tau$, 有 $K_i \not\supset [f^\lambda(y), z]$ 和 $J_i \not\supset [z, f^\mu(y)]$, 则 $K_i \supset [z, f^\mu(y)]$ 和 $J_i \supset [f^\lambda(y), z]$ (对任意的 $i \geq \tau$). 从而可以选取 $v_1 \in (z, f^{m_\tau}(z))$ 和 $u_1 \in [f^{n_\tau}(z), z)$, 使得 $f^\lambda(y) \in O(f(v_1), f)$ 和 $v_1 \in O(f(u_1), f)$, 因而可推出 $f^\lambda(y) \in O(f(u_1), f)$. 继续这个过程, 我们能够得到一系列点 $f^\lambda(y) = u_0, u_1, u_2, \dots \in [f^\lambda(y), z]$ 满足 $u_{i-1} \in O(f(u_i), f)$ (对任意 $i \in \mathbb{N}$) 且 $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = z$, 即 $z \in \text{SA}(f^\lambda(y), f)$.

情形 2 存在 $\delta > 0$ 和一系列正整数 $\max\{\lambda, \mu\} < n_1 < n_2 < \dots$, 使得

$$(3) f^\lambda(y) < f^{n_1}(z) < f^{n_2}(z) < \dots < z.$$

$$(4) \lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(z) = z \text{ 且 } (z, z + \delta] \cap O(z, f) = \emptyset.$$

记 $K_i = \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{jn_i}([f^{n_i}(z), z])$, 则 K_i 是 $\mathbf{D}$ 的连通子集且 $f^{n_i}(\overline{K_i}) \subset \overline{K_i}$ (对任意 $i \in \mathbb{N}$).

若对某个 $i \in \mathbb{N}$, 有 $K_i \subset [0, 1]$, 则记 $g = f^{n_i}|_{K_i}$. 由引理 2.2 可知, $z \in R(g) \subset \text{SA}(g) \subset \text{SA}(f^{n_i}) \subset \text{SA}(f)$. 下面假定对任意 $i \in \mathbb{N}$, 有 $K_i \not\subset [0, 1]$.

若对无限个 $i \in \mathbb{N}$, 有 $K_i \supset [f^\lambda(y), z]$, 则可以证明存在一系列点 $f^\lambda(y) = u_0, u_1, u_2, \dots \in [f^\lambda(y), z]$, 使得 $u_{i-1} \in O(f(u_i), f)$ (对任意 $i \in \mathbb{N}$) 且 $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = z$, 即 $z \in \text{SA}(f^\lambda(y), f)$.

若存在某个 $\tau \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $i \geq \tau$, 有 $K_i \not\supset [f^\lambda(y), z]$, 则 $K_i \supset [z, f^\mu(y)]$ (对任意 $i \geq \tau$). 设 $h = f^{\mu-\gamma}$, 则 $z \in R(f) = R(h)$ 且存在一系列正整数 $4 < m_1 < m_2 < \dots$ 满足

$$(5) f^\lambda(y) < h^{m_1}(z) < h^{m_2}(z) < \dots < z.$$

$$(6) \lim_{i \rightarrow \infty} h^{m_i}(z) = z.$$

记 $J = \bigcup_{j=0}^{\infty} h^j([z, f^\mu(y)])$, 则 J 是 $\mathbf{D}$ 的一个连通子集且 $h^{m_i}(z) \in J$ (对任意 $i \in \mathbb{N}$), 从而存在某个 $t \geq \tau$, 使得 $[f^{n_t}(z), z] \subset [h^{m_1}(z), z] \subset J$. 由 $K_t \supset [z, f^\mu(y)]$ 可知, 存在 $t_1 \in \mathbb{N}$ 和 $u_1 \in [f^{n_t}(z), z)$, 使得 $f^{t_1}(u_1) = f^\mu(y)$. 因而, $f^{t_1+(m_1-1)(\mu-\gamma)}(u_1) = h^{m_1}(z)$. 选取 $l > t$ 满足 $u_1 < f^{n_l}(z)$. 注意到 $[h^{m_1}(z), z] \subset J$ 和 $K_l \supset [z, f^\mu(y)]$, 我们可以找到 $v_1 \in (z, f^\mu(y))$ 和 $u_2 \in [f^{n_l}(z), z)$, 使得 $u_1 \in O(f(v_1), h)$ 和 $v_1 \in O(f(u_2), f)$, 从而可推出 $u_1 \in O(f(u_2), f)$. 继续这个过程, 可以证明存在一系列点 $u_0 = h^{m_1}(z) < u_1 < u_2 < \dots < z$, 使得 $u_{i-1} \in O(f(u_i), f)$ (对任意 $i \in \mathbb{N}$) 且 $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = z$, 即 $z \in \text{SA}(h^{m_1}(z), f)$.

