线性格中 t -交反链的 LYM-型不等式

献给徐利治教授 95 华诞

陈北方^①, 王军^{②*}

① 香港科技大学数学系, 香港;

② 上海师范大学数学系, 上海 200234

E-mail: mabfchen@ust.hk, jwang@shnu.edu.cn

收稿日期: 2015-01-30; 接受日期: 2015-04-20; * 通信作者

RGC Competitive Earmarked Research Grants (批准号: 600811) 和国家自然科学基金 (批准号: 11171224 和 11231004) 资助项目

摘要 线性格 $L_n(q)$ 是 q 元域上 n 维线性空间的所有子空间组成的格. 两个子空间称为 t -交的, 如果它们交空间的维数不小于 t . 已知线性格的 1-交反链满足 LYM (Lubell-Yamamoto-Meschalkin)-型不等式, 本文讨论线性格中 t -交反链的 LYM-型不等式, 并在一些特殊情形下证明该不等式.

关键词 线性格 交族 LYM-型不等式

MSC (2010) 主题分类 05D05, 06A07

1 引言

设 X 是有限集, 用 2^X 表示 X 的所有子集的集合, $\binom{X}{k}$ 表示 X 的所有 k 元子集的集合. 子集的集合也称为子集族. $\binom{X}{k}$ 的势即熟知的二项式系数 $\binom{n}{k}$, 这里 $n = |X|$. 对于整数 $m \leq n$, 用 $[m, n]$ 来表示集合 $\{m, m+1, \dots, n\}$, $[1, n]$ 则简记为 $[n]$, 用 B_n 表示 $[n]$ 的所有子集的集合, 即

$$B_n = \bigcup_{k=0}^n \binom{[n]}{k}.$$

$\binom{[n]}{k}$ 有时也记作 $B_{n,k}$. 给定一个正整数 t 以及一个子集族 $\mathcal{A}$, 称 $\mathcal{A}$ 为一个 t -交族, 如果对任意的 $A, B \in \mathcal{A}$ 均有 $|A \cap B| \geq t$ 成立. 1-交族简称为交族. 著名的 EKR (Erdős-Ko-Rado) 定理^[1] 是说: 如果 $\mathcal{A}$ 是 $B_{n,k}$ 中的交族, 其中 $k \leq \frac{n}{2}$, 则 $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}$. Katona^[2] 给出了这个定理一个简单的证明. Bollobás^[3] 利用 Katona 的方法将 EKR 定理拓展为: 如果 $\mathcal{A}$ 是一个交反链 (即 $\mathcal{A}$ 中的子集之间没有包含关系), 则

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{|\mathcal{A}_k|}{\binom{n-1}{k-1}} \leq 1,$$

其中 $\mathcal{A}_k = \{A \in \mathcal{A} : |A| = k\}$. 这个不等式称为 LYM-型不等式, 因为 Lubell (1966), Yamamoto (1954) 和 Meschalkin (1963) 曾独立地研究过这种类型的不等式.

英文引用格式: Chen B F, Wang J. LYM-type inequality for t -intersecting antichains in linear lattices (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 1513–1522, doi: 10.1360/N012015-00064

有限集上的组合问题通常会有一个有限线性空间的模拟. 设 q 是一个素数的方幂, $\mathbb{F}_q$ 表示 q 元域, $V_n = \mathbb{F}_q^n$ 表示 $\mathbb{F}_q$ 上 n -维向量空间, $L_n(q)$ 表示 V_n 的所有子空间的集合. 给定 V_n 的一个子空间 W , 用 $\begin{bmatrix} W \\ k \end{bmatrix}$ 表示 W 的所有 k -维子空间族, 特别地, $\begin{bmatrix} V_n \\ k \end{bmatrix}$ 也记作 $L_{n,k}(q)$. 熟知 $\begin{bmatrix} W \\ k \end{bmatrix}$ 的基数为

$$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{[m-i]_q}{[k-i]_q},$$

其中 $m = \dim(W)$, 对任意的实数 x , $[x]_q$ 定义为 $\frac{q^x-1}{q-1}$. 在不会造成混淆的情形下, 把 $\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q$ 简记为 $\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}$, $L_n(q)$ 和 $L_{n,k}(q)$ 也分别简记作 L_n 和 $L_{n,k}$. 设 $\text{GL}(V_n)$ 为 V_n 上的一般线性群, 由 V_n 上的所有可逆线性变换组成.

一个子空间族 $\mathcal{A}$ 称为 t -交的, 如果对任意的 $A, B \in \mathcal{A}$ 都有 $\dim(A \cap B) \geq t$. 与子集族的情形类似, 这里也有子空间族的交反链或 t -交反链的概念. 关于线性空间的 EKR 定理叙述为: 如果 $\mathcal{A}$ 是 $L_{n,k}$ 中的交族, 其中 $k \leq \frac{n}{2}$, 则 $|\mathcal{A}| \leq \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$. 这个结果首先是由 Hsieh^[4] 对 $k < \frac{n}{2}$ 的情形证明的, 后来由 Greene 和 Kleitman^[5] 对 $k \mid n$ 的情形给出了一个漂亮的证明. 更一般地, Frankl 和 Wilson^[6] 证明了, 如果 $\mathcal{A}$ 是 $L_{n,k}$ 中的 t -交族, 则

$$|\mathcal{A}| \leq \begin{cases} \begin{bmatrix} n-t \\ k-t \end{bmatrix}, & \text{如果 } t \leq k \leq \frac{n}{2}, \\ \begin{bmatrix} 2k-t \\ k \end{bmatrix}, & \text{如果 } \frac{n}{2} \leq k \leq \frac{n+t}{2}. \end{cases}$$

给定一个 $C \in L_{n,t}$, 定义 $L_{n,k}[C] = \{A \in L_{n,k} : C \subseteq A\}$. 由上述结果可见, 当 $t \leq k \leq \frac{n}{2}$ 时, $L_{n,k}[C]$ 是 $L_{n,k}$ 中一个最大的 t -交族. 而当 $\frac{n}{2} \leq k \leq \frac{n+t}{2}$ 时, 任取 V_n 的一个 $2k-t$ 维子空间 W , $\begin{bmatrix} W \\ k \end{bmatrix}$ 是 $L_{n,k}$ 中一个最大的 t -交族.

