动力系统中若干回复性问题的新进展

献给张芷芬教授 90 华诞

叶向东*, 邵松

中国科学技术大学数学科学学院数学系, 合肥 230026

E-mail: yexd@ustc.edu.cn, songshao@ustc.edu.cn

收稿日期: 2016-04-23; 接受日期: 2016-09-08; 网络出版日期: 2016-11-14; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371339, 11431012 和 11571335) 资助项目

摘要 回复属性是动力系统研究的核心内容之一. 本综述将讨论拓扑动力系统回复属性研究的一些新进展, 主要侧重于与多重回复性、Bohr 问题、乘积回复性和 Furstenberg 不交性问题等相关的一些主题. 主要目的是简要介绍最近相关问题的研究进展, 给出与之相关的参考文献, 并且陈述一些未解决的问题.

关键词 多重回复性 Bohr 问题 乘积回复性 Furstenberg 不交性问题

MSC (2010) 主题分类 37B20, 37B05, 37A25

1 引言

本文综述拓扑动力系统中若干与回复性相关的问题¹⁾. 拓扑动力系统是指二元组 (X, T) , 其中 X 是一个紧致度量空间, T 为其上的一个连续满的自映射. 保测系统是指四元组 $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$, 其中 $(X, \mathcal{X}, \mu)$ 是 Lebesgue 概率空间, $T: X \rightarrow X$ 为可逆保测变换.

关于更多动力系统的概念和背景知识, 参见文献 [1–6]. 相关的综述性文章可以参见文献 [7–12] 等.

1.1 回复性

动力系统主要描述几何空间中的一个点随着时间变化的规律, 研究未来的状态如何依赖于当前状态. 如果一个状态随着时间的演变不再出现, 那么很多情形下这个状态是研究中不太关心的. 而那些随着时间演变能够经常出现的状态, 就是动力系统回复点. 现代动力系统研究中的回复性可以追溯到著名的法国数学家 Poincaré 的工作. 为了研究 N 体问题, Poincaré 发展了许多全新的数学工具. 例如, 他完整地提出了不变积分 (invariant integral) 的概念, 并且使用它证明了著名的回复定理 (Poincaré recurrence theorem); 另一个例子是, 他为了研究周期解的行为, 引进了首次回复映射 (first return map) 的概念, 在后来的动力系统理论中也被称为 Poincaré 映射.

¹⁾ 本文主要研究离散动力系统, 偶尔会涉及一般群作用下的动力系统, 它们的定义是类似的, 我们不再重新论述.

英文引用格式: Ye X D, Shao S. Progress on some recurrence problems in dynamics (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 53–76, doi: 10.1360/N012016-00087

用现代动力系统的术语来描述, Poincaré 回复定理可以如下论述: 设 $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ 为保测系统, 那么对于任何具有正测度的集合 $A \in \mathcal{X}$, 一定存在充分大的时间 n 使得

$$\mu(A \cap T^{-n}A) > 0.$$

如果空间 X 还具有拓扑结构使得 T 连续, 那么根据 Poincaré 回复定理容易证明: 对于 μ 几乎所有点为回复点, 即对 μ 几乎所有点 $x \in X$, 存在序列 $n_i \nearrow \infty$ 使得

$$T^{n_i}x \rightarrow x, \quad i \rightarrow \infty.$$

因为任何拓扑动力系统 (X, T) 可以赋予测度结构使之成为保测系统, 那么根据上面结果就有: 任何拓扑动力系统中必存在回复点. 这就是著名的 Birkhoff 回复定理. 注意 Birkhoff 回复定理对于任何拓扑群作用的拓扑动力系统都是成立的, 此时的证明需要运用 Zorn 引理^[13].