情形 3 存在 $\delta > 0$ 和一系列正整数 $\max\{\lambda, \mu\} < n_1 < n_2 < \dots$ 满足

$$(7) z < f^{n_1}(z) < f^{n_2}(z) < \dots < f^\mu(y).$$

$$(8) \lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(z) = z \text{ 和 } [z - \delta, z) \cap O(z, f) = \emptyset.$$

类似于情形 2, 我们也能证明 $z \in \text{SA}(f)$.

因为 $z = f^\gamma(x_N) = f^{\gamma-N}(x)$, 所以 $x \in \omega(x, f) = \omega(z, f)$. 由引理 2.4 知 $x \in \text{SA}(f)$. 证毕. $\square$

引理 2.6 ^[11] 设 $\mathbf{D}$ 是广义树, $f \in C^0(\mathbf{D})$.

- (1) 若 $[x, y] \subset \mathbf{D} - \text{Br}(\mathbf{D})$, $x \notin [f(x), y]$ 且 $y \notin [x, f(y)]$, 则 $[x, y] \cap P(f) \neq \emptyset$;
- (2) 若 $[x, y] \subset \mathbf{D} - \text{Br}(\mathbf{D})$ 且存在 $m, n \in \mathbb{N}$, 使得 $f^m(x), f^n(y) \in [x, y]$, 则 $[x, y] \cap P(f) \neq \emptyset$;
- (3) 若 $(x, y) \subset \mathbf{D} - \text{Br}(\mathbf{D}) \cup \overline{P(f)}$ 且 $z \in (x, y) \cap \Omega(f)$, 则 $O(f(z), f) \cap (x, y) = \emptyset$;
- (4) $\overline{P(f)} = \overline{R(f)}$.

引理 2.7 设 $\mathbf{D}$ 是广义树, $f \in C^0(\mathbf{D})$, 则下列结论成立:

- (1) $\omega(\Omega(f)) \subset P(f) \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\text{UT}(f)))$;
- (2) $\omega(\Omega(f)) \subset \text{SA}(f)$;

(3) $\omega(\Omega(f)) \subset \overline{P(f)}$.

证明 设 $x \in \omega(\Omega(f))$, 由引理 2.3、2.5 和 2.6, 我们可以假定 $x \in \omega(\Omega(f)) - R(f)$, 则存在某个 $y \in \Omega(f)$, 使得 $x \in \omega(y, f)$. 因 $f(\omega(y, f)) = \omega(y, f)$, 故存在一列点 $x_0 = x, x_1, x_2, \dots \in \omega(y, f)$, 使得 $f(x_n) = x_{n-1}$ (对任意 $n \in \mathbb{N}$) 且 $x_i \neq x_j$ (对任意 $i \neq j$). 由 $\#(\text{Br}(\mathbf{D})) < \infty$ 可知, 存在某个 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得 $x_N \notin \text{Br}(\mathbf{D})$ 且 $x_N \notin R(f)$ (因 $f(R(f)) = R(f)$). 取 $\varepsilon > 0$, 使得下面结论成立:

(1) $B(x_N, \varepsilon)$ 是连通的且 $B(x_N, \varepsilon) \cap \text{Br}(\mathbf{D}) = \emptyset$.

(2) 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $f^n(x_N) \notin B(x_N, \varepsilon)$.

由 $x_N \in \omega(y, f)$ 和 $y \in \Omega(f)$ 知, 存在两列正整数 $\mu_1 < \mu_2 < \dots, \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ 和一列点 $a_1, a_2, \dots \in \mathbf{D}$ 满足

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\mu_n}(y) = x_N$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\lambda_n}(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = y$.

(4) 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $f^{\mu_n}(y) \in B(x_N, \varepsilon)$ 且 $f^{\mu_{n+1}}(y) \in (x_N, f^{\mu_n}(y))$.

为方便起见, 可设 $B(x_N, \varepsilon) \subset [0, 1]$ 且

$$0 < x_N < \dots < f^{\mu_n}(y) < \dots < f^{\mu_2}(y) < f^{\mu_1}(y) < 1,$$

则对任意 $n \geq 2$, 存在一个 a_i 满足 $\lambda_i + \mu_n - \mu_{n+2} > 0$, 使得

$$\frac{f^{\mu_{n+3}}(y) + f^{\mu_{n+2}}(y)}{2} < b_{n+2} = f^{\mu_{n+2}}(a_i) < \frac{f^{\mu_{n+2}}(y) + f^{\mu_{n+1}}(y)}{2}$$

和

$$\frac{f^{\mu_{n+1}}(y) + f^{\mu_n}(y)}{2} < c_n = f^{\lambda_i + \mu_n}(a_i) < \frac{f^{\mu_n}(y) + f^{\mu_{n-1}}(y)}{2}.$$

记 $s_n = \lambda_i + \mu_n - \mu_{n+2}$, 则有 $f^{s_n}(b_{n+2}) = c_n$. 因为 $b_{n+2} < f^{\mu_{n+1}}(y) < c_n < f^{\mu_{n-1}}(y)$, $f^{s_n}(b_{n+2}) = c_n$ 和 $f^{\mu_{n+1} - \mu_{n-1}}(f^{\mu_{n-1}}(y)) = f^{\mu_{n+1}}(y)$, 所以, 由引理 2.6 知, $[b_{n+2}, f^{\mu_{n-1}}(y)] \cap P(f) \neq \emptyset$, 这就推出 $x_N \in \overline{P(f)}$, 即 $x \in \overline{P(f)}$.

