Harnack 不等式在 Markov 过程长时间行为研究中的应用

献给王梓坤教授 90 华诞

王凤雨*, 张钰

北京师范大学数学科学学院, 北京 100875

E-mail: wangfy@bnu.edu.cn, zhangyu@bjisdfz.com

收稿日期: 2017-06-13; 接受日期: 2018-02-13; 网络出版日期: 2018-12-28; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11431014 和 11771326) 资助项目

摘要 本文使用 Markov 半群的无穷维 Harnack 不等式刻画 Markov 过程的长时间行为, 建立可加泛函的极限定理, 简化和放松了原有的条件. 所获得的一般结果被应用于随机 Hamilton 系统和半线性随机偏微分方程, 对于一类退化的扩散过程和无穷维扩散过程建立了所需的 Harnack 不等式, 得到了相应的极限定理.

关键词 长时间渐近性 中偏差准则 Harnack 不等式 随机 Hamilton 系统 半线性随机微分方程

MSC (2010) 主题分类 60J60, 58J65

1 引言

设 E 为 Polish 空间, $P_t(x, dy)$ 为 E 上右连续 Markov 过程 $(X_t)_{t \geq 0}$ 的转移概率核. 给定 $x \in E$, 以 P_x 和 E_x 表示对从 x 出发的 Markov 过程所取的概率和期望. 则相应的 Markov 半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 定义为

$$P_t f(x) := E_x f(X_t) = \int_E f(y) P_t(x, dy), \quad x \in E, \quad t \geq 0, \quad f \in \mathcal{B}_b(E),$$

其中 $\mathcal{B}_b(E)$ 为 E 上所有有界可测函数组成的集合.

对于 E 上的概率测度 ν , 以 P_ν 和 E_ν 表示对初分布为 ν 的 Markov 过程所取的概率和期望. 以 νP_t 记 X_t 在概率 P_ν 下的分布. 我们有

$$(\nu P_t)(f) := \int_E f d(\nu P_t) = \nu(P_t f), \quad f \in \mathcal{B}_b(E), \quad t \geq 0.$$

特别地, 如果概率测度 μ 满足 $\mu P_t = \mu, t \geq 0$, 则称之为 Markov 过程 X_t (或 P_t) 的不变概率测度.

英文引用格式: Wang F Y, Zhang Y. Application of Harnack inequality to long time asymptotics of Markov processes (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 505–516, doi: 10.1360/N012017-00127

如果任给 $x \in E$, $t > 0$, $P_t(x, \cdot)$ 的支撑为 E , 则称过程 (或 P_t) 为不可约的. 如果任给 $t > 0$, $P_t \mathcal{B}_b(E) \subset C_b(E)$, 则称过程 (或 P_t) 为强 Feller 的. 一个不可约强 Feller 半群, 如果存在不变概率测度, 则必唯一. 此时, 弱遍历性成立, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P_s f(x) ds = \mu(f), \quad x \in E, \quad f \in C_b(E).$$

由强 Feller 性, 这里的 $C_b(E)$ 可放大为 $\mathcal{B}_b(E)$, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P_s f(x) ds = \mu(f), \quad x \in E, \quad f \in \mathcal{B}_b(E). \quad (1.1)$$

进一步地, 人们关心对于什么样的函数 A , 可加泛函 $\int_0^t A(X_s) ds$ 存在下面两个极限:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log E_x [e^{\gamma \int_0^t A(X_s) ds}], \quad (1.2)$$

$$V(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \{ \log E_x [e^{\gamma \int_0^t A(X_s) ds}] - \lambda t \}, \quad (1.3)$$

其中 $\gamma > 0$ 为小常数, 极限值 λ 不依赖于 x . 因为 Laplace 变换 $\gamma \mapsto e^{\gamma \int_0^t A(X_s) ds}$ 决定了可加泛函 $\int_0^t A(X_s) ds$ 的分布, 所以, (1.2) 蕴含的信息多于 (1.1), 而 (1.3) 刻画了 (1.2) 的收敛速度. 这两个极限与中 (大) 偏差准则、泛函不等式和 HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程有密切关系, 详见文献 [1, 2] 和其中的参考文献.

最近, 基于文献 [1, 2] 的结果, Gao^[3] 对于一类无界函数 A 研究了这两个极限的存在性, 证明了相应可加泛函的中偏差原理. 下面详细叙述文献 [3] 的主要结果.

假设 Markov 半群 P_t 满足如下条件:

(A₁) 超压缩性: P_t 有唯一不变概率测度 μ , 并且存在某个 $t > 0$, 使得 $\|P_t\|_{L^2(\mu) \rightarrow L^4(\mu)} = 1$.

(A₂) 强 Feller 性: $P_t \mathcal{B}_b(E) \subset C_b(E)$, $t > 0$.

(A₃) 密度条件: P_t 关于 μ 存在转移密度函数 $p_t(x, y)$, 使得对于某常数 $t_1 > 0$, $p > 1$ 以及任意的紧集 $K \subset E$, 有

$$\sup_{x \in K} \|p_t(x, \cdot)\|_{L^p(\mu)} < \infty, \quad t \geq t_1.$$

特别地, (A₁) 蕴含存在 $\lambda > 0$ 使得

$$\mu(|P_t A - \mu(A)|^2) \leq e^{-\lambda t} \mu(|A - \mu(A)|^2), \quad t \geq 0, \quad A \in L^2(\mu),$$

从而,

$$\sigma(A)^2 := \int_{[0, \infty) \times E} |P_s A(x) - \mu(A)|^2 ds \mu(dx) < \infty, \quad A \in L^2(\mu).$$

定理 1.1^[3] 假设条件 (A₁)–(A₃) 均成立. 设函数 $A: E \rightarrow \mathbb{R}$ 满足以下两个条件:

(C₁) 存在常数 $\delta > 0$, 使得 $\mu(e^{\delta|A|}) < \infty$;

