波源转移区域分解算法: 时谐弹性波方程

陈志明^①, 崔涛^①, 向雪霜^{②*}^① 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190^② 中国空间技术研究院钱学森空间技术实验室, 北京 100094

* 通信作者. E-mail: xiangxueshuang@qxslab.cn

收稿日期: 2016-04-05; 接受日期: 2016-07-07; 网络出版日期: 2016-10-25

国家重点基础研究发展计划 (973) (批准号: 2011CB309701)、国家高技术研究发展计划 (863) (批准号: 2012AA01A30901)、国家自然科学基金 (批准号: 11501559, 91430215, 91530323, 11321061) 和中国科学院国家数学与交叉科学研究中心 (NCMIS) 资助项目

摘要 陈志明等针对求解时谐声波散射问题提出了波源转移区域分解算法, 并给出了严格的收敛性分析. 本文将波源转移区域分解算法推广到求解时谐弹性波散射问题. 我们使用谱元法离散时谐弹性波方程, 将波源转移区域分解算法作为 GMRES 迭代算法的预条件子去求解离散问题. 数值算例表明波源转移区域分解算法可以作为常波数或变波数时谐弹性波散射问题的有效预条件子. 对于常波数问题, 当采用适当高阶谱元格式降低离散误差时, 以波源转移区域分解算法作为预条件子的 GMRES 迭代算法只需要非常少的迭代步数即可收敛.

关键词 Helmholtz 方程 时谐弹性波方程 高频波 谱元法 完美匹配层方法 波源转移

1 引言

本文将文献 [1] 中提出的波源转移区域分解算法推广到如下时谐弹性波问题:

$$\nabla \cdot \tau(\mathbf{u}) + \gamma^2 \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{in } \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^2)'$ 具有紧支集, $\gamma^2 = \rho_0 \omega^2$, ω 为角频率, ρ_0 为密度. 这里只考虑各项同性的线性介质, 对应的 Lamé 常数为 λ 和 μ . 在这样的假设下, 应力张量和位移向量 $\mathbf{u}$ 满足如下 Hooke 定律:

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}, \quad i, j = 1, 2, \quad (2)$$

其中 ε 是应变张量, 定义如下:

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(D\mathbf{u} + (D\mathbf{u})^T),$$

$D\mathbf{u}$ 是位移向量的梯度场, $(D\mathbf{u})_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$, $i, j = 1, 2$. 该时谐弹性波散射问题的解 $\mathbf{u}$ 需要满足 Kurpadze-Sommerfeld 散射边界条件. 具体可以参考文献 [2].

引用格式: 陈志明, 崔涛, 向雪霜. 波源转移区域分解算法: 时谐弹性波方程. 中国科学: 信息科学, 2016, 46: 1359–1371, doi: 10.1360/N112016-00067

弹性波方程广泛出现在许多科学与工程应用中, 时谐弹性波问题和 Helmholtz 问题一样, 同样面临着大波数问题求解的困难, 主要包括: 巨大的未知量个数和离散问题的高度不定性. 因此, 研究高效稳定的大波数离散问题求解器一直是科学计算领域关注的热点. 很多文献在离散 Helmholtz 问题的求解上提出了一些有效算法, 例如 Benamou 和 Després^[3]、Gander 等^[4] 使用的区域分解方法, 以及 Brandt 和 Livshits^[5]、Elman 等^[6] 使用的多重网格方法. 最近几年, 很多类似扫描形式的区域分解算法被提出^[7~12], 并被作为有效的预条件使用.

受文献 [13] 启发, 文献 [1, 14] 提出了波源转移区域分解算法, 用来求解 Helmholtz 散射问题的截断完美匹配层方程. 该算法的基本想法是将区域先沿着某一个方向划分成若干不重叠的层状区域, 然后将波源通过波源转移算法一层层进行等价转移而并不改变最后一层中的解. 由于波源被等价转移到了倒数第二层, 因此我们可以在最后两层周围添加完美匹配层求解最后一层区域中的解. 再根据最后一层的解和波源转移过程中的波源一层层求解每一层区域中的解. 基于对完美匹配层方程基本解的分析, 文献 [1] 中严格证明了常波数问题下波源转移区域分解算法最优收敛性. Wu 等^[15] 提出了改进的波源转移区域分解算法, 他们发现 Helmholtz 问题的解可以被表示成两个独立部分的求和, 其中每一个部分可以通过波源转移算法得到, 该算法在理论分析上与波源转移算法类似.

本文将波源转移区域分解算法推广到了求解时谐弹性波方程. 其中方程通过谱元法离散, 使用文献 [2] 中提出的时谐弹性波方程的完美匹配层方法来确保完美匹配层方法的收敛性. 我们将波源转移区域分解算法作为 GMRES 迭代算法的预条件子去求解离散问题. 通过数值算例, 发现波源转移区域分解算法可以作为 GMRES 迭代算法的高效预条件子. 在常波数情况下, 如果离散误差被有效控制, GMRES 迭代法的迭代步数几乎与波数无关. 当离散误差足够小的时候, 针对角频率 $\omega/2\pi = 100, 200$, GMRES 迭代算法只需要 1 到 4 步迭代就能使代数方程组的解的迭代相对误差下降到 10^{-10} 以下. 数值结果表明求解时谐弹性波方程的波源转移区域分解算法与其求解 Helmholtz 散射问题时的结论一致: 离散误差越小, 预条件子的效果就越好. 文中给出了 Marmousi 模型的数值结果, 它表明波源转移区域分解算法对于变波数问题也可以作为一个非常高效的预条件子.

本文的安排如下: 第 2 节介绍求解时谐弹性波方程的完美匹配层方法. 第 3 节提出针对完美匹配层方程的波源转移区域分解算法. 我们将在第 4 节中通过谱元方法来离散截断完美匹配层方程. 第 5 节将介绍预条件的并行实现和常波数及变波数下的数值算例. 以此验证波源转移区域分解算法作为预条件子的高效性.