若存在 $n_1 < n_2 < \dots$, 使得 $f^{s_{n_i}}([x_N, b_{n_i+2}]) \supset [c_{n_i}, f^{\mu_1}(y)]$, 则选取 $u_1 \in (x_N, b_{n_1+2}]$, 使得 $f^{s_{n_1}}(u_1) = f^{\mu_1}(y)$. 通过取子列可以假定 $c_{n_2} < u_1$, 则可取 $u_2 \in (x_N, b_{n_2+2}]$ 满足 $f^{s_{n_2}}(u_2) = u_1$. 继续这个过程, 我们可以得到一列点 $f^{\mu_1}(y) = u_0 > u_1 > u_2 > \dots > x_N$ 和一列正整数 $l_1, l_2, \dots$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_N$ 且 $f^{l_n}(u_n) = u_{n-1}$ (对任意 $n \in \mathbb{N}$), 从而有 $x_N \in \text{UT}(f^{\mu_1}(y), f)$ 和 $x_N \in \text{SA}(f^{\mu_1}(y), f)$, 即 $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\text{UT}(f))$ 且从引理 2.4 推出 $x = f^N(x_N) \in \text{SA}(f)$.

如果存在某个 $M \in \mathbb{N}$, 使得 $f^{s_n}([x_N, b_{n+2}]) \supset [x_N, c_n]$ (对任意的 $n \geq M$), 不失一般性, 假设 $f^{s_n}([x_N, b_{n+2}]) \supset [x_N, c_n]$ (对任意的 $n \geq 2$), 则存在 $n_2 \geq 4$ 和 $u_2 \in [(f^{\mu_{n_2+1}}(y) + f^{\mu_{n_2}}(y))/2, (f^{\mu_{n_2}}(y) + f^{\mu_{n_2-1}}(y))/2]$ 满足 $f^{s_2}(u_2) = f^{\mu_3}(y)$. 因 $u_2 \in f^{s_{n_2-1}}([x_N, b_{n_2+1}])$, 故有 $n_3 \geq n_2+1$ 和 $u_3 \in [(f^{\mu_{n_3+1}}(y) + f^{\mu_{n_3}}(y))/2, (f^{\mu_{n_3}}(y) + f^{\mu_{n_3-1}}(y))/2]$, 使得 $f^{s_{n_2-1}}(u_3) = u_2$. 继续这个过程, 我们能得到一列点 $f^{\mu_3}(y) = u_1 > u_2 > u_3 > \dots > x_N$ 和一列正整数 $l_1, l_2, \dots$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_N$ 和 $f^{l_n}(u_n) = u_{n-1}$ (对任意 $n \geq 2$). 从而, $x_N \in \text{UT}(f^{\mu_3}(y), f)$ 且 $x_N \in \text{SA}(f^{\mu_3}(y), f)$, 这也可以推出 $x = f^N(x_N) \in \text{SA}(f)$ 和 $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\text{UT}(f))$. 证毕. $\square$

引理 2.8 设 $\mathbf{D}$ 是广义树, $f \in C^0(\mathbf{D})$, 则 $P(f) \cup \text{UT}(f) \subset \omega(R(f) \cup \text{UT}(f))$.

证明 若 $x \in R(f)$, 则 $x \in \omega(x, f) \subset \omega(R(f) \cup \text{UT}(f))$. 以下我们证明: 当 $x \in \text{UT}(f) - R(f)$ 时, $x \in \omega(R(f) \cup \text{UT}(f))$.

设 $x \in \text{UT}(f) - R(f)$, 则存在 $\mathbf{D} - \text{Br}(\mathbf{D})$ 的一个连通分支 I 、一列点 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset I$ 、两列正整数 $s_1 \leq s_2 \leq \dots$ 和 $t_1 < t_2 < \dots$ 满足下列条件:

- (1) $(x, a_0) \cap \text{Br}(\mathbf{D}) = \emptyset$ 且 $f^n(x) \notin (x, a_0)$ (对任意 $n \in \mathbb{N}$);
 (2) $f^{s_n}(a_n) = a_0, a_n \in (x, a_{n-1})$ (对任意 $n \in \mathbb{N}$) 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$;
 (3) $f^{t_n}(a_0) \in (x, a_0), f^{t_{n+1}}(a_0) \in (x, f^{t_n}(a_0))$ (对任意 $n \in \mathbb{N}$) 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{t_n}(a_0) = x$.