(C₂) 对于任意的 $t > 0$, 存在常数 $\delta_t > 0$, 使得任给紧集 $K \subset E$, 有

$$\sup_{x \in K} \sup_{s \in [0, t]} E_x [e^{\delta_t |A(X_s)|}] < \infty,$$

则以下命题成立:

(1) 存在常数 $\bar{\gamma} > 0$, 使得对于任意的 $|\gamma| \leq \bar{\gamma}$, 极限 (1.2) 和 (1.3) 存在, 并且在紧集上一致收敛, 其中 λ 不依赖于 x ;

(2) 对于任意增函数 $\alpha: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha(t)}{\sqrt{t}} \wedge \frac{t}{\alpha(t)} = \infty$, 任意紧集 $K \subset E$, 任意常数 $r \in \mathbb{R}$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left| \frac{t}{\alpha(t)^2} \log E_{\mu} [e^{\frac{r\alpha(t)}{t} \int_0^t (A(X_s) - \mu(A)) ds}] - 2\sigma(A)^2 r^2 \right| \right. \\ \left. \sup_{x \in K} \left| \frac{t}{\alpha(t)^2} \log E_x [e^{\frac{r\alpha(t)}{t} \int_0^t (A(X_s) - \mu(A)) ds}] - 2\sigma(A)^2 r^2 \right| \right\} = 0; \quad (1.4)$$

(3) (中偏差原理) 对于任意的 $r \in (0, +\infty)$ 以及可测集 $F \subset \mathbb{R}$, 有

$$-\frac{1}{8\sigma(A)^2} \inf_{y \in \bar{F}} |y|^2 \geq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\alpha(t)^2} \left\{ \begin{array}{l} \log P_{\mu} \left(\frac{1}{\alpha(t)} \int_0^t (A(X_s) - \mu(A)) ds \in F \right) \\ \sup_{x \in K} \log P_x \left(\frac{1}{\alpha(t)} \int_0^t (A(X_s) - \mu(A)) ds \in F \right) \end{array} \right\} \\ \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\alpha(t)^2} \left\{ \begin{array}{l} \log P_{\mu} \left(\frac{1}{\alpha(t)} \int_0^t (A(X_s) - \mu(A)) ds \in F \right) \\ \sup_{x \in K} \log P_x \left(\frac{1}{\alpha(t)} \int_0^t (A(X_s) - \mu(A)) ds \in F \right) \end{array} \right\} \\ \geq -\frac{1}{8\sigma(A)^2} \inf_{y \in \dot{F}} |y|^2,$$

其中 $\bar{F}$ 和 $\dot{F}$ 分别表示集合 F 的闭包和内部.

由于条件 (A₁)–(A₃) 和 (C₂) 涉及半群性质, 而这些性质有时缺乏直接的判别准则, 文献 [3] 使用文献 [4] 中的无穷维 Harnack 不等式对于一类非退化扩散过程验证了这些条件. 由于我们已经对许多其他模型建立了这类 Harnack 不等式, 为便于应用, 本文使用 Harnack 不等式来代替这些条件, 给出判别 Markov 过程上述渐近性质的一般结论.

考虑如下的 Harnack 不等式:

$$|P_t f(x)|^p \leq \{P_t |f|^p(y)\} e^{\Phi_t(x,y)}, \quad f \in \mathcal{B}_b(E), \quad t > 0, \quad x, y \in E, \quad (1.5)$$

其中 $p > 1$ 为常数, $\Phi: (0, \infty) \times E \times E \rightarrow (0, \infty)$ 为可测函数. 文献 [5] 对于流形上的扩散半群首次发现了这类不等式, 此后人们陆续对许多其他模型建立了该不等式, 参见文献 [4, 6–11] 以及所引参考文献.

第 2 节使用不等式 (1.5) 给出判别 Markov 过程渐近行为的一般结论; 第 3 和 4 节把该结果应用于随机 Hamilton 系统和半线性随机偏微分方程, 得到相应 Markov 过程可加泛函的极限定理.

2 一般结果

在下面的定理中, 我们使用 Harnack 不等式 (1.5) 代替假设 (A₁)–(A₃), 并去掉了条件 (C₂). 该结果即便是回到文献 [3] 所研究的非退化扩散情形也是新的.

定理 2.1 假设 (1.5) 对于某常数 $p > 1$ 成立, 其中可测函数 $\Phi: (0, \infty) \times E \times E \rightarrow [0, \infty)$ 满足以下三个条件:

- (B₁) 对于任意的 $t > 0$, Φ_t 是 $E \times E$ 上的连续函数;
 (B₂) 对于任意的 $x, y \in E$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x, y) = 0$;
 (B₃) P_t 存在不变概率测度 μ 使得对于某常数 t_0 和 ε_0 , 有

$$(\mu \times \mu)(e^{(1+\varepsilon_0)\Phi_{t_0}}) < \infty.$$

那么在以下的每种情形下, 定理 1.1 中的论断均成立:

- (1) A 满足条件 (C₁) 和下面的条件:
 (C'₂) 对于任意的 $t > 0$, 存在常数 $\delta_t, \theta > 0$ 使得任给紧集 $K \subset E$, 有

$$\sup_{x \in K} E_x \left(e^{\delta_t \int_0^t |A(X_s)| ds} + \int_0^\theta |A(X_s)|^{1+\theta} ds \right) < \infty.$$

- (2) A 满足条件 (C₁) 且存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得

$$\int_0^1 \mu(e^{-(1 \vee \frac{1}{p\varepsilon_0})\Phi_t(x, \cdot)})^{-\varepsilon_0} dt < \infty, \quad x \in E.$$

为证明该定理, 我们先将定理 (1.1) 中的条件 (C₂) 减弱为 (C'₂).

引理 2.2 设 (A₁)–(A₃) 成立. 如果可测函数 A 满足条件 (C₁) 和 (C'₂), 则定理 1.1 中的所有论断均成立.