2 完美匹配层方法

假设波源 f 的紧支集在矩形 $B_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < l_1, |x_2| < l_2\}$ 中. 完美匹配层方程的推导依赖于在 B_1 外面进行复坐标延拓 $\tilde{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ (具体想法见文献 [16]), 其中 $F: \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_1 \rightarrow \mathbb{C}^2$ 是一个复值函数. 在以下的讨论中假设在 B_1 中 $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

定义 $\alpha_j(x_j) = 1 + (\zeta + i)\sigma_j(x_j)$, $j = 1, 2$, 其中 $\zeta > 0$ 为常数且当 $t \in \mathbb{R}$, $\sigma_j(t) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ 为一个分片光滑函数, 对 $j = 1, 2$, 它满足

$$\sigma_j(t) = \sigma_j(-t), \quad \sigma_j = 0 \text{ for } |t| \leq l_j, \quad \text{and } \sigma_j = \gamma_0 > 0 \text{ for } |t| \geq \bar{l}_j, \quad (3)$$

这里 $\bar{l}_j > l_j$ 为固定的常数, $\gamma_0 > 0$ 为常数. 对于 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, 定义 $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = (\tilde{x}_1(x_1), \tilde{x}_2(x_2))^T$ 为复坐标, 其中

$$\tilde{x}_j(x_j) = \int_0^{x_j} \alpha_j(t) dt = x_j + (\zeta + i) \int_0^{x_j} \sigma_j(t) dt, \quad j = 1, 2. \quad (4)$$

由于 $\tilde{x}_j(x_j)$ 只依赖于 x_j , 因此该类完美匹配层方法被叫做单轴完美匹配层方法.

由上定义了复坐标延拓函数 $F(\mathbf{x})$, 其 Jacobi 矩阵为 $DF(\mathbf{x}) = \text{diag}\{\alpha_1(x_1), \alpha_2(x_2)\}$. 定义矩形 $B_2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < l_1 + d_1, |x_2| < l_2 + d_2\}$ 包含 B_1 , $\Gamma_2 = \partial B_2$. 针对时谐弹性波方程 (1) 的解 $\mathbf{u}$, 定义 $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}})$, 由链式法则可以推导定义在无界区域上的完美匹配层方程如下 [2]:

$$\nabla \cdot (\tilde{\tau}(\tilde{\mathbf{u}})C) + J\gamma^2 \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_1. \quad (5)$$

这里

$$\tilde{\tau}_{ij} = 2\mu\tilde{\varepsilon}_{ij} + \lambda\delta_{ij}\tilde{\varepsilon}_{kk}, \quad \tilde{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}(D\tilde{\mathbf{u}}B^T + B(D\tilde{\mathbf{u}})^T),$$

其中 $B(\mathbf{x}) = DF^{-T}(\mathbf{x})$ 和 $C(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x})B(\mathbf{x})$. 方程 (5) 需要在弱意义下理解. 基于复坐标延拓的定义, 解 $\tilde{\mathbf{u}}$ 在区域 B_1 外迅速衰减, 因而可以对方程 (5) 进行截断 (详细分析见文献 [2]), 由此可以得到定义在区域 B_2 上的截断完美匹配层方程的如下弱形式:

求 $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}(B_2) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(B_2), \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{B_2} = 0 \text{ on } \Gamma_2\}$, 其中 $\mathbf{n}_{B_2}$ 为区域 B_2 的外法向量, 使得

$$\int_{B_2} (\hat{\tau}(\hat{\mathbf{u}})C : \nabla \bar{\psi} - J\gamma^2 \hat{\mathbf{u}} \cdot \bar{\psi}) d\mathbf{x} = -\langle J\mathbf{f}, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in \mathbf{V}(B_2), \quad (6)$$

其中, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 $L^2(B_2)$ 的内积,

$$\hat{\tau}_{ij} = 2\mu\hat{\varepsilon}_{ij} + \lambda\delta_{ij}\hat{\varepsilon}_{kk}, \quad \hat{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}(D\hat{\mathbf{u}}B^T + B(D\hat{\mathbf{u}})^T),$$

根据文献 [2] 中分析, 为保证完美匹配层方法的收敛性, 取完美匹配层中的参数满足 $\zeta = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\mu}$.

3 完美匹配层方程的波源转移区域分解算法

首先介绍波源转移区域分解算法中使用的一些记号. 对任意的实数 $a, b \in \mathbb{R}$, 定义 $\Omega(a, b) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : a < x_2 < b\}$. 用记号 $\Omega(-\infty, b)$ 表示半空间 $\{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_2 < b\}$. 记 $-l_2 = \zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_{N+1} = l_2$, $N > 1$, 为区间 $(-l_2, l_2)$ 的一个剖分. 为了简化讨论, 本文假设 $\zeta_i = \zeta_1 + (i-1)\Delta\zeta$, 其中 $\Delta\zeta = 2l_2/N$. 定义 $\Omega_i = \Omega(\zeta_i, \zeta_{i+1})$ 和 $\Gamma_i = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \zeta_i\}$. 对任意的 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \Omega_i$, 定义 $\beta_i(\mathbf{x}) = \beta_i(x_2)$ 为一个光滑函数, 并且满足

$$\beta_i = 1, \beta'_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_i, \quad \beta_i = \beta'_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_{i+1}, \quad |\beta'_i| \leq C(\Delta\zeta)^{-1} \quad \text{in } (\zeta_i, \zeta_{i+1}). \quad (7)$$

波源转移区域分解算法包含波源转移算法和波展开算法两部分, 这两个子算法要求用完美匹配层包裹住区域 $(-l_1, l_1) \times (\zeta_i, \zeta_{i+2})$. 因此需要定义区域 $(-l_1, l_1) \times (\zeta_i, \zeta_{i+2})$ 外的复坐标延拓形式, 记为 $F_i(\mathbf{x})$, 定义如下: 记 $\tilde{x}_i(\mathbf{x}) = (\tilde{x}_{i,1}(x_1), \tilde{x}_{i,2}(x_2))^T$, 其中 $\tilde{x}_{i,1}(x_1) = \tilde{x}_1(x_1)$ 并且

$$\tilde{x}_{i,2}(x_2) = \begin{cases} x_2 + i \int_{\zeta_{i+2}}^{x_2} \sigma_2(t + \zeta_{N+1} - \zeta_{i+2}) dt, & \text{if } x_2 > \zeta_{i+2}, \\ x_2, & \text{if } \zeta_i \leq x_2 \leq \zeta_{i+2}, \\ x_2 + i \int_{\zeta_i}^{x_2} \sigma_2(t - \zeta_i + \zeta_1) dt, & \text{if } x_2 < \zeta_i. \end{cases} \quad (8)$$