不失一般性, 设 $[x, a_0] \subset [0, 1]$ 和

$$x < \cdots < a_{2n+1} < a_{2n} < f^{t_{n+1}}(a_0) < \cdots < f^{t_3}(a_0) < a_3 < a_2 < f^{t_2}(a_0) < a_1 < f^{t_1}(a_0) < a_0.$$

由引理 2.6 可知, $[a_1, a_0] \cap P(f) \neq \emptyset$. 设 W_n 是 $\mathbf{D} - \Lambda(f^{t_2}(a_0), f)$ 包含 $f^{n+t_2}(a_0)$ 的连通分支, 则 $f^n(\overline{W_0}) \subset \overline{W_n}$.

断言 2.9 $\overline{W_0} \cap (\text{UF}(f) \cup R(f)) \neq \emptyset$.

证明 不失一般性, 假定 $\overline{W_0} \cap R(f) = \emptyset$, 则 $\overline{W_0} \subset [a_2, a_0]$ (因 $[a_1, a_0] \cap P(f) \neq \emptyset$). 记 $\overline{W_0} = [b, c]$, 则 $f^n([b, c]) \not\subset [b, c]$ (对任意 $n \in \mathbb{N}$).

我们断言 $b, c \notin \Lambda(f^{t_2}(a_0), f)$. 否则, 不失一般性, 假设存在某个 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $f^n(b) = f^{t_2}(a_0)$, 则由引理 2.6 可知 $z \in [b, f^n(z))$ (对任意 $z \in [b, c]$) 且 $c \notin \Lambda(f^{t_2}(a_0), f)$. 从而, $f^n([b, c]) \supset [c, f^n(c)] \cap \Lambda(f^{t_2}(a_0), f) \neq \emptyset$ 且存在 $u \in (b, c)$, 使得 $f^n(u) \in \Lambda(f^{t_2}(a_0), f)$, 这是矛盾的.

由 $b, c \notin \Lambda(f^{t_2}(a_0), f)$ 可知, 存在两列点 $u_1, u_2, \dots$ 和 $v_1, v_2, \dots \in [a_2, a_1]$, 以及两列正整数 $\mu_1, \mu_2, \dots$ 和 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ 满足:

$$(4) \ a_2 < u_1 < u_2 < \cdots < u_n < \cdots < b < c < \cdots < v_n < \cdots < v_2 < v_1 < a_1.$$

$$(5) \ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = b \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = c.$$

$$(6) \text{ 对任意 } n \in \mathbb{N}, \text{ 有 } f^{\mu_n}(u_n) = f^{\lambda_n}(v_n) = f^{t_2}(a_0).$$

因为 $[b, c] \cap (R(f) \cup \Lambda(f^{t_2}(a_0), f)) = \emptyset$, 所以可设 $f^n([b, c]) \cap [u_1, v_1] = \emptyset$ (对任意 $n \in \mathbb{N}$).

情形 1 存在一列正整数 $n_1 < n_2 < \cdots$, 使得 $f^{\mu_{n_k}}([u_{n_k}, b]) \supset [u_1, b]$ (对任意 $k \in \mathbb{N}$). 这时记

$$A_1 = [u_{n_1}, b]$$

且对 $s \geq 2$, 记

$$A_s = \{x \in A_{s-1} : f^{\mu_{n_1} + \cdots + \mu_{n_{s-1}}}(x) \in [u_{n_s}, b]\}.$$

从而对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $A_{n+1} \subset A_n$ 且 $A_n \neq \emptyset$, 这就推出 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$. 选取 $u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 则对任意 $k \in \mathbb{N}$, 有 $f^{\mu_{n_1} + \cdots + \mu_{n_k-1}}(u) \in [u_{n_k}, b]$ 且 $u \in f^{\mu_{n_k}}([u_{n_k}, b])$, 从上可知 $b \in \text{UF}(u, f)$.

情形 2 存在一列正整数 $n_1 < n_2 < \cdots$, 使得 $f^{\lambda_{n_k}}([c, v_{n_k}]) \supset [c, v_1]$ (对任意 $k \in \mathbb{N}$). 使用与情形 1 同样的方法可得, 对某个 $u \in [c, v_1]$, 有 $c \in \text{UF}(u, f)$.

情形 3 存在某个 $N \in \mathbb{N}$ 使得, 若 $n \geq N$ 时, $f^{\lambda_n}([c, v_n]) \supset [u_1, b]$ 且 $f^{\mu_n}([u_n, b]) \supset [c, v_1]$. 通过取子列可以假定 $f^{\lambda_n}([c, v_n]) \supset [u_1, b]$ 且 $f^{\mu_n}([u_n, b]) \supset [c, v_1]$ (对任意的 $n \in \mathbb{N}$). 从而, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 有 $f^{\lambda_n + \mu_n}([u_1, b]) \supset [u_1, b]$. 使用与情形 1 同样的方法可以得到, 对某个 $u \in [u_1, b]$, 有 $b \in \text{UF}(u, f)$. 断言 2.9 证毕. $\square$