证明 只需说明在定理 1.1 中可以使用 (C'₂) 代替 (C₂). 为此, 设 A 满足条件 (C₁) 和 (C'₂). 对于任意的 $r \in \mathbb{R}$, 考虑 Feynman-Kac 半群

$$P_t^r f(x) := E_x[f(X_t)e^{r \int_0^t A(X_s) ds}], \quad x \in E, \quad f \in B^+(E), \quad t \geq 0.$$

在文献 [3] 中定理 1.1 的证明过程中, 条件 (C₂) 仅用于验证以下两个命题:

- (i) 对于任意的 $t > 0$, 存在常数 $c_t > 0$ 使得对于任意的 $r \in [-c_t, c_t]$, $\varepsilon \in (0, t)$, 及紧集 $K \subset E$, 有

$$\sup_{x \in K} P_\varepsilon(P_{t-\varepsilon}^r 1)^2(x) < \infty.$$

- (ii) 对于任意的 $t > 0$, 存在常数 $c_t > 0$ 使得对于任意的紧集 $K \subset E$, 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in K} E_x(|e^{r \int_0^\varepsilon A(X_s) ds} - 1| \cdot |P_{t-\varepsilon}^r 1|(X_\varepsilon)) = 0, \quad |r| \leq c_t.$$

下面使用条件 (C'₂) 代替条件 (C₂) 来证明这两个论断.

论断 (i) 的证明 对于条件 (C'₂) 中的 $\delta_t > 0$, 取常数 $c_t = \frac{1}{2}\delta_t$. 由 Markov 性和 Jensen 不等式, 对于任意的 $r \in [-c_t, c_t]$, 有

$$\begin{aligned} P_\varepsilon(P_{t-\varepsilon}^r 1)^2(x) &= E_x[(P_{t-\varepsilon}^r 1)^2(X_\varepsilon)] \leq E_x[E_{X_\varepsilon}[e^{2r \int_0^{t-\varepsilon} A(X_s) ds}]] = E_x[e^{2r \int_\varepsilon^t A(X_s) ds}] \\ &\leq E_x[e^{2c_t \int_0^t |A(X_s) ds|}] = E_x[e^{\delta_t \int_0^t |A(X_s) ds|}] =: M_t(x). \end{aligned}$$

所以, 条件 (C'₂) 蕴含论断 (i).

论断 (ii) 的证明 由论断 (i)、Hölder 不等式和不等式 $|e^s - 1| \leq |s|e^{|s|}$, 其中 $\varepsilon \in [0, 1]$, $s \in \mathbb{R}$, 可知当 $|r| \leq \frac{\delta_t}{4}$ 时, 有

$$I_\varepsilon(x) := \{E_x(|e^{r \int_0^\varepsilon A(X_s) ds} - 1| \cdot |P_{t-s}^r 1|(X_\varepsilon))\}^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\mathbb{E}_x |e^{r|\int_0^\varepsilon |A|(X_s)ds} - 1|^2) P_\varepsilon(P_{t-\varepsilon}^r 1)^2(x) \\
&\leq \mathbb{E}_x \left[\left(\delta_t \int_0^\varepsilon |A|(X_s)ds \right)^{\frac{1}{2}} e^{2|r|\int_0^\varepsilon |A|(X_s)ds} \right] M_t(x) \\
&\leq \left(\delta_t \mathbb{E}_x \int_0^\varepsilon |A|(X_s)ds \right)^{\frac{1}{2}} M_t(x)^{\frac{3}{2}} \\
&\leq \sqrt{\delta_t} M_t(x)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{\theta}{1+\theta}} \left(\mathbb{E}_x \int_0^\varepsilon |A(X_s)|^{1+\theta} ds \right)^{\frac{1}{1+\theta}}.
\end{aligned}$$

由上式和 (C'_2) 知, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(x) = 0$ 且该收敛关于 x 局部一致. $\square$

定理 2.1 的证明 由引理 2.2, 只需验证条件 (A₁)–(A₃), 以及在情形 (2) 下验证 (C'_2). 设 (1.5) 对于某常数 $p > 1$ 以及某满足条件 (B₁)–(B₃) 的 Φ 成立. 根据文献 [10, 命题 3.1], P_t 为强 Feller 半群, μ 是 P_t 的唯一不变概率测度, 并且关于 μ 具有严格正的密度函数 $p_t(x, y)$. 从而, 条件 (A₂) 成立. 下面分别验证条件 (A₁)、(A₃) 和 (C'_2).

条件 (A₁) 的证明 由 Jensen 不等式以及 (1.5), 对于任意的 $t > s \geq 0$, 有

$$|P_t f(x)|^p \leq (P_s |P_{t-s} f|)^p(x) \leq (P_s |P_{t-s} f|^p(y)) e^{\Phi_s(x, y)} \leq (P_t |f|^p)(y) e^{\Phi_s(x, y)}, \quad x, y \in E, \quad f \in \mathcal{B}_b(E).$$

因此, 假设不等式 (1.5) 中的 Φ_t 关于 t 单调递减. 根据 (1.5), 有

$$|P_t f|^p(x) \mu(e^{-\Phi_t(x, \cdot)}) \leq \mu(|f|^p),$$

从而,

$$|P_t f|^p(x) \leq \frac{\mu(|f|^p)}{\mu(e^{-\Phi_t(x, \cdot)})}, \quad t > 0, \quad x \in E, \quad f \in \mathcal{B}_b(E). \quad (2.1)$$

再结合条件 (B₃) 和 Jensen 不等式, 得到

$$\|P_t\|_{L^p(\mu) \rightarrow L^{p(1+\varepsilon_0)}(\mu)}^{p(1+\varepsilon_0)} \leq \int_E \frac{\mu(dx)}{\{\mu(e^{-\Phi_t(x, \cdot)})\}^{1+\varepsilon_0}} \leq (\mu \times \mu)(e^{(1+\varepsilon_0)\Phi_t}) < \infty, \quad t \geq t_0.$$

由此及 (B₂), 我们可使用控制收敛定理导出

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|P_t\|_{L^p(\mu) \rightarrow L^{p(1+\varepsilon_0)}(\mu)} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \{(\mu \times \mu)(e^{(1+\varepsilon_0)\Phi_t})\}^{\frac{1}{p(1+\varepsilon_0)}} = 1.$$

再根据插值定理和 $\|P_t\|_{L^p(\mu) \rightarrow L^q(\mu)} \geq 1$, 对任意 $q \geq p \geq 1$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|P_t\|_{L^2(\mu) \rightarrow L^4(\mu)} = 1.$$

特别地, 对于充分大的 $t > 0$, 有 $\|P_t\|_{L^2(\mu) \rightarrow L^4(\mu)}^4 < 2$. 从而, 根据文献 [9, 命题 2.2], 半群 P_t 具有超压缩性, 即条件 (A₁) 成立.