F_i 的 Jacobi 矩阵为 $DF_i(\mathbf{x}) = \text{diag}\{\alpha_1(x_1), \tilde{x}_{i,2}(x_2)'\}$, 因此 $J_i(\mathbf{x}) = \det(DF_i(\mathbf{x})) = \alpha_1(x_1)\tilde{x}_{i,2}(x_2)'$. 记 $B_i(\mathbf{x}) = DF_i^{-T}(\mathbf{x})$, $C_i(\mathbf{x}) = J_i(\mathbf{x})B_i(\mathbf{x})$, $\gamma_1 = \frac{d_2}{\sqrt{d_2^2 + (l_{\min} + d_1 + d_2)^2}}$, 其中 $l_{\min} = \min\{l_1, l_2\}$. 本文和文献 [1] 中一样假设完美匹配层方法中参数满足

$$(H1) \quad d_1 = 2d_2 \quad \text{and} \quad \int_{l_1}^{l_1+d_2} \sigma_1(t)dt = \int_{l_2}^{l_2+d_2} \sigma_2(t)dt =: \bar{\sigma}, \quad \int_{l_1+d_2}^{l_1+d_1} \sigma_1(t)dt \geq \bar{\sigma}.$$

定义 f_i 使得在区域 Ω_i 中 $f_i = f|_{\Omega_i}$, 在区域 $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_i$ 中 $f_i = 0$. 由文献 [1] 中求解 Helmholtz 方程波源转移区域分解算法的思想, 本文引入求解截断的完美匹配层方程 (6) 的波源转移算法 (算法 1) 和波展开算法 (算法 2).

算法 1 截断完美匹配层方程 (6) 的波源转移算法

(1) 记 $\hat{f}_1 = f_1$ 在区域 Ω_1 中;

(2) While $i = 1, \dots, N-2$, do

- 求 $\hat{u}_i \in V(\Omega_i^{\text{PML}})$, 其中 $\Omega_i^{\text{PML}} = (-l_1 - d_1, l_1 + d_1) \times (\zeta_i - d_2, \zeta_{i+2} + d_2)$, 使得

$$\int_{\Omega_i^{\text{PML}}} (\hat{\tau}(\hat{u}_i)C_i : \nabla \bar{\psi} - J_i \gamma^2 \hat{u}_i \cdot \bar{\psi}) d\mathbf{x} = -\langle J_i f_i, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in V(\Omega_i^{\text{PML}}),$$

- 计算 $\hat{\psi}_{i+1}(\hat{f}_i) \in V(\Omega_i^{\text{PML}})$ 使得

$$\langle J_i \hat{\psi}_{i+1}(\hat{f}_i), \psi \rangle = -\int_{\Omega_i^{\text{PML}}} (\hat{\tau}(\beta_{i+1} \hat{u}_i)C_i : \nabla \bar{\psi} - J_i \gamma^2 \beta_{i+1} \hat{u}_i \cdot \bar{\psi}) d\mathbf{x}, \quad \forall \psi \in V(\Omega_i^{\text{PML}}).$$

- 定义 $\hat{f}_{i+1} = f_{i+1} + \hat{\psi}_{i+1}(\hat{f}_i)$ 在区域 $\Omega_{i+1} \cap B_2$ 中, 且 $\hat{f}_{i+1} = 0$ 在其他区域.

End while

算法 2 截断完美匹配层方程 (6) 的波展开算法

(1) 求 $\hat{v}_N \in V(\Omega_{N-1}^{\text{PML}})$, 其中 $\Omega_{N-1}^{\text{PML}} = (-l_1 - d_1, l_1 + d_1) \times (\zeta_{N-1} - d_2, \zeta_{N+1} + d_2)$, 使得

$$\int_{\Omega_{N-1}^{\text{PML}}} (\hat{\tau}(\hat{v}_N)C_{N-1} : \nabla \bar{\psi} - J_{N-1} \gamma^2 \hat{v}_N \cdot \bar{\psi}) d\mathbf{x} = -\langle J_{N-1}(f_N + \hat{f}_{N-1}), \psi \rangle, \quad \forall \psi \in V(\Omega_{N-1}^{\text{PML}}).$$

(2) For $i = N-1, \dots, 2$, 求 $\hat{v}_i \in \mathbf{H}^1(D_i^{\text{PML}})$, 其中 $D_i^{\text{PML}} = (-l_1 - d_1, l_1 + d_1) \times (\zeta_{i-1} - d_2, \zeta_{i+1})$, 使得 $\hat{v}_i = \hat{v}_{i+1}$ on $\partial D_i^{\text{PML}} \cap \Gamma_{i+1}$, $\hat{v}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0$ on $\partial D_i^{\text{PML}} \setminus \Gamma_{i+1}$, 并且

$$\int_{\Omega_{i-1}^{\text{PML}}} (\hat{\tau}(\hat{v}_i)C_{i-1} : \nabla \bar{\psi} - J_{i-1} \gamma^2 \hat{v}_i \cdot \bar{\psi}) d\mathbf{x} = -\langle J_{i-1}(f_i + \hat{f}_{i-1}), \psi \rangle, \quad \forall \psi \in \mathbf{V}^0(D_i^{\text{PML}}),$$

其中 $\mathbf{V}^0(D_i^{\text{PML}}) = \{v \in \mathbf{H}^1(D_i^{\text{PML}}) \mid v = 0 \text{ on } \partial D_i^{\text{PML}} \cap \Gamma_{i+1}, v \cdot \mathbf{n}_i = 0 \text{ on } \partial D_i^{\text{PML}} \setminus \Gamma_{i+1}\}$. $\mathbf{n}_i$ 为区域 D_i^{PML} 的外法向量.