本文第二作者 Wang^[7] 给出了线性空间的交反链的 LYM 不等式: 如果 $\mathcal{A}$ 是 L_n 中的交反链, 则

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{|\mathcal{A}_k|}{\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}} \leq 1, \quad (1.1)$$

其中 $\mathcal{A}_k = \mathcal{A} \cap L_{n,k}$. 这个结果解决了 Erdős 等人^[8] 提出的猜想. 结合 Frankl 和 Wilson 的结果, 我们有如下的猜想.

猜想 1.1 如果 $\mathcal{A}$ 是 L_n 中的 t -交反链, 则

$$\sum_{t \leq k \leq \frac{n}{2}} \frac{|\mathcal{A}_k|}{\begin{bmatrix} n-t \\ k-t \end{bmatrix}} + \sum_{\frac{n}{2} < k \leq \frac{n+t}{2}} \frac{|\mathcal{A}_k|}{\begin{bmatrix} 2k-t \\ k \end{bmatrix}} \leq 1. \quad (1.2)$$

注意, 不等式 (1.1) 是通过证明如下不等式得到的: 如果 $\mathcal{A}$ 是 $L_{n,k}$ 中的交族, 其中 $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$, 则

$$\frac{|\nabla \mathcal{A}|}{|\mathcal{A}|} \geq \frac{\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}}, \quad (1.3)$$

这里 $\nabla \mathcal{A} = \{B \in L_{n,k+1} : \text{存在一个 } A \in \mathcal{A} \text{ 使得 } A \subset B\}$. 文献 [7] 给出了 (1.3) 的两个证明, 一是利用有限线性空间的 EKR 定理以及 Chowdhury 和 Patkós^[9] 的一个结果 (详见下节), 二是一个群论的方法. 第一个证明非常简单, 但要用到线性空间的 EKR 定理, 第二个证明则不需要用 EKR 定理. 利用这两种方法均可以将不等式证明 (1.3) 推广到 t -交族的情形, 即有下面的定理.

定理 1.2 令 $\mathcal{A} \subseteq L_{n,k}$ 是一个 t -交族, 其中 $1 \leq t < k \leq \frac{n}{2}$, 则

$$\frac{|\nabla \mathcal{A}|}{|\mathcal{A}|} \geq \frac{\binom{n-t}{k-t+1}}{\binom{n-t}{k-t}}. \quad (1.4)$$

由此可得下面的定理.

定理 1.3 如果 $\mathcal{A}$ 是 L_n 中的 t -交反链, 则

$$\sum_{t \leq k \leq \frac{n}{2}} \frac{|\mathcal{A}_k|}{\binom{n-t}{k-t}} \leq 1.$$

注意定理 1.3 只涉及 (1.2) 中的第一个和式, 已有方法对第二个和式却无能为力. 本文将继续发展群论的方法并证明如下结果.

定理 1.4 设 $\mathcal{A}$ 是 $L_n(q)$ 中的交反链, 其中 $n = 2r + 1$, 则当 q 充分大时,

$$\sum_{1 \leq k \leq r} \frac{|\mathcal{A}_k|}{\binom{n-1}{k-1}} + \frac{|\mathcal{A}_{r+1}|}{\binom{n}{r+1}} \leq 1. \quad (1.5)$$

第 2 节在偏序集的框架内阐述定理 1.2 与 1.3 的关系, 并给出这两个定理的证明; 第 3 节阐述我们的群论的方法, 并证明关于 $L_{n,k}$ 中交族的补空间的族的一个有意思且实用的结果; 第 4 节利用第 3 节的结果给出定理 1.4 的证明, 并对猜想 1.1 作进一步的讨论.

2 偏序集的广义正规匹配性质和 LYM 性质

设 $(P, \leq)$ 是一个有限偏序集, 这里的 $\leq$ 是定义在 P 上的满足自反性、反对称性和传递性的二元关系. 在不致引起混淆时, 常把 $(P, \leq)$ 简记为 P . 如果一个偏序中任意两个元素都存在唯一的最小上界和最大下界, 则称为一个格 (lattice). 下面讨论的偏序集大部分的都是格.

P 中两两可比元素的集合称为 P 的一个链, 而 P 中两两不可比元素的集合称为 P 的一个反链. 如果 P 的每个极大链有相同的长度 n , 则称 P 是秩为 n 的分次偏序集 (graded poset). 本文讨论的偏序集均为有限分次偏序集, 此时存在一个秩函数 $\rho: P \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ 使得对 P 的每个极小元素 x 有 $\rho(x) = 0$, 而当 z 覆盖 y 时, $\rho(z) = \rho(y) + 1$. $P_i = \{x \in P: \rho(x) = i\}$ 称为 P 的第 i 个秩集. 上文提到的 B_n 和 L_n 都是秩为 n 的分次格, 它们的第 k 个秩集分别是 $B_{n,k}$ 和 $L_{n,k}$, $k = 0, 1, \dots, n$. B_n 称为子集格或 Bool 格, L_n 称为子空间格或线性格.

以下假设 P 是一个秩为 n 的分次偏序集. 显然, 每个秩集 P_i 都是一个反链. 如果其中某个秩集构成这个偏序集的一个最大阶反链, 则称这个偏序集具有 Sperner 性质. 称 P 具有 LYM 性质, 如果对 P 的每一个反链 A , 下面的 LYM 不等式成立:

$$\sum_{i=0}^n \frac{|A_i|}{|P_i|} \leq 1,$$

其中 $A_i = A \cap P_i$ (下同). 对 $A \subseteq P_i$, 定义

$$\begin{aligned} \nabla(A) &= \{b \in P_{i+1}: \text{存在一个 } a \in A \text{ 使得 } b \geq a\}, \\ \Delta(A) &= \{b \in P_{i-1}: \text{存在一个 } a \in A \text{ 使得 } b \leq a\}, \end{aligned}$$

分别称为 A 的上影 (shade) 和下影 (shadow).