条件 (A₃) 的证明 令 $q = 1 + \frac{1}{p}$. 将 $f := \{p_t(x, \cdot)^{q-1}\} \wedge N$ 代入 (2.1) 并且令 $N \rightarrow \infty$, 再结合 $\mu(p_t(x, \cdot)) = 1$, 得到

$$\|p_t(x, \cdot)\|_{L^q(\mu)}^q = P_t(p_t(x, \cdot)^{q-1})(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_t(p_t(x, \cdot)^{q-1} \wedge N)(x) \leq \frac{1}{\mu(e^{-\Phi_t(x, \cdot)})}, \quad t > 0.$$

由条件 (B₁) 知 $\mu(e^{-\Phi_t(x, \cdot)})$ 关于 x 是连续的. 因此, $\|p_t(x, \cdot)\|_{L^q(\mu)}$ 关于 x 局部有界, 即条件 (A₃) 成立.

条件 (C₂') 的证明 令 $p_0 = p \vee \frac{1}{\varepsilon_0}$, 则有 $\frac{p_0}{p} = 1 \vee \frac{1}{p\varepsilon_0}$. 根据 Jensen 不等式及 (1.5), 有

$$|P_t f(x)|^{p_0} \leq (P_t |f|^{p_0})(y) e^{\frac{p_0}{p} \Phi_t(x, y)}.$$

类似于 (2.1), 有

$$|P_t f|^{p_0}(x) \leq \frac{\mu(|f|^{p_0})}{\mu(e^{-\frac{p_0}{p} \Phi_t(x, \cdot)})}, \quad f \in \mathcal{B}^+(E).$$

取 $f = e^{\frac{\delta}{p_0} |A|}$, 使用条件 (A₁), 存在常数 $c > 0$ 使得

$$\mathbb{E}_x[e^{\frac{\delta}{p_0} |A(X_t)|}] = P_t(e^{\frac{\delta}{p_0} |A|})(x) \leq \frac{\{\mu(e^{\delta |A|})\}^{\frac{1}{p_0}}}{\{\mu(e^{-\frac{p_0}{p} \Phi_t(x, \cdot)})\}^{\frac{1}{p_0}}} \leq c \{\mu(e^{-\frac{p_0}{p} \Phi_t(x, \cdot)})\}^{-\varepsilon_0}. \quad (2.2)$$

由此结合条件 (B₃), 对于任意的 $\theta > 0$, 存在常数 $c(\theta) > 0$ 使得

$$\mathbb{E}_x \int_0^\theta |A(X_s)|^{1+\theta} ds \leq c(\theta) + \int_0^\theta \mathbb{E}_x[e^{\frac{\delta}{p_0} |A(X_s)|}] ds \leq c(\theta) + c \int_0^\theta \{\mu(e^{-\frac{p_0}{p} \Phi_s(x, \cdot)})\}^{-\varepsilon_0} ds.$$

再由条件 (B₁) 和 (B₃) 知, 该不等式右端关于 x 连续, 故 $\mathbb{E}_x \int_0^\theta |A(X_s)|^{1+\theta} ds$ 关于 x 局部有界.

最后, 对于任意的 $t > 0$, 取 $\delta_t = \frac{\delta}{tp_0}$. 由 Jensen 不等式和 (1.5) 知,

$$\mathbb{E}_x[e^{\delta_t \int_0^t |A(X_s)| ds}] \leq \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x[e^{t\delta_t |A(X_s)|}] ds \leq \frac{c}{t} \int_0^t \{\mu(e^{-\frac{p_0}{p} \Phi_s(x, \cdot)})\}^{-\varepsilon_0} ds.$$

同样, 该上界关于 x 连续, 所以, $\mathbb{E}_x[e^{\delta_t \int_0^t |A(X_s)| ds}]$ 关于 x 局部有界. 从而, 条件 (C₂') 成立. $\square$

3 随机 Hamilton 系统

在状态空间 $E := \mathbb{R}^{m+d}$ 上, 考虑如下的退化的随机微分方程:

$$\begin{cases} dX_t = (AX_t + BY_t) dt, \\ dY_t = Z(X_t, Y_t) dt + M dW_t, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 A, B 和 M 分别是 $m \times m, m \times d$ 和 $d \times d$ 阶矩阵, W_t 是 d 维 Brown 运动, $Z: \mathbb{R}^{m+d} \rightarrow \mathbb{R}^d$ 是连续函数. 特别地, 当 $M = I_{d \times d}$, $Z(x, y) = -x + \nabla V(y)$ (其中 $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$) 时, 该随机微分方程是以 V 为 Hamilton 势能的随机 Hamilton 系统, 方程解的分布满足动能 Fokker-Planck 方程, 这是数学物理的重要模型, 参见文献 [12] 及其参考文献.