定义 $\hat{v} = \hat{v}_N$ 在区域 $\Omega(\zeta_N, +\infty) \cap B_2$ 中, $\hat{v} = \hat{v}_i$ 在区域 $\Omega_i \cap B_2$ 中, $i = 3, \dots, N-1$, 并且 $\hat{v} = \hat{v}_2$ 在区域 $\Omega(-\infty, \zeta_2) \cap B_2$ 中, 则波源转移区域分解算法的输出为 $\hat{v}$. 定义 $\mathbf{T}$ 为方程 (6) 的解算子: $\mathbf{T}(f) = \hat{u}$, 定义 $\hat{\mathbf{T}}$ 为波源转移区域分解算法的输出算子: $\hat{\mathbf{T}}(f) = \hat{v}$. 在时谐弹性波方程的完美匹配层方法的分析中, 收敛性依赖于纵波的波数 $k_p = \gamma / \sqrt{\lambda + 2\mu}$ [2]. 类似于文献 [1] 中对 Helmholtz 方程的分析, $\hat{u}$ 和 $\hat{v}$ 的误差可以被 $k_p^{3N-\frac{7}{2}}(1+k_p L)^2 e^{-\frac{1}{2}k_p \gamma_1 \bar{\sigma}}$ 控制. 因此在应用波源转移区域分解算法时, 首先选择合适的完美匹配层方法中的参数使得 $k_p^{3N-\frac{7}{2}}(1+k_p L)^2 e^{-\frac{1}{2}k_p \gamma_1 \bar{\sigma}}$ 充分小. 后文的数值结果表明波源转移区域分解算法在求解时谐弹性波方程时, 将得到和 Helmholtz 类似的结果: 如果离散误差被充分控制, $\hat{\mathbf{T}}$ 将是 $\mathbf{T}$ 的一个很好的逼近, 因此 $\hat{\mathbf{T}}$ 是 $\mathbf{T}$ 的一个很好的预条件子.

4 谱元法

本节首先简要介绍谱元法, 具体细节可以参考文献 [17]. 记沿着 x_j 方向的网格尺度为 h_j , 并且

$n_j = 2(l_j + d_j)/h_j, j = 1, 2$. 记 $a_0 = -l_1 - d_1$ 和 $a_i = a_0 + ih, i = 1, \dots, n_1$ 使得 $a_{n_1} = l_1 + d_1$. 记 $b_0 = -l_2 - d_2$ 和 $b_j = b_0 + jh, j = 1, \dots, n_2$ 使得 $b_{n_2} = l_2 + d_2$. 因而谱单元定义为 $e_{ij} = (a_{i-1}, a_i) \times (b_{j-1}, b_j)$ 使得

$$\bar{B}_2 = \bigcup_{i=1}^{i=n_1} \bigcup_{j=1}^{j=n_2} \bar{e}_{ij}.$$

谱单元的个数为 $n_1 n_2$. 谱元空间定义为 $H^1(B_2)$ 的一个子空间, 包含了定义在谱单元上的所有阶数小于等于 p 的分片多项式,

$$X_h = \{u \in H^1(B_2) : u|_{e_{ij}} \in P_p(e_{ij}), i = 1, \dots, n_1, j = 1, \dots, n_2\},$$

其中每个谱单元上的基函数为 Gauss-Lobatto-Legendre 积分节点上的 Lagrange 多项式. 提高谱元法的收敛性可以通过增加多项式的阶数或者增加谱单元的数目. 具体形式如下:

记 $\xi^0 = -1 \leq \xi^1 \leq \dots \leq \xi^p = 1$ 为 Gauss-Lobatto-Legendre 积分节点, 其中节点 $\xi^k, k = 1, \dots, p-1$, 是阶数为 p 的 Legendre 多项式 L_p 的导数在区间 $[-1, 1]$ 上的零点,

$$L'_p(\xi^k) = 0, k = 1, \dots, p-1.$$

这些积分节点对应的权重为 $\rho^k, k = 0, \dots, p$. 根据此定义, 对于二维的谱单元 e_{ij} , 其 Gauss-Lobatto-Legendre 积分节点和相应的权重定义如下:

$$\xi_{ij}^{lm} = (a_{i-1} + (\xi^l + 1)h_1/2, b_{j-1} + (\xi^m + 1)h_2/2), \quad (9)$$

$$\rho_{ij}^{lm} = \rho^l \rho^m h_1 h_2 / 4, \quad l, m = 0, \dots, p. \quad (10)$$

在此单元上, 基于 Gauss-Lobatto-Legendre 积分节点, 可以构造 Lagrange 多项式为其基函数, 首先定义

$$\begin{aligned} \phi_{1,i}^l &\in P_p([a_{i-1}, a_i]), \quad \phi_{1,i}^l(a_{i-1} + (\xi^{l'} + 1)h_1/2) = \delta_{ll'}, \quad 1 \leq l, l' \leq p, \\ \phi_{2,j}^m &\in P_p([b_{j-1}, b_j]), \quad \phi_{2,j}^m(b_{j-1} + (\xi^{m'} + 1)h_2/2) = \delta_{mm'}, \quad 1 \leq m, m' \leq p, \end{aligned}$$

再通过张量积定义基函数

$$\phi_{ij}^{lm} = \phi_{1,i}^l \phi_{2,j}^m, \quad \phi_{ij}^{lm} \in P_p(e_{ij}), \quad \phi_{ij}^{lm}(\xi_{ij}^{l'm'}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

对任意 $w_h \in X_h$,

$$w_h|_{e_{ij}} = \sum_{l=1}^{l=p} \sum_{m=1}^{m=p} w_{ij}^{lm} \phi_{ij}^{lm}, \quad i = 1, \dots, n_1, j = 1, \dots, n_2.$$

为了满足谱单元之间函数的连续性, 我们需要当 $\xi_{ij}^{lm} = \xi_{i'j'}^{l'm'}$ 时, $w_{ij}^{lm} = w_{i'j'}^{l'm'}$, 也就是如果自由度对应的节点位置相同, 则它们属于同一个自由度. 因此, X_h 的总自由度为 $(n_1 p + 1)(n_2 p + 1)$.

定义离散空间 $\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v}_h \in (X_h)^2, \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{B_2} = 0\}$. 于是, 弹性波散射问题 (6) 采用谱元法离散得到的离散问题为: 求解 $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ 使得

$$\int_{B_2} (\hat{\tau}(\hat{\mathbf{u}}_h)C : \nabla \bar{\psi}_h - J\gamma^2 \hat{\mathbf{u}}_h \cdot \bar{\psi}_h) \, d\mathbf{x} = -\langle J\mathbf{f}, \psi_h \rangle, \quad \forall \psi_h \in \mathbf{V}_h. \quad (11)$$

在式 (11) 中的积分可以通过著名的 Gauss-Lobatto 积分公式计算: 对任意定义在 B_2 的可积函数 g ,

$$\int_{B_2} g dx \approx \sum_{i=1}^{i=n_1} \sum_{j=1}^{j=n_2} \sum_{l=1}^{l=p} \sum_{m=1}^{m=p} g(\xi_{ij}^{lm}) \rho_{ij}^{lm}. \quad (12)$$

对于算法 1 和 2 中的方程, 采用同样的网格和阶数进行谱元法离散.