根据 Poincaré 回复定理和 Birkhoff 回复定理, 回复性是动力系统中广泛存在的现象. 在回复属性中, 最强的是不动点, 也就是说这个状态永远不变 (即 $T^n x = x, \forall n$). 其次是周期点, 它表明这个状态周期性地出现 (即存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $T^n x = x$). 如果一个点的回复性与周期点类似, 即对于它的任何邻域, 它回到这个邻域的时间集合具有有界性 (对于周期点, 这个时间集合恰为形如 $M\mathbb{Z}$ 的集合, $M \in \mathbb{N}$), 那么称这个点是几乎周期的. 周期点的轨道是一个有限集合, 而非周期的几乎周期点的轨道闭包是一个不可数集合, 这个轨道闭包构成的动力系统我们称为极小系统, 它可以具有非常丰富的动力学性质 (参见文献 [14, 15]). 一个点是回复点要求它轨道中的点不时回到这个点附近. 如果对于一个点我们只要求它附近的点有一定的回复性, 那么就有所谓的非游荡性和链回复性等概念. 不动点、周期点、几乎周期点 (极小点)、回复点、非游荡点和链回复性点等都是重要的概念, 关于它们有着非常丰富的结果, 本文不侧重于研究这些点集与它们之间的关系, 感兴趣的读者可以参见相关的论著, 如文献 [1, 5].

本文介绍的是一些较为特殊的回复性质: 多重回复性、乘积回复以及相关的 Bohr 问题和 Furstenberg 不交问题等.

1.2 多重回复性

多重回复性的研究始于 Furstenberg 将动力系统方法运用到组合数论中的工作. 关于这个主题极佳的读物是 Furstenberg 的著作 [4].

van der Waerden 在 1927 年给出了如下著名的定理, 自然数的任何有限剖分, 其中必存在一个剖分元包含了任意长的等差数列. 之后这种 Ramsey 类型的问题得到数学家的深入研究. 例如, Erdős 和 Turán^[16] 提出了蕴含 van der Waerden 定理的一个猜测: 正密度的自然数子集包含了任意长的等差数列. 这个问题最终在 1975 年被 Szemerédi^[17] 解决, 现在一般把这个结果称为 Szemerédi 定理. 这是 Szemerédi 于 2012 年获 Abel 奖的主要工作之一. 1977 年 Furstenberg^[18] 给出了 Szemerédi 定理的动力系统证明, 证明了 Szemerédi 定理实际上等价于动力系统多重 Poincaré 回复定理. 由此开创了遍历 Ramsey 理论, 这是 Furstenberg 获 2007 年 Wolf 奖的主要工作之一. 结合 Furstenberg 证明的思想, Green 和 Tao^[19] 解决了一个古老的数论问题: 素数包含任意长的等差数列.

在 1978 年, Furstenberg 和 Weiss^[20] 运用拓扑动力系统的方法研究了组合数论中的一些问题. 在该文献中, 他们将 van der Waerden 定理等价于多重 Birkhoff 回复定理, 从而给出了 van der Waerden 定理的动力系统证明. 多重 Birkhoff 回复定理陈述如下: 设 (X, T) 为动力系统, $d \in \mathbb{N}$, 那么存在点

$x \in X$ 和 $\mathbb{N}$ 的递增序列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ 使得

$$T^{jn_k}x \rightarrow x, \quad k \rightarrow \infty, \quad \forall j = 1, 2, \dots, d.$$

当 $d = 1$ 时, 就是 Birkhoff 回复定理.

动力系统方法的优势在于, 可以将结论系统推广到更为一般的情形: 高维的推广、多项式时间的回复、IP 时间的回复和包括组合词在内的一般半群作用等. 这些结论的动力系统证明具有一定的统一性, 而它们的组合证明就显得困难很多, 甚至有些至今还没有相应的组合证明. 本文将介绍一些基本的定理和新的进展, 并给出一些问题.

关于拓扑的和测度的多重回复性质可以参见 Bergelson 的综述性文献 [7], 在那里读者可以找到对这个主题较为全面的介绍和大量的参考文献.

1.3 Bohr 问题

Bohr 问题是一个调和分析和动力系统中长时间未解决的公开问题: 对于一个 syndetic 的整数子集 S (也称为相对稠密子集, 指这个整数集合相邻元素间隔是有界的), 差集 $S - S = \{a - b : a, b \in S\}$ 是否包含了等度连续系统 (也称为一阶幂零系统) 的回复时间集 (这个时间集称为 Bohr₀ 集). 由于等度连续系统的回复时间集相当于整数加群在 Bohr 紧化下零元素的一个邻域, 人们将这个问题称为 Bohr 问题. 可以证明 Bohr 问题能表述为如下更为直观的形式 (参见文献 [21]): $S - S$ 是否包含了环面旋转系统单位元到自身邻域的回复时间集? Bohr 问题的研究至少可以追溯到 Følner 的工作 [22], 他证明了对于一个相对稠密的整数子集 S , $S - S + S - S$ 为 Bohr₀ 集. 关于 Bohr 问题目前最好的结果是 1968 年 Veech [23] 给出的, 他证明了 Bohr 问题至少“几乎”是成立的. 具体讲, 他证明了对每个相对稠密的整数子集 S , 它的差集 $S - S$ 在忽略掉一个零密度集的时候包含了一个等度连续系统的回复时间集. Furstenberg、Weiss、Host、Katznelson 和 Glasner 等著名数学家对这一问题都进行过深入研究, 但是还没有能够最终解决这个问题. 这个问题与群论的联系参见文献 [24, 25].