文献 [11, 13] 研究了相应 Markov 半群的导数公式、梯度估计和 Harnack 不等式. 最近, 在如下的条件下, 文献 [9] 证明了该随机微分方程的 Markov 半群 P_t 具有超压缩性:

(H₁) M 是可逆矩阵, 并且矩阵 $[B, AB, \dots, A^{m-1}B]$ 的秩为 m ;

(H₂) Z 是 Lipschitz 连续函数, 并且存在常数 $\theta > 0$, $r \in (-\|B\|^{-1}, \|B\|^{-1})$, 满足

$$\begin{aligned} & \langle x - \bar{x} + rB(y - \bar{y}), A(x - \bar{x}) + B(y - \bar{y}) \rangle + \langle Z(x, y) - Z(\bar{x}, \bar{y}), y - \bar{y} + rB^*(x - \bar{x}) \rangle \\ & \leq -\theta(|x - \bar{x}|^2 + |y - \bar{y}|^2), \quad (x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^{m+d}. \end{aligned}$$

根据定理 2.1, 我们有下面的极限定理.

定理 3.1 假设条件 (H_1) 和 (H_2) 成立. 如果函数 $A: \mathbb{R}^{m+d} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$\text{存在常数 } \delta > 0 \text{ 使得 } \int_{\mathbb{R}^{m+d}} e^{\delta|A(z)|} \mu(dz) < \infty, \quad (3.2)$$

则定理 1.1 的论断均成立. 特别地, 如果存在常数 $L > 0$ 使得

$$|A(z)| \leq L(|x|^2 + 1), \quad z \in \mathbb{R}^{m+d}, \quad (3.3)$$

则定理 1.1 的论断均成立.

证明 根据文献 [9, 引理 3.3], 存在常数 $\theta_0 > 0$ 使得 $\mu(e^{\theta_0|\cdot|^2}) < \infty$. 从而条件 (3.3) 蕴含 (3.2). 故根据定理 2.1, 只需找到满足条件 (B_1) – (B_3) 以及 (2) 中条件的函数 Φ 使得 Harnack 不等式 (1.5) 成立. 事实上, 在文献 [9, 引理 3.2] 中已经对于固定时刻 $t_0 > 0$ 证明了 Harnack 不等式, 但为验证 (B_3) , 我们需要刻画当 t 很小时函数 Φ_t 的阶. 所以, 根据文献 [9, 引理 3.2] 的证明过程来计算 Φ_t . 由文献 [11, 定理 4.2] 证明过程中的步骤 (1) 知, (H_1) 中的秩条件蕴含矩阵

$$Q_t := \int_0^t s(t-s) e^{(t-s)A} B B^* e^{(t-s)A^*} ds, \quad t > 0$$

是可逆的, 并且存在常数 $\theta_1 > 0$ 使得

$$\|Q_t^{-1}\| \leq \frac{\theta_1}{t^{2m+1}}, \quad t \in (0, 1]. \quad (3.4)$$

给定 $t_0 \in (0, 1]$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d$, 设 (X_t, Y_t) 是初值为 $(X_0, Y_0) = \xi$ 的随机微分方程 (3.1) 的解. 令

$$b = Q_{t_0}^{-1} \left\{ e^{t_0 A} (\xi_1 - \eta_1) + \left(\int_0^{t_0} \frac{t_0 - s}{t_0} e^{(t_0-s)A} ds \right) B (\eta_1 - \eta_2) \right\}.$$

由 (3.4) 知, 存在不依赖于 t_0 、 ξ 和 η 的常数 $\theta_2 > 0$ 使得

$$|b| \leq \frac{c_2 |\xi - \eta|}{t_0^{2m+1}}. \quad (3.5)$$

如同文献 [9, (3.1)], 考虑初值为 $(\bar{X}_0, \bar{Y}_0) = \eta$ 的随机微分方程

$$\begin{cases} d\bar{X}_t = (A\bar{X}_t + B\bar{Y}_t - L_1\bar{X}_t)dt, \\ d\bar{Y}_t = \left\{ Z(X_t, Y_t) - L_2\bar{Y}_t + \frac{1}{t_0} e^{-L_2 t} (Y_0 - \bar{Y}_0) + e^{-L_2 t} \frac{d}{dt} (t(t_0 - t) B^* e^{(t_0-t)A^*} b) \right\} dt + M dW_t. \end{cases}$$

将上式与方程 (3.1) 相减可解得

$$Y_t - \bar{Y}_t = \frac{t_0 - t}{t_0} (\xi_2 - \eta_2) - t(t_0 - t) B^* e^{(t_0-t)A^*} b, \quad (3.6)$$

以及

$$\begin{aligned} X_t - \bar{X}_t &= e^{At} (\xi_1 - \eta_1) + \int_0^t e^{(t-s)A} B (Y_s - \bar{Y}_s) ds \\ &= e^{At} (\xi_1 - \eta_1) + \left(\int_0^t \frac{t_0 - s}{t_0} e^{(t-s)A} ds \right) B (\xi_2 - \eta_2) \end{aligned}$$

$$- \left(\int_0^t s(t_0 - s) e^{(t-s)A} B B^* e^{(t_0-s)A^*} ds \right) b. \quad (3.7)$$

结合 (3.5)–(3.7), 存在不依赖于 $t_0 \in (0, 1]$ 和 $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{m+d}$ 的常数 $\theta_3 > 0$ 使得

$$|(X_t - \bar{X}_t, Y_t - \bar{Y}_t)| \leq \frac{\theta_3 |\xi - \eta|}{t_0^{2m-1}}. \quad (3.8)$$

令

$$\psi_t = Z(X_t, Y_t) - Z(\bar{X}_t, \bar{Y}_t) + \frac{\xi_2 - \eta_2}{t_0} + \frac{d}{dt} \{t(t_0 - t) B^* e^{(t_0-t)A^*} b\}, \quad t \in [0, t_0].$$

由 (3.5)、(3.8) 以及 $\|\nabla Z\|_\infty < \infty$ 可知, 存在常数 $\theta_4 > 0$ 使得

$$|\psi_t|^2 \leq \frac{\theta_4 |\xi - \eta|^2}{t_0^{4m}}, \quad t \in [0, t_0]. \quad (3.9)$$