5 数值算例

本节将通过常波数和变波数下的两个算例来验证波源转移区域分解算法在求解时谐弹性波问题上的有效性.

我们使用波源转移区域分解算法作为使用 GMRES 迭代法求解离散问题 (11) 的预条件子. 波源转移区域分解算法分为波源转移 (算法 1) 和波展开 (算法 2) 两个部分. 算法 1 和 2 中分别需要求解 $N-2$ 和 $N-1$ 个子问题. 这些子问题对应的离散代数问题也是难以用迭代法求解的, 一般通过直接法求解, 因此会消耗较多的内存, 串行程序难以计算较大波数的问题, 必须要进行算法的并行化. 但是, 由于算法 1 和算法 2 中的子问题相互间存在数据依赖关系, 算法不具备天然的并行性, 因此给算法的并行化带来了挑战.

由于波源转移区域分解算法将作为 GMRES 方法的预条件使用, 每一个 GMRES 迭代步都会进行一次波源转移和波展开, 而算法 1 和算法 2 中的子问题对应的离散问题系数矩阵在每一个 GMRES 迭代步中都是不变的. 这意味着如果采用直接法求解子问题, 那么计算量最大的 LU 分解在每一个 GMRES 迭代步中是一致的, 且各个子问题作 LU 分解时相互间不存在数据相关性, 可以并行实现. 因此本文算例采用了一种两层并行的并行策略实现波源转移区域分解算法的并行化. 记算法 1 中第 i 个子问题对应的离散问题系数矩阵为 $\{S_i\}_{i=1}^{N-2}$, 记算法 2 中第 i 个子问题对应的离散问题系数矩阵为 $\{E_i\}_{i=2}^N$. 矩阵 S_i, E_i 仅依赖于第 i 层的微分方程的系数, 所以这些矩阵并不相关, 可以单独计算其 LU 分解. 将所有参与计算的进程数 P 划分为 $N-2$ 个进程组, 在进程组 i 上分别生成 S_i 和 E_i 并利用直接法对其进行分解求逆 S_i^{-1} 和 E_i^{-1} . GMRES 迭代法中的所有矩阵向量运算采用分布式的矩阵向量运算实现并行化. 下面简要介绍并行波源转移区域分解算法 (算法 3).

在实际计算中, 当波数较大时, 将会使用一个进程组去处理多个子问题. 所有的计算是基于 C 语言和 MPI (消息传递接口), 计算平台为科学与工程计算国家重点实验室的 LSSC-III 机群. 采用并行 MUMPS 软件包^[18,19]对 S_i 和 E_i 矩阵分解求逆. GMRES 迭代法的收敛阈值设为 10^{-10} .

定义 MUMPS 分解求逆的时间为 T_{setup} , GMRES 迭代时间为 T_{solve} , 总的迭代数目为 N_{iter} . 需要说明的是, 本文所使用的并行策略只是为了能够计算更大的波数. 并行效率的研究并不是本文研究的内容, 它非常依赖于子问题的求解效率. 由于波源转移区域分解算法也是扫描类型的算法, 它的时间复杂度分析和文献 [13] 中类似. 文献 [10] 中针对 Helmholtz 方程提出的并行策略可能会提高波源转移区域分裂算法的并行效率.

对 $q \geq 1$, 定义函数

$$\chi(r; a, b, q) = \begin{cases} 0, & \text{if } r < a, \\ \left(\int_a^r (s-a)^q (b-s)^q ds \right) \left(\int_a^b (s-a)^q (b-s)^q ds \right)^{-1}, & \text{if } a \leq r \leq b, \\ 1, & \text{if } r > b. \end{cases}$$

算法 3 并行波源转移区域分解算法**STEP 1** 记 $\hat{f}_1 = f_1$ 在区域 Ω_1 中;**STEP 2** For $i = 1, \dots, N-2$, do

- 1) 在进程组 i 上利用 S_i^{-1} 计算 $\hat{u}_i$;
- 2) 将 $\hat{u}_i$ 从进程组 i 发送给进程组 $i+1$;
- 3) 在进程组 $i+1$ 上计算 $\hat{\psi}_{i+1}(\hat{f}_i)$ 和 $\hat{f}_{i+1}$;

End

STEP 3 将 $\hat{f}_{i-1}$ 从进程组 $i-1$ 发送给进程组 i , 其中 $i = N, \dots, 2$;**STEP 4** For $i = N, \dots, 2$, do

- 1) 在进程组 i 上利用 E_i^{-1} , $\hat{f}_{i-1}$ 和 f_i 计算 $\hat{v}_i$;
- 2) 将 $\hat{v}_i$ 从进程组 i 发送给进程组 $i-1$;

End

容易验证 $\chi(r; a, b, q) \in C^q(\mathbb{R})$. 我们将使用这个函数去定义 σ_i , β_i 和构造真解. 选择 $\beta_i(r) = \chi(\zeta_{i+1} - r; \Delta\zeta/4, 3\Delta\zeta/4, 2)$, $\zeta_i \leq r \leq \zeta_{i+1}$. 当 $l_j < t < \bar{l}_j$, $\sigma_j(t) = \hat{\sigma}_j(t) + (t - l_j)\hat{\sigma}'_j(t)$, 其中 $\sigma_j(t) = \gamma_0\chi(t; l_j, \bar{l}_j, 2)$. 根据 (H1) 的定义, 容易验证 $\bar{\sigma} = \gamma_0 d_2$.

5.1 常波数问题

令 $l_1 = l_2 = 0.5$, $d_1 = 0.2$, $d_2 = 0.1$, 此时 $B_2 = (-0.7, 0.7) \times (-0.6, 0.6)$. 令 $\bar{l}_1 = \bar{l}_2 = 0.58$. 此时区域划分的层数为 $N = 10$. 我们定义沿两个方向网格尺度相等且记为 h . 初始的网格尺度设为 $h_0 = 0.025$.