由断言 2.9 知, 可取 $u \in \overline{W_0} \cap (\text{UF}(f) \cup R(f))$, 使得 $f^{t_{n+1}-t_2}(u) \in [a_{2n}, a_{2n-1}]$ (对任意 $n \geq 2$). 从而, $x \in \omega(u, f)$ 且 $f^n(x) \in \omega(u, f)$ (对任意 $n \in \mathbb{N}$), 这就推出 $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\text{UF}(f)) \subset \omega(R(f) \cup \text{UF}(f))$. $\square$

定理 2.1 的证明 由引理 2.3、2.7 和 2.8 可得

$$\omega\left(P(f) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\text{UF}(f))\right)\right) \subset \omega(\Gamma(f)) \subset \omega^2(f) \subset \omega(\Omega(f)) \subset P(f) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\text{UF}(f))\right)$$

$$\subset \omega(R(f) \cup \text{UT}(f)) \subset \omega\left(P(f) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\text{UT}(f))\right)\right).$$

这就推出

$$\begin{aligned} \omega\left(P(f) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\text{UT}(f))\right)\right) &= \omega(\Gamma(f)) = \omega^2(f) = \omega(\Omega(f)) = P(f) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\text{UT}(f))\right) \\ &= \omega(R(f) \cup \text{UT}(f)). \end{aligned}$$

因此, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $\omega^{n+2}(f) = \omega^2(f) = P(f) \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\text{UT}(f)))$. 再次由引理 2.7 可知,

$$\omega^2(f) = \omega^3(f) \subset \omega^2(\Omega(f)) \subset \omega(\text{SA}(f)) \subset \omega(\Omega(f)) = \omega^2(f)$$

且

$$\omega^2(f) = \omega^3(f) \subset \omega^2(\Omega(f)) \subset \omega(\overline{R(f)}) \subset \omega(\Omega(f)) = \omega^2(f).$$

从而, $\omega^{n+2}(f) = \omega^2(f) = \omega(\Omega(f)) = \omega(\text{SA}(f)) = \omega(\Gamma(f)) = \omega(P(f) \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\text{UT}(f)))) = \omega(\overline{P(f)}) = \omega(R(f) \cup \text{UT}(f)) = P(f) \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\text{UT}(f))) \subset \overline{P(f)}$. 证毕. $\square$

3 一个 ω - 极限集空间不闭的广义树映射

本节构造一个只有一个分支点的广义树 $\mathbf{D}$ 和一个映射 $f \in C^0(\mathbf{D})$, 使得定理 A 的结论 (14)–(16) 对 f 不成立.

例 3.1 在 $\mathbb{R}^2$ 上, 对任意 $k \in \mathbb{N}$, 设

$$\begin{aligned} L_k &= \left\{ \left(x, \frac{x}{k} \right) : 0 \leq x \leq \frac{1}{k} \right\}, \\ L'_k &= \left\{ \left(x, -\frac{x}{k} \right) : \frac{-1}{k} \leq x \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$

设 $L = \{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\}$, 则 $\mathbf{D} = L \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} L_k) \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} L'_k)$ 是一个只有一个分支点的广义树.

(1) 对任意 $k, n \in \mathbb{N}$, 记 $P_n^k = (-\frac{n}{k(k+n)}, \frac{n}{k^2(k+n)})$, $P_k = (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}) \in L'_k$, $Q_n^k = (\frac{n}{k(k+n)}, \frac{n}{k^2(k+n)})$, $Q_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}) \in L_k$, $M_k = (0, 1 - \frac{1}{k+1}) \in L$.

(2) 对任意 $k, n \in \mathbb{N}$, 取点列 $\{P_{n,n+1}^{k,-r}\}_{r=k}^{\infty}, \{P_{n,n+1}^{k,r}\}_{r=k}^{\infty} \subset (P_{n+1}^k, P_n^k)$, $\{Q_{n,n+1}^{k,-r}\}_{r=k}^{\infty}, \{Q_{n,n+1}^{k,r}\}_{r=k}^{\infty} \subset (Q_n^k, Q_{n+1}^k)$ 和 $\{M_{n,n+1}^k\}_{k=-1}^{-\infty}, \{M_{n,n+1}^k\}_{k=1}^{\infty} \subset (M_n, M_{n+1})$ 满足:

(i) 对任意 $r \geq k$, 有 $P_{n,n+1}^{k,-r-1} \in (P_{n,n+1}^{k,-r}, P_{n,n+1}^{k,-r})$, $P_{n,n+1}^{k,r+1} \in (P_{n,n+1}^{k,r}, P_n^k)$, $P_{n,n+1}^{k,-k} \in (P_{n+1}^k, P_{n,n+1}^{k,k})$, 且有 $\lim_{r \rightarrow \infty} P_{n,n+1}^{k,-r} = P_{n+1}^k$, $\lim_{r \rightarrow \infty} P_{n,n+1}^{k,r} = P_n^k$;