称 P 具有正规匹配性质 (normalized matching property, 简称 NM 性质), 如果

$$\frac{|\nabla(A)|}{|A|} \geq \frac{|P_{i+1}|}{|P_i|}, \quad \text{对所有的 } A \subseteq P_i, i = 0, 1, \dots, r(P) - 1, \quad (2.1)$$

或等价地

$$\frac{|\Delta(A)|}{|A|} \geq \frac{|P_{i-1}|}{|P_i|}, \quad \text{对所有的 } A \subseteq P_i, i = 1, \dots, r(P). \quad (2.2)$$

熟知, 偏序集的 LYM 性质和 NM 性质是等价的 (参见文献 [10, 11]), 它们蕴含 Sperner 性质.

判断一个偏序集是否具有 NM 性质需要刻画具有最小的上影或下影的子集族. Kruskal^[12] 和 Katona^[13] 独立地给出了子集格中一个子集族中下影的下界, 这是极值组合学中一个深刻的结果, 但更常用的是 Lovász^[14] 给出的这个结果的弱一些的表述: 如果 $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$, $|\mathcal{A}| = \binom{x}{k}$, 其中 $x \geq k$ 是一个实数, 则 $|\Delta\mathcal{A}| \geq \binom{x}{k-1}$. 最近, Chowdhury 和 Patkós^[9] 得到了 Lovász 结果的线性格的模拟: 如果 $\mathcal{A} \subseteq L_{n,k}$ 使得 $|\mathcal{A}| = \binom{x}{k}$, 其中 $x \geq k$ 是一个实数, 则 $|\Delta\mathcal{A}| \geq \binom{x}{k-1}$. 等式成立当且仅当 x 是一个整数, 且存在一个 x 维子空间 $X \subseteq V_n$ 使得 $\mathcal{A} = \binom{X}{k}$.

现将偏序集的这两个性质加以推广.

设 $\sim$ 是定义在 P 上的自反和对称的二元关系, 设 $\mathfrak{p}$ 是 P 的子集族, 使得其中任一子集中的元素两两具有关系 $\sim$, 并且满足如果 $A \in \mathfrak{p}_k$, 则 $\nabla(A) \in \mathfrak{p}_{k+1}$, 其中 $\mathfrak{p}_k = \{A \subset P_k : A \in \mathfrak{p}\}$. $\mathfrak{p}$ 中的子集称为 $\mathfrak{p}$ -子集, $\mathfrak{p}$ 中的反链称为 $\mathfrak{p}$ -反链. 我们用 $\alpha(\mathfrak{p}_k)$ 表示 $\mathfrak{p}_k$ 中子集的最大阶数. 称 P 具有秩 k 的 $\mathfrak{p}$ -NM 性质, 如果对任意的 $A \subseteq \mathfrak{p}_k$, 均有

$$\frac{|\nabla(A)|}{\alpha(\mathfrak{p}_{k+1})} \geq \frac{|A|}{\alpha(\mathfrak{p}_k)};$$

称 P 具有秩 k 的 $\mathfrak{p}$ -LYM 性质 ($0 \leq k \leq n$), 如果对任意的 $\mathfrak{p}$ -反链 A , 均有

$$\sum_{i=0}^k \frac{|A_i|}{\alpha(\mathfrak{p}_i)} \leq 1,$$

其中 $A_i = A \cap P_i$.

定理 2.1 设 P 为秩是 n 的有限偏序集, 如果 P 有秩 $i = 0, 1, \dots, k-1$ 的 $\mathfrak{p}$ -NM 性质, 那么, P 具有秩 k 的 $\mathfrak{p}$ -LYM 性质.

证明 设 A 是 $\mathfrak{p}$ 中任一反链, 设 t 是最小的整数使得 $t \leq k$ 并且 $A_t \neq \emptyset$. 如果 $t = k$, 则结论显然成立. 现在假设 $t < k$, 并对 $k-t$ 作数学归纳法. 由定义知, $B = (A \setminus A_t) \cup \nabla(A_t)$ 仍然是一个 $\mathfrak{p}$ -反链, 满足 $B_t = \emptyset$, $B_{t+1} = \nabla A_t \cup A_{t+1}$, 并且对 $i > t+1$ 有 $B_i = A_i$. 于是,

$$\begin{aligned} \sum_{i=t}^k \frac{|A_i|}{\alpha(\mathfrak{p}_i)} &\leq \frac{|\nabla A_t|}{\alpha(\mathfrak{p}_{t+1})} + \sum_{i=t+1}^k \frac{|A_i|}{\alpha(\mathfrak{p}_i)} = \frac{|\nabla A_t| + |A_{t+1}|}{\alpha(\mathfrak{p}_{t+1})} + \sum_{i=t+2}^k \frac{|A_i|}{\alpha(\mathfrak{p}_i)} \\ &= \frac{|\nabla A_t \cup A_{t+1}|}{\alpha(\mathfrak{p}_{t+1})} + \sum_{i=t+2}^k \frac{|A_i|}{\alpha(\mathfrak{p}_i)} \leq 1. \end{aligned}$$

上式最后的不等式是由归纳法得到的. 证毕. $\square$

粗略地讲, 这个定理证明 $\mathfrak{p}$ -NM 性质蕴含了 $\mathfrak{p}$ -LYM 性质, 但定理 1.4 说明这个定理的逆命题是不对的. 现在用 Chowdhury 和 Patkós 的结果证明定理 1.2.