令 $\lambda = \mu = 1$ 和 $\rho_0 = 1$, 此时 P 波和 S 波对应的波数为

$$k_p = \frac{\sqrt{\rho_0}\omega}{\sqrt{\lambda + 2\mu}} = \frac{\omega}{\sqrt{3}}, \quad k_s = \frac{\sqrt{\rho_0}\omega}{\sqrt{\mu}} = \omega.$$

令 $\mathbf{u}_e(x) = \nabla(G_{k_p}(x, 0)\chi(|x|; 0.1, 0.3, 9))$ 为时谐弹性波问题 (1) 的真解, 其中 $G_{k_p}(x, 0) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k_p|x|)$, 通过方程 (1) 去计算 $\mathbf{f}$. 容易验证此时波源 $\mathbf{f}$ 的紧支集在区域 $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0.1 \leq |x| \leq 0.3\}$ 中.

记 $\mathbf{u}_I$ 为真解 $\mathbf{u}_e$ 在空间 $(X_h)^2$ 中的插值解, 并同时考察插值解 $\mathbf{u}_I$ 和离散解 $\mathbf{u}_h$ 的相对误差:

$$e_I = |\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_I|_{H^1(B_1)} / |\mathbf{u}_e|_{H^1(B_1)}, \quad e_h = |\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_h|_{H^1(B_1)} / |\mathbf{u}_e|_{H^1(B_1)}.$$

选取合适的 γ_0 使得指数衰减因子 $k_p^{3N-7/2}(1 + k_p L)^2 e^{-\frac{1}{2}k_p \gamma_1 \gamma_0 d_2} \leq 10^{-2}$.

$\omega/2\pi = 100, 200$ 时对应的数值结果见图 1 和 2. 图 1 和 2 中 (a) 部分显示了相对误差 e_I 和 e_h 在固定单元阶数下随着自由度的变化过程. 可以清晰地看到, 固定单元阶数的前提下, 随着自由度数变大, 相对误差变小. 数值解相对误差和插值解相对误差之间的距离也在逐渐变小, 这本质上是显示了污染误差的逐渐变小过程. 与此同时, 可以发现: 固定相对误差, 单元阶数越大, 所需要的自由度越少; 固定自由度, 单元阶数越大, 相对误差越小. 图 1 和 2 中 (b) 部分列出了在固定阶数下, 以波源转移区域分解算法作为预条件子的 GMRES 迭代方法的迭代步数随着自由度数目的变化过程. 与 (a) 部分对应来看, 可以清晰地发现, 随着自由度变大, 相对误差变小, 迭代步数在减小. 这充分说明了波源转移算法可以作为一个非常高效的预条件子. 表 1 显示了当 $\omega/2\pi = 100$ 时, 为了使得相对误差小于 10^{-2} 时每个 S 波波长需要的自由度数量. 这也充分表明了高次元在求解波动问题时的优越性. 与此

图 1 (a) 当 $\omega/2\pi = 100$ 时, 相对误差 e_l 和 e_h 随着自由度数 $=2(n_1p+1)(n_2p+1)$ 的变化情况; (b) 当 $\omega/2\pi = 100$ 时, 以波源转移区域分解算法为预条件子的 GMRES 迭代算法的迭代步数随着自由度的变化情况. 当 $p=3$ 时, 选取网格尺度 h 满足 $h_0/h = 6.5, 7, \dots, 10$ 使得每个 S 波波长中自由度为 7.79, 8.39, $\dots$, 11.99; 当 $p=5$ 时, 选取网格尺度 h 满足 $h_0/h = 3, 3.5, \dots, 6$ 使得每个 S 波波长中自由度为 5.99, 6.99, $\dots$, 11.99; 当 $p=7$ 时, 选取网格尺度 h 满足 $h_0/h = 2, 2.5, \dots, 4.5$ 使得每个 S 波波长中自由度为 5.59, 6.99, $\dots$, 12.59

Figure 1 (a) The relative error e_l and e_h in terms of the number of degree freedom $\text{DOF} = 2(n_1p+1)(n_2p+1)$ when $\omega/2\pi = 100$; (b) the number of iterations of the preconditioned GMRES algorithm using STDDM as the preconditioner when $\omega/2\pi = 100$. For $p=3$, the mesh size h satisfies $h_0/h = 6.5, 7, \dots, 10$ such that the DOF per wavelength (S wave) is 7.79, 8.39, $\dots$, 11.99; For $p=5$, the mesh size h satisfies $h_0/h = 3, 3.5, \dots, 6$ such that the DOF per wavelength (S wave) is 5.99, 6.99, $\dots$, 11.99; For $p=7$, the mesh size h satisfies $h_0/h = 2, 2.5, \dots, 4.5$ such that the DOF per wavelength (S wave) is 5.59, 6.99, $\dots$, 12.59

图 2 (a) 当 $\omega/2\pi = 200$ 时, 相对误差 e_l 和 e_h 随着自由度数 $=2(n_1p+1)(n_2p+1)$ 的变化情况; (b) 当 $\omega/2\pi = 200$ 时, 以波源转移区域分解算法为预条件子的 GMRES 迭代算法的迭代步数随着自由度的变化情况. 当 $p=5$ 时, 选取网格尺度 h 满足 $h_0/h = 4, 4.5, \dots, 6.5$ 使得每个 S 波波长中自由度为 4, 4.5, $\dots$, 6.5; 当 $p=7$ 时, 选取网格尺度 h 满足 $h_0/h = 4, 3.5, \dots, 4.5$ 使得每个 S 波波长中自由度为 4.2, 4.9, $\dots$, 6.3

Figure 2 (a) The relative error e_l and e_h in terms of the number of degree freedom $\text{DOF} = 2(n_1p+1)(n_2p+1)$ when $\omega/2\pi = 200$; (b) the number of iterations of the preconditioned GMRES algorithm using STDDM as the preconditioner when $\omega/2\pi = 200$. For $p=5$, the mesh size h satisfies $h_0/h = 4, 4.5, \dots, 6.5$ such that the DOF per wavelength (S wave) is 4, 4.5, $\dots$, 6.5; For $p=7$, the mesh size h satisfies $h_0/h = 4, 3.5, \dots, 4.5$ such that the DOF per wavelength (S wave) is 4.2, 4.9, $\dots$, 6.3