从多重回复定理的研究开始, 动力系统和组合数论许多相关问题的研究重点开始由一阶幂零系统转移到高阶幂零系统, 于是, 自然的问题就是如何提出并研究 Bohr 问题的高阶对应问题. 首先是如何合理地提出这个相应的高阶 Bohr 问题. 因为 $S - S$ 可以看成是在 S 中出现的长为 2 的等差数列的公差全体, 所以, 高阶 Bohr 问题的一个自然提法为: 在 S 中出现长为 k 的等差数列的公差的结构是什么样的? Huang 等 [26] 发现这一问题与高阶幂零系统的回复时间集密切相关. 我们将在本文中对相关结果进行介绍, 说明多重回复时间集在其中所起的作用.

1.4 乘积回复

乘积回复的概念是由 Furstenberg [4] 引入的. Furstenberg 引入族的方法来研究回复性, 例如, 对于回复点, 他将之与 IP 集联系起来. Furstenberg 定义乘积回复如下: 设 (X, T) 为动力系统, 点 $x \in X$ 称为乘积回复的, 是指对于任何动力系统 (Y, S) 的回复点 y , 点 (x, y) 为乘积系统 $(X \times Y, T \times S)$ 的回复点. 乘积回复可以运用 IP 集的对偶族去刻画, 由此 Furstenberg (参见文献 [4, 定理 9.11]) 证明了乘积回复性实际上等价于 distality. 之后, Auslander 和 Furstenberg [27] 系统按照乘积回复的思想研究了回复性, 并且把相应的结果推广到更一般的半群作用. 例如, 设半群 E 作用在空间 X 上, 设 F 为 E 的闭子半群, 那么定义点 $x \in X$ 为 F 回复的, 是指存在 $p \in F$ 使得 $px = x$, 而称为 F 乘积回复的, 是

指对于任何 E 作用的动力系统 Y 的 F 回复点 y , 点 (x, y) 为乘积系统 $X \times Y$ 的 F 回复点. 对于不同的 F , 就得到不一样的回复性质. 乘积回复也在文献 [28] 中得到系统研究.

Auslander 和 Furstenberg [27] 提了下面问题: 如果对于任何极小点 y , (x, y) 是回复的, 那么 x 是否为 distal 点? 这样的点称为弱乘积回复点. 文献 [29–31] 进行了系统研究. 事实上, 在 Furstenberg 和 Auslander 提出这个问题时, Furstenberg 没有意识到早在他之前的工作中就已回答了这个问题. 而他的这个答案出现在他关于动力系统不交性的研究中. 在最近的工作中, 文献 [32] 在假设 x 为极小点的条件下也给出了否定的回答.

1.5 Furstenberg 不交问题

系统不交性 (disjointness) 的概念是由著名数学家 Furstenberg 于 1967 年在其经典文献 [3] 中首先引入的, 它是描述系统复杂性差异的十分重要而基本的概念. 现在它已经成为动力系统最核心的概念之一 (参见文献 [33]).

两个系统是不交的类似于数论中两个自然数是互素的. 关于遍历理论中不交性理论的近期发展参见文献 [33]. 不交性理论在拓扑动力系统中的应用发展较为缓慢, 并且大多数情形下人们只是得到特定系统之间不交的充分条件. Furstenberg [3] 提出了许多问题, 目前大部分已经解决, 没有得到完全解决的问题之一是刻画与所有极小系统不交的系统. 这个问题也称为 Furstenberg 不交性问题. 本文将围绕着不交性介绍这个问题的最新进展, 参见文献 [34–37].

2 预备知识

2.1 基本概念与符号

本文分别用 $\mathbb{Z}$ 、 $\mathbb{Z}_+$ 和 $\mathbb{N}$ 表示整数集合、非负整数集合和自然数集合.