定理 1.2 的证明 对任意一个 $A \in L_{n,k}$, 可以自然地定义它的补空间 $A^\perp \in L_{n,n-k}$. 例如, 取定 A 的一组基, 以这些基为行向量排成一个秩为 k 的 $k \times n$ 矩阵 $M(A)$, 则 $A^\perp$ 可以定义为线性方程组 $M(A)X = \mathbf{0}$ 的解空间 (本文中用 $\mathbf{0}$ 表示零向量), 于是, $A^\perp$ 是唯一的, 且满足 $A \subseteq B \Leftrightarrow A^\perp \supseteq B^\perp$. 现在设 $\mathcal{A}$ 为 $L_{n,k}$ 中的 t -交族, 其中 $k \leq n/2$, 并设 $\mathcal{A}^\perp = \{A^\perp : A \in \mathcal{A}\}$, 则 $|\mathcal{A}^\perp| = |\mathcal{A}| \leq \begin{bmatrix} n-t \\ k-t \end{bmatrix}$, $|\Delta \mathcal{A}^\perp| = |\nabla \mathcal{A}|$. 记 $|\mathcal{A}^\perp| = \begin{bmatrix} x \\ n-k \end{bmatrix}$, 其中 x 是一个实数. 由 $\begin{bmatrix} x \\ n-k \end{bmatrix} = |\mathcal{A}^\perp| = |\mathcal{A}| \leq \begin{bmatrix} n-t \\ k-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-t \\ n-k \end{bmatrix}$ 得 $x \leq n-t$. 又从 Chowdhury 和 Patkós 的结果知, $|\nabla \mathcal{A}| = |\Delta \mathcal{A}^\perp| \geq \begin{bmatrix} x \\ n-k-1 \end{bmatrix}$, 于是,

$$\frac{|\nabla \mathcal{A}|}{|\mathcal{A}|} \geq \frac{\begin{bmatrix} x \\ n-k-1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} x \\ n-k \end{bmatrix}} = \frac{q^{n-k} - 1}{q^{x-n+k+1} - 1}.$$

显然, 这是一个关于 x 的递减函数, 由此马上得到所需的不等式. 证毕. $\square$

由定理 1.2 和 2.1 马上得到定理 1.3.

3 群论的方法

设 $(P, \leq)$ 是一个秩为 n 的分次偏序集, Γ 是一个群保序而且保秩地作用于 P 上. 对于 $x \in P$, 记 $\Gamma x = \{\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\}$, 即 x 在 Γ 作用下的轨道. 用 P/Γ 表示这样的所有轨道的集合, 在其上定义一个偏序 $\leq_\Gamma$ 如下:

$$\Gamma x \leq_\Gamma \Gamma y \text{ 当且仅当存在 } x' \in \Gamma x, y' \in \Gamma y \text{ 使得 } x' \leq y'.$$

于是, $(P/\Gamma, \leq_\Gamma)$ 构成一个新的偏序集, 称为 P 在 Γ 作用下的商偏序集. 于是, 存在 P 到 P/Γ 的一个同态 (保序而且保秩的) 映射 $\phi : P \rightarrow P/\Gamma$, $\phi(x) = \Gamma x$, $x \in P$. 同时可以在这个商偏序集上定义一个权函数 $\omega(\Gamma x) = |\Gamma x|$.

用群论方法研究本文中提到的极值问题的第一个不平凡的结果是 Kleitman 等人^[15] 给出的, 他们证明了, 存在 P 的一个最大阶反链在 Γ 作用下不变, 换言之, 它是 P/Γ 中具有最大权的反链. 用这个结果马上可以得到 B_n 和 L_n 具有 Sperner 性质, 因为这两个格都是秩传递的, 即每个秩集都是一个轨道, 因此, 最大的秩集就是一个最大阶反链. 本文第二作者 Wang^[16] 用这个结果证明了一类交换 p -群的子群格具有 Sperner 性质的猜想 (也可参见文献 [17]). Kleitman 等人的结果的 NM 形式见如下结果, 为方便引用, 我们将它叙述为一个定理.

定理 3.1^[18] 设偏序集 P 和群 Γ 如上, 则对每一个 $k < n$, 存在一个 $A \subseteq P_k$, 使得 A 在 Γ 的作用下不变, 且

$$\frac{|\nabla A|}{|A|} = \min \left\{ \frac{|\nabla B|}{|B|} : B \subseteq P_k \right\}. \quad (3.1)$$

与 Sperner 性质类似, 用这个结果马上可以得到 B_n 和 L_n 具有 NM 性质. 另外注意到, 上述定理只涉及偏序集的两个秩集 P_k 和 P_{k+1} , P 的限制在这两个秩集上的 Hasse 子图是一个二部图, 它以 P_k 和 P_{k+1} 为两个部, 对于 $a \in P_k, b \in P_{k+1}$, a 和 b 有边连接当且仅当 $a \leq b$. 这时, $\nabla(a)$ 即 a 的邻域. 事实上, 上述定理对任意的二部图都是成立的. 作为这个定理的一个应用, 我们证明下面的结果.

引理 3.2 设 $\mathcal{A} \subseteq L_{n,k}[C]$, 其中 C 为 V_n 的一个给定的一维子空间. 定义

$$\overline{\mathcal{A}} = \{B \in L_{n,n-k} : \text{存在某个 } A \in \mathcal{A} \text{ 使得 } B \cap A = \{\mathbf{0}\}\},$$

则 $|\overline{\mathcal{A}}| \geq |\mathcal{A}|q^{n-k}$.