同时, 我们也测试了当 ω 和网格尺度 h 同时变化时, 相对误差和迭代步数的变化情况, 如表 2 所示. 固定单元阶数为 3, 同时提升波数 $\omega/2\pi = 20, 40, 80, 160$ 和加密网格 $h_0/h = 2, 4, 8, 16$. 图 3 显示了当

表 1 当 $\omega/2\pi=100$ 时, 使数值解相对误差小于 10^{-2} 时每个 S 波波长所需自由度
Table 1 The DOF per wavelength (S wave) we need to let the relative error less than 10^{-2} for $\omega/2\pi = 100$

p	3	5	7
DOF	2048282	1212722	1056610
DOF/ λ_s	7.79	5.99	5.59

表 2 当 $p=3$ 时, 不同 ω 和网格尺度下的数值结果
Table 2 The numerical results of different ω and h when $p = 3$

$\omega/2\pi$	h	DOF	DOF/ λ_s	e_I	e_h	$N_{\text{iter}}^{\text{tol}=1\text{E}-10}$
20	0.0125	192290	11.96	2.23E-3	3.46E-2	13
40	0.0063	771650	11.98	1.72E-3	3.98E-3	7
80	0.0032	3091586	11.99	1.66E-3	1.69E-3	4
160	0.0016	12376322	12.00	1.65E-3	1.68E-3	1

图 3 (网络版彩图) 当 $\omega/2\pi = 50$, $h_0/h = 3$ 和 $p=4$ 时, 方程 (11) 的数值解 u_h . (a) 数值解 $u_{h,1}$ 的实部部分; (b) 插值解 $u_{I,1}$ 的实部部分; (c) 数值解 $u_{h,2}$ 的实部部分; (d) 插值解 $u_{I,2}$ 的实部部分

Figure 3 (Color online) The solution u_h of equation (11) when $\omega/2\pi = 50$, $h_0/h = 3$ and $p = 4$. (a) The real part of the numerical solution $u_{h,1}$; (b) the real part of the interpolation solution $u_{I,1}$; (c) the real part of the numerical solution $u_{h,2}$; (d) the real part of the interpolation solution $u_{I,2}$

$\omega/2\pi = 50$, $h_0/h = 3$ 和 $p = 4$ 时, 插值解和数值解的实部部分. 从图中可以清晰看到在完美匹配层区域中数值解迅速衰减.

图 4 (网络版彩图) Marmousi 模型的速度场

Figure 4 (Color online) The velocity field of the Marmousi model

 表 3 Marmousi 模型下, 当 $\omega/2\pi=50$ 时, 不同单元阶数和不同收敛阈值下的迭代步数, 以及计算时间

 Table 3 For the problems with Marmousi model, the iteration number and computation time under different element order and relative residue tolerance when $\omega/2\pi = 50$

p	DOF	$N_{\text{iter}}^{\text{tol}=1\text{E}-10}$	$N_{\text{iter}}^{\text{tol}=1\text{E}-6}$	$N_{\text{iter}}^{\text{tol}=1\text{E}-3}$	T_{setup}	$T_{\text{solve}}/N_{\text{iter}}$
1	1231938	130	79	38	7	4
2	4921474	114	64	30	48	21
3	11068610	85	47	22	152	59
4	19673346	74	40	20	374	76

5.2 变波数问题

使用 Marmousi 模型^[20] 构造一个变波数问题. 在该模型中, 根据实际数据格式, 设置 $l_1 = 4600, l_2 = 1500, d_1 = 200, d_2 = 100$, 因此 $B_2 = (-4800, 4800) \times (-1600, 1600)$. 设置 $\bar{l}_1 = 4680, \bar{l}_2 = 1580$. 区域划分的层数 $N = 30$. 网格尺度为 $h_1 = 12.5, h_2 = 4$.

设置 $\rho_0 = 1$, 并假设 $\lambda(x) = \mu(x) = c^2(x)/3$. 在这样的假设下, 可以计算得知弹性波方程的 P 波波数为 $k_p = \sqrt{\rho_0 \omega / \sqrt{\lambda + 2\mu}} = \omega / \sqrt{3\mu} = \omega / c(x)$, 其中 $c(x)$ 是 Marmousi 模型的速度场, 如图 4 所示. 实际计算中, $c(x)$ 由定义在网格点上的实际数据线性插值得到. 在区域 $B_1 = (-4100, 4100) \times (-1500, 1500)$ 中速度场与实际数据一致. 在 B_1 的外部区域我们将速度场进行延拓, 保证在完美匹配层区域中沿着坐标轴方向波数为一常数. 定义 $k_{\text{PML}} = \omega/5500$. 我们选取合适的参数 γ_0 使得指数衰减因子 $(k_{\text{PML}}L)^{3N-7/2}(1+k_{\text{PML}}L)^2e^{-\frac{1}{2}k_{\text{PML}}\gamma_1\gamma_0d_2} \leq 10^{-2}$.

选取波源 $f(x)$ 具有如下形式:

$$f(x) = \nabla e^{-(h_1h_2/16)^{-2}((x_1-r_1)^2+(x_2-r_2)^2)},$$

其中 $(r_1, r_2) = (0, 1488)$. 表 3 中给出了当 $\omega/2\pi = 50$ 时, 以波源转移区域分解算法为预条件子的 GMRES 迭代算法在不同单元阶数和不同阈值下的迭代步数. 可以清晰地看到随着自由度数变多, 迭代步数在减少. 因此对于变波数问题, 数值结果表明: 离散误差越小, 预条件子的效果越好. 同时表中也给出了对应的计算时间. 表 4 显示了每个方向上, 每个 P 波波长内自由度数目的范围随着单元阶数的变化情况. 将表 4 与 3 联合起来看, 可以看到每个波长自由度越多, 预条件子效果越好. 图 5 中显

表 4 Marmousi 模型下, 每个 P 波波长中自由度数的变化范围
Table 4 The range of number of DOF per wavelength (P wave) in each direction

p	DOF	$\{\text{DOF}/\lambda_p\}_1$	$\{\text{DOF}/\lambda_p\}_2$
1	1231938	2.40 ~ 8.81	7.51 ~ 27.5
2	4921474	4.80 ~ 17.61	15.00 ~ 55.03
3	11068610	7.20 ~ 26.41	22.51 ~ 82.53
4	19673346	9.60 ~ 35.21	30.01 ~ 110.03

图 5 Marmousi 模型下, 当 $\omega/2\pi = 20$ 和 $p=2$ 时, 数值解 (a) $u_{h,1}$ 和 (b) $u_{h,2}$ 的实部部分
Figure 5 For the problems with Marmousi model, the real part of numerical solution (a) $u_{h,1}$ and (b) $u_{h,2}$ when $\omega/2\pi = 20$ and $p = 2$

示了当 $\omega/2\pi = 20$ 和 $p = 2$ 时, 数值解的实部情况. 从图中可以看到由位置 $(r_1, r_2) = (0, 1488)$ 处的波源所激发的波的两个分量的传播情况.