此外, 令

$$R = \exp \left[- \int_0^{t_0} \langle M^{-1} \psi_t, dW_t \rangle - \frac{1}{2} \int_0^{t_0} |M^{-1} \psi_t|^2 dt \right].$$

由 Girsanov 定理 (参见文献 [9] 中引理 3.1 的证明) 得

$$(P_{t_0} f(\xi))^2 \leq (P_{t_0} f^2(\eta)) E R^2.$$

而由 (3.9), 存在常数 $\theta_5 > 0$ 使得

$$E R^2 \leq e^{\theta_5 t_0^{-4m} |\xi - \eta|^2}.$$

因此,

$$(P_{t_0} f(\xi))^2 \leq (P_{t_0} f^2(\eta)) e^{\theta_5 t_0^{-4m} |\xi - \eta|^2}, \quad t_0 \in (0, 1], \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^{m+d}, \quad f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^{m+d}). \quad (3.10)$$

下面考虑 $t > 1$ 的情形, 根据文献 [9, 引理 3.2], 存在常数 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ 使得对于 (3.1) 的任意两个解 (X_t, Y_t) 和 $(\tilde{X}_t, \tilde{Y}_t)$, 有

$$|(X_t - \tilde{X}_t, Y_t - \tilde{Y}_t)|^2 \leq \lambda_1 e^{-\lambda_2 t} |(X_0 - \tilde{X}_0, Y_0 - \tilde{Y}_0)|^2, \quad t \geq 0.$$

再结合 (3.10), 存在常数 $\theta > 0$ 使得

$$(P_1 f(X_t, Y_t))^2 \leq (P_1 f^2(\tilde{X}_t, \tilde{Y}_t)) \exp[\theta e^{-\lambda_2 t} |(X_0 - \tilde{X}_0, Y_0 - \tilde{Y}_0)|^2], \quad t \geq 0.$$

令 $(X_0, Y_0) = \xi, (\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) = \eta$, 得到

$$(P_{t+1} f(\xi))^2 \leq E(P_1 f(X_t, Y_t))^2 \leq (P_{t+1} f^2(\eta)) \exp[\theta e^{-\lambda_2 t} |\xi - \eta|^2], \quad t \geq 0.$$

由此结合 (3.10), 我们证明了 Harnack 不等式 (1.5) 对于如下 Φ_t 成立:

$$\Phi_t(\xi, \eta) := \theta e^{-\lambda t} t^{-4m} |\xi - \eta|^2, \quad t > 0, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^{m+d}, \quad (3.11)$$

其中 $\theta, \lambda > 0$ 为常数.

显然上述函数 Φ 满足条件 (B₁) 和 (B₂). 我们只需验证条件 (B₃) 成立. 根据文献 [9, 引理 3.3], 存在常数 $\varepsilon > 0$ 使得 $\mu(e^{\varepsilon|\cdot|^2}) < \infty$. 由 (3.11) 知,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\xi \neq \eta} \frac{\Phi_t(\xi, \eta)}{|\xi - \eta|^2} = 0,$$

因此, 存在常数 $t_0 > 0$ 使得

$$(\mu \times \mu)(e^{2\Phi_{t_0}}) < \infty. \quad (3.12)$$

故 (B₃) 成立.

最后验证定理 2.1(2) 中的条件. 另一方面, 令 X_0 的分布为不变测度 μ , 从而, 对于任意的 $t \geq 0$, X_t 的分布也是 μ . 对 $X = X_1$ 应用文献 [8, 定理 2.4 和 3.1], 存在连续密度函数 ρ 使得 $\mu(d\xi) = \rho(\xi)d\xi$. 再根据文献 [10, 命题 3.1], Harnack 不等式 (1.5) 蕴含 ρ 是严格正的函数. 因此, ρ 在紧集上是一致正的函数. 由此结合 (3.11) 可知, 存在常数 $\alpha > 0$ 和正函数 $G \in C(\mathbb{R}^{m+d})$ 使得

$$\begin{aligned} \mu(e^{-(1 \vee \frac{1}{2\varepsilon_0})\Phi_t(\xi, \cdot)}) &\geq e^{-1 \vee \frac{1}{2\varepsilon_0}} \mu(\Phi_t(\xi, \cdot) \leq 1) \geq e^{-1 \vee \frac{1}{2\varepsilon_0}} \mu(\{\eta : \alpha|\eta - \xi|^2 \leq t^{4m}\}) \\ &\geq G(\xi)t^{2m(d+m)}, \quad t \in (0, 1], \quad \varepsilon_0 > 0. \end{aligned}$$

因此, 存在充分小的常数 $\varepsilon_0 > 0$ 使得

$$\int_0^1 \{\mu(e^{-(1 \vee \frac{1}{2\varepsilon_0})\Phi_t(\xi, \cdot)})\}^{-\varepsilon_0} dt < \infty.$$

故定理 2.1(2) 中的条件满足. □

最后, 考虑两个具体例子.

例 3.2 令 $d = m$, M 可逆, $A = 0, B = I$, 且 $Z(x, y) = \nabla W(x) - x - y$, 其中 $W \in C^2(\mathbb{R}^d)$, 则条件 (H₁) 成立. 如果 $\|\nabla^2 W\|_\infty$ 足够小使得

$$1 > \inf_{r_0 \in (0, 1)} \left\{ \frac{\|\nabla^2 W\|_\infty^2}{2r_0(1 - \|\nabla^2 W\|_\infty)(1 + \sqrt{1 + 4r_0})} + \frac{r_0}{2}(1 + \sqrt{1 + 4r_0}) \right\},$$

则由文献 [9, 例 5.1] 的证明知条件 (H₂) 也成立. 从而, 由定理 3.1 知, 对于所有满足 (3.2) 或 (3.3) 的函数 A , 定理 1.1 的论断均成立.