证明 考虑二部图 $G(X, Y)$, 其中 $X = L_{n,k}$, $Y = L_{n,n-k}$, 其边集为所有对 (A, B) , 满足 $A \in L_{n,k}$, $B \in L_{n,n-k}$ 且 $A \cap B = \{\mathbf{0}\}$. 将 X 划分成两部分:

$$X_1 = \{A \in X : C \subseteq A\}, \quad X_2 = X \setminus X_1.$$

于是有

$$|X_1| = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}, \quad |X_2| = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} q^k.$$

对 Y 也作同样的划分 $Y = Y_1 \cup Y_2$,

$$|Y_1| = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}, \quad |Y_2| = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-k \end{bmatrix} q^{n-k} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} q^{n-k}.$$

显然, $\overline{X_1} = Y_2$. 该命题其实要证明

$$\frac{|\overline{\mathcal{A}}|}{|\mathcal{A}|} \geq \frac{|Y_2|}{|X_1|}.$$

设 Γ_C 表示 $\text{GL}(V_n)$ 在 C 点的稳定子群, 即由 V_n 上的保持 C 不变的线性变换构成的群. 熟知, Γ_C 在 X_1 上的诱导作用是传递的, 即 X_1 本身是 X_1 的唯一非空子集, 在 Γ_C 的作用下不变. 现在 Y_2 上定义一个二元关系 $\sim$: 对于 $A, B \in Y_2$, $A \sim B$ 当且仅当 $A+C = B+C$. 显然, 这是一个等价关系, 用 $[A]$ 表示 A 所在的等价类, 则 $Y_2 = \bigcup_{A \in Y_2} [A]$ 是 Y_2 的一个划分, 并且 $A \in \mathcal{A}$ 蕴含 $[A] \subset \overline{\mathcal{A}}$. 易见, Γ_C 在 Y_2 的等价类上的诱导作用也是传递的. 因此, 由定理 3.1 马上可以得到要证的不等式. 证毕. $\square$

我们猜想引理中的结果对任意的交族都成立, 但若没有引理的条件 (即 $\mathcal{A}$ 中每个子空间都包含一个固定的一维子空间), 我们一般无法找到一个非平凡的群会保持一个交族不变, 因此需要作更细致的分析.

在 V_n 中取定一组基 $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$, 设 $T_n(\mathbf{v})$ 为 $\text{GL}(V_n)$ 中所有在这组基下的矩阵是上三角矩阵的线性变换构成的群. 现在考虑商偏序集 $L_n/T_n(\mathbf{v})$. 对每个 $v \in V_n \setminus \{0\}$, 定义 $\phi_{\mathbf{v}}(v) = i$, 如果 v 在 $\mathbf{v}$ 下的坐标的第一个非零分量出现在第 i 个位置上. 对于 $A \in L_n$, 定义 $\phi_{\mathbf{v}}(A) = \{\phi_{\mathbf{v}}(v) : v \in A \setminus \{0\}\}$, 则 $\phi_{\mathbf{v}}(A) \in B_{n,k}$ 当且仅当 $A \in L_{n,k}$. 以下将用希腊字母表示 B_n 中的元素.

通常取 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 为 V_n 中的标准基, 即 e_i 的第 i 个分量为 1, 其余分量均为 0. 这时把 $T_n(\mathbf{v})$ 记作 T_n , 把 $\phi_{\mathbf{v}}$ 记作 ϕ . 由线性代数的知识, 这样的选取不失一般性.

给定一个 $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \in B_{n,k}$, 记 $\phi^{-1}(\alpha) = \{A \in L_{n,k} : \phi(A) = \alpha\}$. 文献 [19] 证明了 $\phi^{-1}(\alpha)$ 是群 T_n 作用的轨道, 因此, ϕ 是 $L_{n,k}/T_n$ 到 $B_{n,k}$ 的同构映射. 文献 [20, 第 29 页] 给出了计算 $|\phi^{-1}(\alpha)|$ 的一个直观的方法: 设 $1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq n$, 则任意的 $A \in \phi^{-1}(\alpha)$ 都有唯一的一个有序基 $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ (行向量) 满足: (a) v_i 的第一个非零元素是 1, 出现在第 a_i 列; (b) 对于 $i = 1, \dots, k$, 第 a_i 列中只有一个 1, 其余都为零. 称这个基为 A 的 rref-基. 如果将这个基排成一个矩阵, 则构成一个阶梯型的矩阵, 记为 $M(A)$. 例如, 如果 $\phi(A) = \{1, 3, 4, 6\} \in B_8$, 则 $M(A)$ 具有如下形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \end{pmatrix},$$

其中 $*$ 表示 $\mathbb{F}_q$ 中的任意元素. 容易看到, 这里起主要作用的是有 $*$ 的列, $M(A)$ 的这个 $k \times (n-k)$ 阶子矩阵记为 $M'(A)$. 在上面的例子中, $M'(A)$ 形如

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix},$$

称这样的矩阵为 α -型矩阵, 其中第 i 行 $*$ 的个数记为 $\lambda_i = n - k - a_i + i$, 则 $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$. 令 $t(\alpha)$ 表示 α -型矩阵中 $*$ 的总数, 则

$$t(\alpha) = \sum_{i=1}^k \lambda_i = \sum_{i=1}^k (n - k - a_i + i) = kn - \binom{k}{2} - \|\alpha\|, \quad (3.2)$$

其中 $\|\alpha\| = \sum_{a \in \alpha} a$. 于是, 可知 $\phi^{-1}(\alpha)$ 中包含 $q^{t(\alpha)}$ 个子空间. 因此, L_n 上的极值问题可以通过 (B_n, ω) 来考虑, 其中 ω 是 B_n 上的权函数, 定义为 $\omega(\alpha) = q^{t(\alpha)}$.

给定一个 $\alpha = \{a_1, \dots, a_k\} \in B_{n,k}$, 我们考虑 $\phi^{-1}(\alpha)$ 中的交族.