参考文献

- 1 Chen Z, Xiang X. A source transfer domain decomposition method for Helmholtz equations in unbounded domain. SIAM J Numer Anal, 2013, 51: 2331–2356
- 2 Chen Z, Xiang X, Zhang X. Convergence of the PML method for elastic wave scattering problems. Math Comp, 2016, 85: 2687–2714
- 3 Benamou J D, Després B. A domain decomposition method for the Helmholtz equation and related optimal control problems. J Comput Phys, 1997, 136: 68–82
- 4 Gander M J, Magoules F, Nataf F. Optimized Schwarz methods without overlap for the Helmholtz equation. SIAM J Sci Comput, 2002, 24: 38–60
- 5 Brandt A, Livshits I. Wave-ray multigrid method for standing wave equations. Electron Trans Numer Anal, 1997, 6:

- 162–181
- 6 Elman H C, Ernst O G, O’leary D P. A multigrid method enhanced by Krylov subspace iteration for discrete Helmholtz equations. *SIAM J Sci Comput*, 2001, 23: 1291–1315
- 7 Liu F, Ying L. Recursive sweeping preconditioner for 3D Helmholtz equation. *arXiv:1502.07266*, 2015
- 8 Liu F, Ying L. Additive sweeping preconditioner for the Helmholtz equation. *arXiv:1504.04058*, 2015
- 9 Luo S, Qian J, Burridge R. Fast Huygens sweeping method for Helmholtz equations in inhomogeneous media in the high frequency regime. *J Comput Phys*, 2014, 270: 378–401
- 10 Poulson J, Engquist B, Li S, et al. A parallel sweeping preconditioner for heterogeneous 3D Helmholtz equations. *SIAM J Sci Comput*, 2013, 35: 194–212
- 11 Stolk C. A rapidly converging domain decomposition method for the Helmholtz equation. *J Comput Phys*, 2013, 241: 240–252
- 12 Zepeda-Núñez L, Demanet L. The method of polarized traces for the 2D Helmholtz equation. *J Comput Phys*, 2016, 308: 347–388
- 13 Engquist B, Ying L. Sweeping preconditioner for the Helmholtz equation: moving perfectly matched layers. *Multiscale Model Simul*, 2011, 9: 686–710
- 14 Chen Z, Xiang X. A source transfer domain decomposition method for Helmholtz equations in unbounded domain, part II: extensions. *Numer Math: Theory, Meth Appl*, 2013, 6: 538–555
- 15 Du Y, Wu H J. An improved source transfer domain decomposition for Helmholtz equations in unbounded domain. *arXiv:1505.06052*, 2015
- 16 Chew W C, Weedon W. A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell’s equations with stretched coordinates. *Microw Opt Tech Lett*, 1994, 7: 599–604
- 17 van de Vosse F N, Mineev P D. *Spectral Elements Methods: Theory and Applications*. EUT Report 96-W-001 ISBN 90-236-0318-5. Eindhoven University of Technology, 1996
- 18 Amestoy P R, Duff I S, L’Excellent J Y, et al. A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 2001, 23: 15–41
- 19 Amestoy P R, Guermouche A, L’Excellent J Y, et al. Hybrid scheduling for the parallel solution of linear systems. *Parall Comput*, 2006, 32: 136–156
- 20 Bourgeois A, Bourget M, Lailly P, et al. Marmousi, model and data. *Marmousi Exper*, 1991, 5–16

A source transfer domain decomposition method for time-harmonic elastic wave equations

Zhiming CHEN¹, Tao CUI¹ & Xueshuang XIANG^{2*}

¹ *Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;*

² *Qian Xuesen Laboratory of Space Technology, China Academy of Space Technology, Beijing 100094, China*

*E-mail: xiangxueshuang@qxslab.cn

Abstract We extend the source transfer domain decomposition method (STDDM) proposed by Chen et al., in order to solve the time-harmonic elastic wave equation that is discretized using the spectral element method. Some numerical examples are presented, demonstrating that STDDM can be applied as an efficient preconditioner in the preconditioned GMRES method for solving the PML equation of the time-harmonic elastic wave equation, with constant and heterogeneous wave numbers. Regarding the problem with constant wave number, the preconditioned GMRES method converges within just a small number of iterations when the discretization error is reduced by high order spectral elements.

Keywords Helmholtz equation, time-harmonic elastic wave equation, high frequency waves, spectral element method, perfect matched layer method, source transfer

Zhiming CHEN was born in 1965. He received the Ph.D. degree from Augsburg University, Augsburg (Germany), in 1992. Currently, he is a professor at the Academy of Mathematics and Systems Science of Chinese Academy of Sciences. His research interests include numerical methods for partial differential equations and direct imaging methods for inverse scattering problems.

Tao CUI was born in 1981. He received the Ph.D. degree in computational mathematics from the Academy of Mathematics and Systems Science of Chinese Academy of Sciences, Beijing, China, in 2010. Currently, he is an associate professor of the Academy of Mathematics and Systems Science of Chinese Academy of Sciences. His research interests include high performance computing and computational electromagnetics.

Xueshuang XIANG was born in 1987. He received the Ph.D. degree in computational mathematics from the Academy of Mathematics and Systems Science of Chinese Academy of Sciences, Beijing, China, in 2014. Currently, he is an assistant research fellow of the Qian Xuesen Laboratory of Space Technology, China Academy of Space Technology. His research interests include numerical methods for partial differential equations, image processing, and deep learning.