例 3.3 设 M 可逆, $m = kd$, 其中 $k \geq 2$ 为自然数, 且 A, B 和 Z 满足

$$\begin{aligned} By &= (0, \dots, 0, y) \in \mathbb{R}^{kd}, \quad y \in \mathbb{R}^d, \\ Z(x, y) &= b(y) - x_k, \quad y \in \mathbb{R}^d, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{kd}, \\ A(x_1, x_2, \dots, x_k) &= (\gamma x_2 - x_1, \gamma x_3 - x_2, \dots, \gamma x_k - x_{k-1}, 0), \quad x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

其中 $\gamma \neq 0$ 为常数, $b: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. 如果存在常数 $K, \beta > 0$ 使得

$$|b(y) - b(\bar{y})| \leq K|y - \bar{y}|, \quad \langle b(y) - b(\bar{y}), y - \bar{y} \rangle \leq -\beta|y - \bar{y}|^2, \quad y, \bar{y} \in \mathbb{R}^d, \quad (3.13)$$

且

$$0 < |\gamma| < 1 \wedge \frac{2\beta}{2 + K^2}, \quad (3.14)$$

则由文献 [9, 例 5.2] 的证明知条件 (H₁) 和 (H₂) 成立. 从而, 由定理 3.1 知, 对于所有满足 (3.2) 或 (3.3) 的函数 A , 定理 1.1 的论断均成立.

4 半线性随机偏微分方程

考虑可分的 Hilbert 空间 $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$, 以及 $\mathbb{H}$ 上的正定自伴算子 $(A_0, \mathcal{D}(A_0))$. 设 A_0 具有离散谱, 它的所有特征值 (记重根数) $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ 满足如下条件:

$$\text{存在 } \theta \in (0, 1) \text{ 使得 } \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-\theta} < \infty. \quad (4.1)$$

令 $\{e_i\}_{i \geq 1}$ 相应的单位特征向量组成了 $\mathbb{H}$ 的标准正交基. 对于 $x \in \mathbb{H}$, 令 $x_i = \langle x, e_i \rangle$, $i \geq 1$, 则 $x = \sum_{i \geq 1} x_i e_i$. 设 $\{\beta_t^i\}_{i \geq 1}$ 为一列独立的一维 Brown 运动, 则 $\mathbb{H}$ 上的标准柱形 Brown 运动为

$$W_t := \sum_{i \geq 1} \beta_t^i e_i.$$

设 $Z: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ 为 Lipschitz 连续的, 且存在常数 $\lambda > 0$ 使得

$$\langle Z(x) - Z(y), x - y \rangle \leq \sum_{i \geq 1} (\lambda_i - \lambda) |x_i - y_i|^2, \quad x, y \in \mathbb{H}. \quad (4.2)$$

考虑 $\mathbb{H}$ 上的半线性随机偏微分方程

$$dX_t = \{Z(X_t) - A_0 X_t\} dt + dW_t. \quad (4.3)$$

由文献 [7, 定理 3.1.1], 任给 $x \in \mathbb{H}$, (4.3) 具有唯一的从 x 出发的温和解 X_t^x . 令 P_t 为相应的 Markov 半群.

定理 4.1 假设存在常数 $\theta \in (0, 1)$ 和 $\lambda > 0$ 使得 (4.1) 和 (4.2) 成立, 则对所有具有 2 次增长的可测函数 A , 即存在常数 $C > 0$ 使得

$$|A(x)| \leq C(1 + |x|^2), \quad x \in \mathbb{H}, \quad (4.4)$$

定理 1.1 的论断均成立.

证明 由定理 2.1, 只需建立 Harnack 不等式 (1.5) 使得 Φ 满足 $(B_1)-(B_3)$, 且证明条件 (C_1) 和 (C'_2) 成立.

由文献 [7, 定理 3.2.1], 存在常数 $c > 0$ 使得

$$|P_t f(x)|^2 \leq (P_t f^2(y)) e^{\frac{c|x-y|^2}{t}}, \quad t \in (0, 1], \quad x, y \in \mathbb{H}. \quad (4.5)$$

再由 (4.4) 知,

$$d|X_t^x - X_t^y|^2 \leq -2\lambda |X_t^x - X_t^y|^2 dt,$$

从而,

$$|X_t^x - X_t^y|^2 \leq e^{-2\lambda t} |x - y|^2, \quad t \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{H}.$$

由此代入 (4.4) 并使用 Jensen 不等式, 可得

$$(P_{1+t} f(x))^2 \leq E(P_1 f(X_t^x))^2 \leq E(P_1 f^2(X_t^y)) e^{c|x-y|^2 \exp[-2\lambda t]} = (P_{1+t} f^2(y)) e^{c|x-y|^2 \exp[-2\lambda t]}.$$

结合 (4.4) 知, 存在常数 $\delta > 0$ 使得 (1.5) 对于如下的 Φ 成立:

$$\Phi_t(x, y) := \frac{\delta |x - y|^2}{t}, \quad t > 0, \quad x, y \in \mathbb{H}. \quad (4.6)$$

显然, Φ 满足条件 (B₁) 和 (B₂).

为证 (B₃), 首先证明 P_t 存在不变概率测度 μ . 令 $V_1(x) = \sum_{i \geq 1} \lambda_i^{-\theta} x_i^2$. 由 (4.1), 可使用 Itô 公式得到

$$dV_1(X_t) \leq c_1 - c_2 \sum_{i \geq 1} \lambda_i^{1-\theta} \langle X_t, e_i \rangle^2 + 2 \langle A_0^{-\theta} X_t, dW_t \rangle.$$

令 $F(x) = \sum_{i \geq 1} \lambda_i^{1-\theta} x_i^2$, 则 F 为 $\mathbb{H}$ 上的紧函数, 且

$$\frac{1}{t} \int_0^t P_s F(0) ds \leq \frac{c_1}{c_2} < \infty, \quad t > 0.$$

故 P_t 具有不变概率测度 μ , 且 $\mu(F) < \infty$.