设 $\mathcal{A}_\alpha$ 为 $\phi^{-1}(\alpha)$ 中的一个最大阶交族. 用 A_0 表示 $*$ 处全取 0 时所代表的子空间, 由对称性, 不妨假设 A_0 包含在 $\mathcal{A}_\alpha$ 中. 显然, 如果 $n < 2k$, 则 $\mathcal{A}_\alpha = \phi^{-1}(\alpha)$. 现在假设 $n \geq 2k$, 即 $n - k \geq k$. 对任意的 $A, B \in \mathcal{A}_\alpha$, 设其 rref-基分别为 $\{v_1, \dots, v_k\}$ 和 $\{w_1, \dots, w_k\}$, 则存在非零向量 $(x_1, \dots, x_k)$ 和 $(y_1, \dots, y_k)$ 使得 $x_1 v_1 + \dots + x_k v_k = y_1 w_1 + \dots + y_k w_k$. 比较分量可得 $(x_1, \dots, x_k) = (y_1, \dots, y_k)$, 即有

$$x_1(v_1 - w_1) + \dots + x_k(v_k - w_k) = (x_1, \dots, x_k)[M(A) - M(B)] = \mathbf{0}. \quad (3.3)$$

显然, $M(A) - M(B)$ 的第 a_i 列都是 0, $i = 1, 2, \dots, k$. 忽略这些列, 我们得到一个 k 个未知量 $n - k$ 个方程的线性方程组

$$(x_1, \dots, x_k)[M'(A) - M'(B)] = \mathbf{0}.$$

由此可见, $M'(A) - M'(B)$ 是退化的, 特别地, $M'(A)$ 和 $M'(B)$ 都是退化的 (因为 $M'(A_0)$ 是零矩阵). 由此还可见, 如果存在某个 i , $1 \leq i \leq k$, 使得 $\lambda_i \leq k - i$, 则方程组 (3.3) 的系数矩阵是退化的, 这时亦有 $\mathcal{A}_\alpha = \phi^{-1}(\alpha)$.

引理 3.3 设 $\alpha \in B_{n,k}$ 满足 $n \geq 2k$, $\lambda_i > k - i$, $i = 1, \dots, k$, 则 $|\mathcal{A}_\alpha| = 1$, 如果 $k = 1$; $|\mathcal{A}_\alpha| = q^{\lambda_1}$, 如果 $k = 2$. 一般地, $|\mathcal{A}_\alpha| = o(q^{t(\alpha)})$, 意为它作为 q 的多项式的次数不超过 $t(\alpha)$.

证明 当 $k = 1$ 和 $k = 2$ 时, 结论显然成立. 当 $k > 1$ 时, 显然, $M'(\mathcal{A}_\alpha)$ 矩阵的总数是 $q^{t(\alpha)}$ 个, 其中非退化矩阵的个数是

$$(q^{\lambda_k} - 1)(q^{\lambda_{k-1}} - q) \cdots (q^{\lambda_1} - q^{k-1}) = q^{t(\alpha)} - \sum_{i=1}^k q^{t(\alpha) - \lambda_i + k - i} + \dots.$$

因此, 其差的次数为 $\max\{t(\alpha) - \lambda_i + k - i : i = 1, \dots, k\} < t(\alpha)$, 这是因为 $\lambda_i > k - i$. 证毕. $\square$

定理 3.4 设 $\mathcal{A}$ 为 $L_{n,k}$ 的一个非空交族, 其中 $n \geq 2k$, 则当 q 充分大时, $|\overline{\mathcal{A}}| \geq |\mathcal{A}|q^{n-k}$.

证明 熟知, 对任意的 $A \in L_{n,k}$, $|\{A\}| = q^{(n-k)k}$, 因此, 作为 q 的多项式 $|\overline{\mathcal{A}}|$ 的次数记为 $\partial(|\mathcal{A}|)$, $\partial(|\mathcal{A}|) = (n-k)k$. 另外, $|\overline{\mathcal{A}}| \leq \binom{n-1}{k-1}$, 后者的次数是 $(n-k)(k-1)$, 两者之差恰好是 $n-k$. 因此, 如果 $\partial(|\overline{\mathcal{A}}|) < (n-k)(k-1)$, 则当 q 充分大时一定有 $|\overline{\mathcal{A}}| \geq |\mathcal{A}|q^{n-k}$. 因此, 我们假设 $\partial(|\overline{\mathcal{A}}|) = (n-k)(k-1)$.

显然, 存在 $C_1, \dots, C_m \in L_{n,1}$ 使得 $\mathcal{A} \subseteq L_{n,k}[C_1] \cup \dots \cup L_{n,k}[C_m]$. 如果 $m = 1$, 定理的结论由引理 3.3 得到. 假设 $m > 1$, 则

$$\partial(|\mathcal{A}|) = \max\{\partial(|\mathcal{A} \cap L_{n,k}[C_i]|) : i = 1, \dots, m\} = (n-k)(k-1).$$

假设有 $C \in L_{n,1}$ 使得 $\partial(|\mathcal{A} \cap L_{n,k}[C]|) = (n-k)(k-1)$. 我们断言, 存在 $A, B \in \mathcal{A} \cap L_{n,k}[C]$ 使得 $\dim(A \cap B) = 1$ (否则 $\mathcal{A} \cap L_{n,k}[C]$ 是 2- 交的, 其次至多是 $(n-k)(k-2)$). 这时取 V_n 的一组有序基 $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ 使得 $v_n = C$, $\{v_1, \dots, v_{k-1}, C\}$ 是 A 的基, $\{v_{n-k+1}, \dots, v_{n-1}, C\}$ 是 B 的基. 不失一般性, 我们假设 $\mathbf{v}$ 就是 V_n 的标准基. 记 $\phi(A) = \alpha$, $\phi(B) = \beta$. 于是有 $\alpha = [k-1] \cup \{n\}$, $\beta = [n-k-1, n]$. 由 (3.2) 知, $t(\alpha) = (n-k)(k-1)$, $t(\beta) = 0$, 而且, 这是 $B_{n,k}$ 中唯一的分别是权最大和最小的两个元素. 由上面的假设, 我们得到