(ii) 对任意 $r \geq k$, 有 $Q_{n,n+1}^{k,-r-1} \in (Q_{n,n+1}^{k,-r}, Q_{n+1}^k)$, $Q_{n,n+1}^{k,r+1} \in (Q_n^k, Q_{n,n+1}^{k,r})$, $Q_{n,n+1}^{k,-k} \in (Q_{n,n+1}^{k,k}, Q_{n+1}^k)$, 且有 $\lim_{r \rightarrow \infty} Q_{n,n+1}^{k,-r} = Q_{n+1}^k$, $\lim_{r \rightarrow \infty} Q_{n,n+1}^{k,r} = Q_n^k$;

(iii) 对任意 $r \in \mathbb{N}$, 有 $M_{n,n+1}^{-r-1} \in (M_{n,n+1}^{-r}, M_{n+1})$, $M_{n,n+1}^{r+1} \in (M_n, M_{n,n+1}^r)$, $M_{n,n+1}^1 \in (M_n, M_{n,n+1}^{-1})$, 且有 $\lim_{r \rightarrow \infty} M_{n,n+1}^{-r} = M_{n+1}$, $\lim_{r \rightarrow \infty} M_{n,n+1}^r = M_n$.

(3) 记 $B = (0, 1)$ 和 $O = (0, 0)$ (见图 1).

图 1 例 3.1 中的广义树 D

现定义 $f: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ 如下 (其中 $A \rightarrow B$ 表示 $f(A) = B$):

(1) 对任意 $n, k \in \mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned}
 & \dots \\
 & \rightarrow M_{n,n+1}^{-k} \rightarrow P_{n,n+1}^{1,-k} \rightarrow P_{n,n+1}^{2,-k} \rightarrow \dots \rightarrow P_{n,n+1}^{k,-k} \\
 & \rightarrow Q_{n,n+1}^{k,-k} \rightarrow \dots \rightarrow Q_{n,n+1}^{2,-k} \rightarrow Q_{n,n+1}^{1,-k} \\
 & \dots \\
 & \rightarrow M_{n,n+1}^{-3} \rightarrow P_{n,n+1}^{1,-3} \rightarrow P_{n,n+1}^{2,-3} \rightarrow P_{n,n+1}^{3,-3} \rightarrow Q_{n,n+1}^{3,-3} \rightarrow Q_{n,n+1}^{2,-3} \rightarrow Q_{n,n+1}^{1,-3} \\
 & \rightarrow M_{n,n+1}^{-2} \rightarrow P_{n,n+1}^{1,-2} \rightarrow P_{n,n+1}^{2,-2} \rightarrow Q_{n,n+1}^{2,-2} \rightarrow Q_{n,n+1}^{1,-2} \\
 & \rightarrow M_{n,n+1}^{-1} \rightarrow P_{n,n+1}^{1,-1} \rightarrow Q_{n,n+1}^{1,-1} \\
 & \rightarrow M_{n,n+1}^1 \rightarrow P_{n,n+1}^{1,1} \rightarrow Q_{n,n+1}^{1,1} \\
 & \rightarrow M_{n,n+1}^2 \rightarrow P_{n,n+1}^{1,2} \rightarrow P_{n,n+1}^{2,2} \rightarrow Q_{n,n+1}^{2,2} \rightarrow Q_{n,n+1}^{1,2} \\
 & \rightarrow M_{n,n+1}^3 \rightarrow P_{n,n+1}^{1,3} \rightarrow P_{n,n+1}^{2,3} \rightarrow P_{n,n+1}^{3,3} \rightarrow Q_{n,n+1}^{3,3} \rightarrow Q_{n,n+1}^{2,3} \rightarrow Q_{n,n+1}^{1,3} \\
 & \dots \\
 & \rightarrow M_{n,n+1}^k \rightarrow P_{n,n+1}^{1,k} \rightarrow P_{n,n+1}^{2,k} \rightarrow \dots \rightarrow P_{n,n+1}^{k,k} \\
 & \rightarrow Q_{n,n+1}^{k,k} \rightarrow \dots \rightarrow Q_{n,n+1}^{2,k} \rightarrow Q_{n,n+1}^{1,k} \\
 & \dots
 \end{aligned}$$

(2) 对任意 $n, k \in \mathbb{N}$, 有

$$\dots \rightarrow Q_n \rightarrow Q_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow Q_1 \rightarrow B \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_n \rightarrow \dots$$

且

$$\dots \rightarrow Q_k^n \rightarrow Q_k^{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow Q_k^1 \rightarrow M_k \rightarrow P_k^1 \rightarrow \dots \rightarrow P_k^{n-1} \rightarrow P_k^n \rightarrow \dots$$

(3) $f(O) = O$, f 在其他地方是线性的.

易证 f 是连续的. 现证下面结论成立:

- (C₁) $f((M_n, O] \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_n^k, Q_n^k))) \subset (M_n, O] \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_n^k, Q_n^k))$;
- (C₂) 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 和非零整数 r , 有 $\omega(M_{n,n+1}^r, f) = \{P_n^k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{Q_n^k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{M_n, O\}$;
- (C₃) $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(M_{n,n+1}^1, f) = \{P_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{B, O\}$;
- (C₄) 对任意 $x \in D$, 有 $\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{B, O\} \neq \omega(x, f)$;
- (C₅) 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 区间 (B, M_n) 至少含某条轨线的两个点, 但 $B \notin \omega(f)$;
- (C₆) $\omega(f)$ 不是闭的.