现在对于 $\mathbb{H}_1 = \{0\}$ 使用文献 [9, 引理 4.3] (或对目前模型重复该证明) 可知, 条件 (4.1) 和 (4.2) 蕴含

$$\text{存在 } \varepsilon > 0 \text{ 使得 } \sup_{t > 0} \mathbb{E} e^{\varepsilon |X_t^0|^2} < \infty. \quad (4.7)$$

故 $\mu(e^{\varepsilon |\cdot|^2}) < \infty$, 从而, 由 (4.6) 知 (B₃) 成立.

最后, 由 $\mu(e^{\varepsilon |\cdot|^2}) < \infty$ 和 (4.4) 知, (C₁) 成立. 故仅需证明条件 (C'₂). 由于

$$X_t^x = e^{-A_0 t} x + \int_0^t e^{-A_0(t-s)} Z(X_s^x) ds + \int_0^t e^{-A_0(t-s)} dW_s,$$

由 $|Z(x)| \leq C(1 + |x|)$ 以及条件 (4.1) 易知, 对于任意的 $p \in (1, \infty)$, 存在常数 $C_p > 0$ 使得

$$\sup_{t \in [0, 1]} \mathbb{E} |X_t^x|^2 \leq C_p (1 + |x|^p), \quad x \in \mathbb{H}. \quad (4.8)$$

从而, 由 (4.4) 知, 对于所有的 $\theta > 0$, $\int_0^\theta \mathbb{E} |A(X_s^x)|^{1+\theta} ds$ 都关于 x 局部有界. 另一方面, 由 (4.1) 和 (4.2), 我们对函数 $V_2(x) = \sum_{i \geq 1} \lambda_i^{-1} x_i^2$ 使用 Itô 公式得

$$dV_2(X_t) \leq c_3 - c_4 |X_t|^2 + 2 \langle A_0^{-1} X_t, dW_t \rangle,$$

其中 $c_3, c_4 > 0$ 为常数. 故任给 $\varepsilon > 0$, 有

$$\mathbb{E} e^{c_4 \varepsilon \int_0^t |X_s^x|^2} \leq e^{\varepsilon c_3 t + \varepsilon V_2(x)} \mathbb{E} e^{2\varepsilon \langle A_0^{-1} X_s^x, dW_s \rangle} \leq e^{\varepsilon c_3 t + \varepsilon V_2(x)} (\mathbb{E} e^{16\varepsilon^2 \lambda_1^{-2} \int_0^t |X_s^x|^2 ds})^{\frac{1}{2}}.$$

令 $\varepsilon = \frac{c_4 \lambda_1^2}{16}$, 并使用标准的停时逼近确保 $\mathbb{E} e^{c_4 \varepsilon \int_0^t |X_s^x|^2 ds} < \infty$, 得到

$$e^{c_4 \varepsilon \int_0^t |X_s^x|^2 ds} \leq e^{2\varepsilon c_3 t + \varepsilon V_2(x)}.$$

结合 (4.4), 任给 $t > 0$ 存在常数 $\delta_t > 0$ 使得 $\mathbb{E} e^{\delta_t \int_0^t |A(X_s^x)| ds}$ 关于 x 局部有界. 所以条件 (C'₂) 成立. $\square$

致谢 感谢高付清教授和审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Kontoyiannis I, Meyn S P. Spectral theory and limit theorems for geometrically ergodic Markov processes. *Ann Appl Probab*, 2003, 13: 304–362
- 2 Wu L M. Uniformly integrable operators and large deviations for Markov processes. *J Funct Anal*, 2000, 172: 301–376

- 3 Gao F Q. Long time asymptotics of unbounded additive functionals of Markov processes. *Electron J Probab*, 2017, 22: 1–21
- 4 Wang F Y. Harnack inequality for SDE with multiplicative noise and extension to Neumann semigroup on nonconvex manifolds. *Ann Probab*, 2011, 39: 1449–1467
- 5 Wang F Y. Logarithmic Sobolev inequalities on noncompact Riemannian manifolds. *Probab Theory Related Fields*, 1997, 109: 417–424
- 6 Wang F Y. Harnack inequalities on manifolds with boundary and applications. *J Math Pures Appl* (9), 2010, 94: 304–321
- 7 Wang F Y. *Harnack Inequalities and Applications for Stochastic Partial Differential Equations*. Berlin: Springer, 2013
- 8 Wang F Y. Integration by parts formula and shift Harnack inequality for stochastic equations. *Ann Probab*, 2014, 42: 994–1019
- 9 Wang F Y. Hypercontractivity and applications for stochastic Hamiltonian systems. *J Funct Anal*, 2017, 272: 5360–5383
- 10 Wang F Y, Yuan C. Harnack inequalities for functional SDEs with multiplicative noise and applications. *Stochastic Process Appl*, 2011, 121: 2692–2710
- 11 Wang F Y, Zhang X C. Derivative formula and applications for degenerate diffusion semigroups. *J Math Pures Appl* (9), 2013, 99: 726–740
- 12 Villani C. Hypocoercivity. *Mem Amer Math Soc*, 2009, 202: 1–146
- 13 Guillin A, Wang F Y. Degenerate Fokker-Planck equations: Bismut formula, gradient estimate and Harnack inequality. *J Differential Equations*, 2012, 253: 20–40

Application of Harnack inequality to long time asymptotics of Markov processes

Fengyu Wang & Yu Zhang

Abstract In this paper, long time asymptotics and limit theorems of additive functionals are investigated for Markov processes by using the dimension-free Harnack inequality, such that existing conditions are simplified and relaxed. The general result is applied to the stochastic Hamiltonian systems and semilinear stochastic partial differential equations such that limit theorems are proved for degenerate diffusions as well as infinite-dimensional diffusions.

Keywords long time asymptotics, additive functional, Harnack inequality, stochastic Hamiltonian system, semilinear stochastic partial differential equation

MSC(2010) 60J60, 58J65

doi: 10.1360/N012017-00127