$$\partial(|\mathcal{A} \cap \phi^{-1}(\alpha)|) = (n-k)(k-1).$$

因为 $\mathcal{A}$ 中存在不包含 C 的子空间, 设为 G , 记 $\phi(G) = \gamma$, 则 $\gamma \cap \alpha \neq \emptyset$ 而且 $\gamma \cap \beta \neq \emptyset$. 如果 $t(\gamma) < t(\alpha)$, 则 γ 的存在不影响定理的结果. 设 $t(\gamma) \geq t(\alpha)$, 则 $1 \in \gamma$ 或 $\gamma = [2, k-1] \cup \{n-k+1\}$. 无论如何 $\sigma := \gamma \cap [k-1] \neq \emptyset$, 并且 $\mathcal{A} \cap \phi^{-1}(\alpha)$ 与 $\mathcal{A} \cap \phi^{-1}(\gamma)$ 相交于 $\phi^{-1}(\sigma)$ 中. 再者, 因为 C 包含在 $\mathcal{A} \cap \phi^{-1}(\alpha)$ 的每一个子空间中, 因此, $\phi^{-1}(\sigma)$ 中每一个向量的最后一个分量不影响它们与 $\mathcal{A} \cap \phi^{-1}(\alpha)$ 的相交性, 换言之, 我们只需要考虑 $\phi^{-1}(\sigma)$ 在 V_{n-1} 中的投影. 类似地, 我们可以忽略 $(\alpha \cup \gamma) \setminus \sigma$ 那些列的分量. 例如, 设 $\alpha = \{1, 2, 3, 8\}$, $\gamma = \{1, 3, 4, 6\} \subset B_{8,4}$, $A \in \phi^{-1}(\alpha)$, $B \in \phi^{-1}(\gamma)$. 则在考虑 A 和 B 的相交性时, 我们必须考虑的是将 $M(A)$ 划掉第 2 和第 4 行, 并划掉第 2, 4, 6, 8 列, 剩下的余子阵记为 $M(A')$; 将 $M(B)$ 划掉第 3 和第 4 行, 并划掉与 $M(A)$ 同样的列, 剩下的余子阵记为 $M(B')$. 这时, 如果 A 与 B 相交, $M(A')$ 与 $M(B')$ 必须满足方程 (3.3). 这时, $M'(A)$ 和 $M'(B)$ 均是 2×2 阶的, 随着 A 和 B 的任意性, $M(A')$ 与 $M(B')$ 的元素可以任取. 在一般情形下, $M'(A')$ 和 $M'(B')$ 是 $r \times (n-2k+r)$ 阶的, 其元素是任意的. 对任意的 $A \in \mathcal{A} \cap \phi^{-1}(\alpha)$, 因为要与 $\mathcal{A} \cap \phi^{-1}(\gamma)$ 中的子空间相交, 因此, 它的相应的子矩阵元素选取的任意性受到限制, 由引理 3.3 知, $\partial(\mathcal{A} \cap \phi^{-1}(\alpha)) < t(\alpha) = (n-k)(k-1)$, 与假设矛盾. 证毕. $\square$

本文第二作者用上述方法给出了定理 1.2 中当 $t = 1$ 时的证明, 那个证明可以推广到 $t > 1$ 的情形, 详见文献 [7], 这里不再赘述.

4 关于猜想 1.1 的讨论

易见当 $k > n/2$ 时, L_n 中的交族不具有秩为 k 的 NM 性质, 但是, 其 LYM 不等式依然可能成立. 例如, 在定理 1.4 中取 $L_{n,r}$ 中的一个最大交族为 $\mathcal{A}_r = L_{n,r}[C]$, 其中 C 是 1 维子空间, 则 $\nabla \mathcal{A}_r = L_{n,r+1}[C]$. 但是, $L_{n,r+1}$ 中的最大交族是它本身, 因此, 容易验证, 它不具有秩 r 的 NM 性质. 现在来证明它仍然具有 LYM 性质.

定理 1.4 的证明 由 (1.3) 和定理 2.1, 我们只需要证明

$$\frac{|\mathcal{A}_r|}{\binom{n-1}{r-1}} + \frac{|\mathcal{A}_{r+1}|}{\binom{n}{r+1}} = \frac{|\mathcal{A}_r|}{\binom{n-1}{r-1}} + \frac{|\mathcal{A}_{r+1}|}{\binom{n}{r}} \leq 1$$

(注意, 因为 $n = 2r + 1$, 所以, $\binom{n}{r+1} = \binom{n}{r}$). 事实上, 因为 $L_{n,r+1}$ 本身是个交族, 因此, $\mathcal{A}_{r+1} \subseteq L_{n,r+1} \setminus (\overline{\mathcal{A}_r} \cup \nabla \mathcal{A}_r)$, 于是, 由定理 3.4 和 (1.3) 有

$$\frac{|\mathcal{A}_r|}{\binom{n-1}{r-1}} + \frac{|\mathcal{A}_{r+1}|}{\binom{n}{r}} \leq \frac{|\mathcal{A}_r|}{\binom{n-1}{r-1}} + \frac{\binom{n}{r} - |\overline{\mathcal{A}_r}| - |\nabla \mathcal{A}_r|}{\binom{n}{r}} = 1 + \frac{|\mathcal{A}_r|}{\binom{n}{r}} \left(\frac{\binom{n}{r}}{\binom{n-1}{r-1}} - \frac{|\overline{\mathcal{A}_r}|}{|\mathcal{A}_r|} - \frac{|\nabla \mathcal{A}_r|}{|\mathcal{A}_r|} \right)$$

$$\begin{aligned} &\leq 1 + \frac{|A_r|}{\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}} \left(\frac{\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} q^{n-k}}{\begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}} - \frac{|\nabla A_r|}{|A_r|} \right) \\ &= 1 + \frac{|A_r|}{\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}} \left(\frac{\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}} - \frac{|\nabla A_r|}{|A_r|} \right) \leq 1. \end{aligned}$$

证毕. $\square$

这个结果是对猜想 1.1 的支持. 一般地, LYM 型不等式成为等式的充要条件是所涉及的反链是齐次的而且是最大的, 即它是一个秩集中最大的满足要求的子集族. 这就提供了一个验证 LYM 型不等式的方法, 即考察的反链包含在两个连续的秩集中使得较小秩的部分取到最大, 然后看较大秩的部分是否一定是空集. 如果不空, 则 LYM 不等式显然不成立, 反之则可能成立.