证明 (C₁) 设 $x \in (M_n, O] \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_n^k, Q_n^k))$. 若 $x \in \mathcal{G} \equiv \{M_r : 1 \leq r \leq n-1\} \cup \{P_r^k : 1 \leq r \leq n-1, k \in \mathbb{N}\} \cup \{Q_r^k : 1 \leq r \leq n-1, k \in \mathbb{N}\} \cup \{O\}$, 则 $f(x) \in \mathcal{G}$.

若 $x \in (M_1, O] \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_1^k, Q_1^k))$, 则 $f(x) \in (M_1, O] \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_1^k, Q_1^k))$.

若 $x \in (M_r, M_{r-1}) \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} ((P_r^k, P_{r-1}^k) \cup (Q_{r-1}^k, Q_r^k)))$ (对某 $2 \leq r \leq n-1$), 则

$$f(x) \in (M_r, O] \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_r^k, Q_r^k) \right).$$

(C₂) 对任意 $r \in \mathbb{N}$, 有

$$O(M_{n,n+1}^r, f) = \{M_{n,n+1}^s : s \geq r\} \cup \{P_{n,n+1}^{i,s} : s \geq i \geq 1, s \geq r\} \cup \{Q_{n,n+1}^{i,s} : s \geq i \geq 1, s \geq r\}$$

和

$$\begin{aligned} O(M_{n,n+1}^{-r}, f) &= \{M_{n,n+1}^{-s} : r \geq s \geq 1\} \cup \{P_{n,n+1}^{i,-s} : s \geq i \geq 1, r \geq s \geq 1\} \\ &\quad \cup \{Q_{n,n+1}^{i,-s} : s \geq i \geq 1, r \geq s \geq 1\} \cup \{M_{n,n+1}^s : s \geq 1\} \\ &\quad \cup \{P_{n,n+1}^{i,s} : s \geq i \geq 1, s \geq 1\} \cup \{Q_{n,n+1}^{i,s} : s \geq i \geq 1, s \geq 1\}, \end{aligned}$$

从而可知, 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 和非零整数 r ,

$$\omega(M_{n,n+1}^r, f) = \{P_n^k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{Q_n^k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{M_n, O\}.$$

(C₃) 记 $\mathcal{A} = \{P_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{B, O\}$, 则 $\omega(M_{n,n+1}^1, f)$ 和 $\mathcal{A}$ 之间的 Hausdorff 距离为

$$\begin{aligned} H(\omega(M_{n,n+1}^1, f), \mathcal{A}) &= \max\{d(\omega(M_{n,n+1}^1, f), P), d(Q, \mathcal{A}) : P \in \mathcal{A}, Q \in \omega(M_{n,n+1}^1, f)\} \\ &\leq \max_{k \in \mathbb{N}}\{d(M_n, B), d(P_n^k, P_k), d(Q_n^k, Q_k)\} \\ &= \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

这说明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H(\omega(M_{n,n+1}^1, f), \mathcal{A}) = 0.$$

(C₄) 设 $x \in \mathbf{D}$. 若 $x \in \{P_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{B, O\}$, 则有 $\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{B, O\} \neq \omega(x, f) = \{O\}$.

若 $x \in D - \{P_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{B, O\}$, 则存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $x \in (M_n, O] \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_n^k, Q_n^k))$. 由 (C₁) 知 $\omega(x, f) \subset [M_n, O] \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} [P_n^k, Q_n^k])$, 从而推出 $\omega(x, f) \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

(C₅) 对任意 $r, n \in \mathbb{N}$, 有 $O(M_{n,n+1}^r, f) \subset (B, M_n)$, 但由 (C₄) 知 $B \notin \omega(f)$.

(C₆) 由 (C₂) 知 $\{M_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \omega(f)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = B$, 但由 (C₄) 可得 $B \notin \omega(f)$, 从而推出 $\omega(f)$ 不是闭的.

由 (C₃) 和 (C₄) 可知 $\{\omega(x, f) : x \in \mathbf{D}\}$ 在 Hausdorff 度量下不是闭的. □

注 3.2 Kočan 等^[25] 也构造了一个树突映射使得定理 A 的结论 (15) 不成立.

致谢 作者对审稿人的建议表示感谢.