例 4.1 设 $n = 2r$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 V_n 的一组基, W 是 $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ 生成的 $n-1$ 维子空间, $A_r = L_{n,r}[e_n]$, $A_{r+1} = \begin{bmatrix} W \\ r+1 \end{bmatrix}$. 易见 $A = A_r \cup A_{r+1}$ 是个交反链, 但

$$\frac{|A_r|}{\begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}} + \frac{|A_{r+1}|}{\begin{bmatrix} n \\ r+1 \end{bmatrix}} = 1 + \frac{\begin{bmatrix} n-1 \\ r+1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} n \\ r+1 \end{bmatrix}} > 1,$$

即 LYM 不等式不成立. 但在此例中如果 A 是 2-交族时, 其 LYM 不等式为

$$\sum_{2 \leq k \leq r} \frac{|A_k|}{\begin{bmatrix} n-2 \\ k-2 \end{bmatrix}} + \frac{|A_{r+1}|}{\begin{bmatrix} n \\ r+1 \end{bmatrix}} \leq 1, \quad (4.1)$$

则可能成立, 而且可用证明定理 1.4 类似的方法去证明. 因为涉及较复杂的计算, 限于篇幅, 我们对此不作进一步讨论.

对于一般的 $\frac{n}{2} \leq r \leq \frac{n+t}{2}$, $L_{n,r}$ 中最大 t -交族为 $\begin{bmatrix} W \\ r \end{bmatrix}$, 其中 W 为 V_n 中的一个 $2r-t$ 维子空间. 对任意一个 $A \in L_{n,r+1}$, 如果 $\dim(A \cap W) \geq r$, 则 $A \in \nabla \begin{bmatrix} W \\ r \end{bmatrix}$; 如果 $\dim(A \cap W) < r$, 则 A 必定与 $\begin{bmatrix} W \\ r \end{bmatrix}$ 中某个子空间相交的维数小于 t , 因此, 不存在更大的 t -交反链. 这就是我们相信猜想 1.1 成立的理由.

参考文献

- 1 Erdős P, Ko C, Rado R. Intersection theorems for systems of finite sets. *Quart J Math Oxford Ser*, 1961, 12: 313–320
- 2 Katona G. A simple proof of the Erdős-Chao Ko-Rado theorem. *J Combin Theory Ser B*, 1972, 13: 183–184
- 3 Bollobás B. Sperner systems consisting of pairs of complementary subsets. *J Combin Theory Ser A*, 1973, 15: 363–366
- 4 Hsieh W N. Intersection theorems for systems of finite vector spaces. *Discrete Math*, 1975, 12: 1–16
- 5 Greene C, Kleitman D J. Proof techniques in the ordered sets. In: *Studies in Combinatorics*. Washington: Mathematical Association of America, 1978, 22–79
- 6 Frankl P, Wilson R M. The Erdős-Ko-Rado theorem for vector spaces. *J Combin Theory Ser A*, 1986, 43: 228–236
- 7 Wang J. Intersecting antichains and shadows in linear lattices. *J Combin Theory Ser A*, 2011, 118: 2092–2101
- 8 Erdős P L, Faigle U, Kern W. A group-theoretic setting for some intersecting Sperner families. *Combin Probab Comput*, 1992, 1: 323–334
- 9 Chowdhury A, Patkós B. Shadows and intersections in vector spaces. *J Combin Theory Ser A*, 2010, 117: 1095–1106
- 10 Anderson I. *Combinatorics of Finite Sets*. Oxford: Oxford University Press, 1987
- 11 Engel K. *Sperner Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997
- 12 Kruskal J B. The number of simplices in a complex. In: *Mathematical Optimization Techniques*. Berkeley: University of California Press, 1963, 251–278
- 13 Katona G. A theorem of finite sets. In: *Proceedings of the Colloquium on the Theory of Graphs*, Tihany, Hungary, 1966. New York: Academic Press, 1968, 187–207

- 14 Lovász L. Combinatorial Problems and Exercises. 2nd ed. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1993
- 15 Kleitman D, Edelman M, Lubell D. Maximal sized antichains in partial orders. Discrete Math, 1971, 1: 47–53
- 16 Wang J. Proof of a conjecture on the Sperner property of the subgroup lattice of an abelian p -group. Ann Comb, 1998, 2: 85–101
- 17 Wang J, Wang Y. Strong Sperner property of the subgroup lattice of an abelian p -group. Sci China Ser A, 2000, 43: 693–702
- 18 Wang J. Normalized matching property of the subgroup lattice of an abelian p -group. Discrete Math, 2002, 257: 559–574
- 19 Wang J. Quotient sets and subset-subspace analogy. Adv Appl Math, 1999, 23: 333–339
- 20 Stanley R P. Enumerative Combinatorics, vol. I. Monterey: Wadsworth and Brooks/Cole, 1986

LYM-type inequality for t -intersecting antichains in linear lattices

CHEN BeiFang & WANG Jun

Abstract The linear lattice $L_n(q)$ is the lattice of subspaces of the n -dimensional vector space over the field of q elements. Two subspaces are called t -intersecting if the dimension of their intersection is greater than or equal to t . It is well known that 1-intersecting antichains in $L_n(q)$ satisfy LYM-type inequality. In this paper, we discuss the LYM-type inequality for t -intersecting antichains, and establish it in some special cases.

Keywords linear lattice, intersecting family, LYM-type inequality

MSC(2010) 05D05, 06A07

doi: 10.1360/N012015-00064