参考文献

- 1 Nadler S B Jr. Continuum Theory: An Introduction. New York: Marcel Dekker, 1992
- 2 Sun T, Xi H, Liang H. Special α -limit points and unilateral γ -limit points for graph maps. Sci China Math, 2011, 54: 2013–2018
- 3 Mai J, Zhang G, Sun T. Recurrent points and non-wandering points of graph maps. J Math Anal Appl, 2011, 383: 553–559
- 4 Mai J, Sun T. The ω -limit set of a graph map. Topology Appl, 2007, 154: 2306–2311
- 5 Mai J, Sun T. Non-wandering points and the depth for graph maps. Sci China Ser A, 2007, 50: 1818–1824
- 6 孙太祥, 席鸿建, 陈占和, 等. 图映射的吸引中心与拓扑熵. 数学进展, 2004, 33: 540–546
- 7 Mai J, Shao S. Spaces of ω -limit sets of graph maps. Fund Math, 2007, 196: 91–100
- 8 孙太祥, 席鸿建. 图映射的负极限集. 中国科学: 数学, 2017, 47: 591–598

- 9 Ye X. The centre and the depth of the centre of a tree map. *Bull Aust Math Soc*, 1993, 48: 347–350
- 10 Sun T, Tang Y, Su G, et al. Special α -limit points and γ -limit points of a dendrite map. *Qual Theory Dyn Syst*, 2018, 17: 245–257
- 11 Sun T, Xi H. The centre and the depth of the centre for continuous maps on dendrites with finite branch points. *Qual Theory Dyn Syst*, 2017, 16: 697–702
- 12 Sun T, Xi H, He Q. Non-wandering sets of the powers of dendrite maps. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2017, 33: 449–454
- 13 Sun T, He Q, Liu J, et al. Non-wandering sets for dendrite maps. *Qual Theory Dyn Syst*, 2015, 14: 101–108
- 14 Sun T, Tao C, Xi H, et al. Topological limits and ω -limit sets of the dendrite maps. *J Dyn Syst Geom Theor*, 2014, 12: 165–173
- 15 Acosta G, Eslami P. On open maps between dendrites. *Houston J Math*, 2007, 33: 753–770
- 16 Baldwin S. Continuous itinerary functions and dendrite maps. *Topology Appl*, 2007, 154: 2889–2938
- 17 Balibrea F, Hric R, Snoha L. Minimal sets on graphs and dendrites. *Internat J Bifur Chaos Appl Sci Engrg*, 2003, 13: 1721–1725
- 18 Shi E, Wang S, Di Y. Sensitivity of dendrite maps. *J Math Anal Appl*, 2017, 446: 908–919
- 19 Efremova L S, Makhrova E N. On the center of continuous maps of dendrites. *J Difference Equ Appl*, 2003, 9: 381–392
- 20 Naghmouchi I. Dynamical properties of monotone dendrite maps. *Topology Appl*, 2012, 159: 144–149
- 21 Naghmouchi I. Pointwise-recurrent dendrite maps. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2013, 33: 1115–1123
- 22 Sun T, He Q, Xi H. Intra-orbit separation of dense orbits of dendrite maps. *Chaos Solitons Fractals*, 2013, 57: 89–92
- 23 Mai J, Shi E. $\overline{R} = \overline{P}$ for maps of dendrites X with $\text{Card}(\text{End}(X)) < c$. *Internat J Bifur Chaos Appl Sci Engrg*, 2009, 19: 1391–1396
- 24 Hero M. Special α -limit points for maps of the interval. *Proc Amer Math Soc*, 1992, 116: 1015–1022
- 25 Kočan Z, Kornecká-Kurková V, Málek M. On the centre and the set of ω -limit points of continuous maps on dendrites. *Topology Appl*, 2009, 156: 2923–2931

The attracting centre and space of ω -limit sets of a general tree map

Taixiang Sun, Fanping Zeng, Bin Qin & Guangwang Su

Abstract Let $\mathbf{D}$ be a general tree (i.e., a dendrite with the number of branch points being finite) and $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ be continuous. Denote by $P(f)$, $R(f)$, $SA(f)$, $\Gamma(f)$, $U\Gamma(f)$, $\omega(x, f)$ and $\Omega(f)$ the set of periodic points, the set of recurrent points, the set of special α -limit points, the set of γ -limit points, the set of unilateral γ -limit points, the set of ω -limit points of x and the set of non-wandering points of f , respectively. Let $\omega(f) = \bigcup_{x \in \mathbf{D}} \omega(x, f)$ and $\omega(A) = \bigcup_{x \in A} \omega(x, f)$ for any $A \subset \mathbf{D}$ and $\omega^n(f) = \omega(\omega^{n-1}(f))$ for all $n \geq 2$. In this paper, we show that for any positive integer n , $\omega^{n+2}(f) = \omega^2(f) = \omega(\Omega(f)) = \omega(SA(f)) = \omega(\Gamma(f)) = \omega(P(f) \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U\Gamma(f)))) = \omega(\overline{P(f)}) = \omega(R(f) \cup U\Gamma(f)) = P(f) \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U\Gamma(f))) \subset \overline{P(f)}$. Besides, we construct a general tree $\mathbf{D}$ with a branch point and a continuous map $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ such that $\{\omega(x, f) : x \in \mathbf{D}\}$ is not closed with Hausdorff metric.

Keywords general tree map, ω -limit set, recurrent point, special α -limit point, γ -limit point

MSC(2010) 37E25, 37B40, 54H20

doi: 10.1360/N012017-00170