设 (X, T) 为拓扑动力系统. 子集 $Y \subseteq X$ 称为不变的是指 $TY \subseteq Y$. 对于任何非空闭的不变子集 Y , 根据定义, $(Y, T|_Y)$ 也是一个动力系统, 把它称为 (X, T) 的子系统. 子系统 $(Y, T|_Y)$ 一般也记为 (Y, T) .

设 (X, T) 和 (Y, S) 为两个系统, 二者的乘积系统 $(X \times Y, T \times S)$ 定义为

$$T \times S(x, y) = (Tx, Sy), \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

类似地, 我们可以定义任何多系统的乘积系统. 对于有限的乘积系统, 我们也用 $(X^n, T^{(n)})$ 来记 n 重的乘积系统 $(X \times \cdots \times X, T \times \cdots \times T)$. 设 (X, T) 和 (Y, S) 为两个系统. 连续映射 $\pi: X \rightarrow Y$ 称为同态 (homomorphism) 或因子映射 (factor map), 是指它为满射并且 $\pi \circ T = S \circ \pi$. 此时我们称 (X, T) 为 (Y, S) 的扩充 (extension), 而称 (Y, S) 为 (X, T) 的因子 (factor).

一个拓扑动力系统 (X, T) 称为是传递的 (transitive), 是指对于任何非空开集 U 和 V , 碰撞时间集 $N(U, V) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : T^{-n}V \cap U \neq \emptyset\}$ 为无穷集合. 称系统为完全传递的 (totally transitive), 是指对于每个 $n \in \mathbb{N}$, 系统 (X, T^n) 为传递的. 而称一个系统为弱混合 (weakly mixing), 是指乘积系统 $(X \times X, T \times T)$ 是传递的.

设 (X, T) 为拓扑动力系统以及点 $x \in X$, 称集合 $\text{orb}(x, T) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$ 为点 x 的轨道 (orbit). 给定一个点, 它的轨道闭包自然成为一个闭不变子集, 于是可以看成是一个子系统. 这个简单的事实是从一个给定系统构造新系统的常用方法. 如果在系统中存在一个点 $x \in X$ 具有稠密的轨道, 那么称这个点是传递点 (transitive point), 等价地, 一个点 x 是传递点当且仅当对于任何非空开

集 $U \subset X$, 集合 $N(x, U) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : T^n x \in U\}$ 为无限集. 一个点 $x \in X$ 称为是回复点或回归点 (recurrent point), 是指对于 x 的任何邻域 U , 集合 $N(x, U) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : T^n x \in U\}$ 是无限集. 全体传递点集合和全体回复点集合分别记为 Tran_T 和 $R(X, T)$. 一个熟知的结果是, 对于任何回复点, 它的轨道闭包作为子系统是一个传递系统; 而对于传递系统, 传递点全体组成的集合 Tran_T 是稠密的 G_δ 子集.

一个系统 (X, T) 称为极小的 (minimal) 是指 $\text{Tran}_T = X$. 易证明一个系统是极小的当且仅当它没有非平凡的子系统. 一个点 $x \in X$ 称为是极小点 (minimal point) 或几乎周期点 (almost periodic point), 是指 $(\overline{\text{orb}(x, T)}, T)$ 为 (X, T) 的极小子系统. 如果存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $T^n x = x$, 那么称点 $x \in X$ 为周期点 (periodic point). (X, T) 的全体周期点集合和全体极小点集合分别记为 $\text{Per}(T)$ 和 $\text{AP}(T)$.

设 (X, T) 为动力系统,

- (1) P 系统是指它为传递的并且周期点集合在全空间稠密;
- (2) M 系统是指它为传递的并且极小点集合在全空间中稠密;
- (3) E 系统是指它为传递的并且存在一个 T 不变的 Borel 概率测度 μ 使得它的支撑为全空间, 即

$$\text{supp}(\mu) = X;$$

- (4) F 系统是指它为完全传递的并且周期点集合在全空间中稠密;
- (5) scattering 系统是指对于任何极小系统 (Y, S) , 乘积系统 $(X \times Y, T \times S)$ 为传递的.

P 系统、 M 系统和 E 系统的概念由文献 [38] 引入; F 系统的概念由文献 [4] 引入; 而 scattering 这个概念由文献 [39] 引入.

设 (X, T) 为动力系统. 称点对 $(x, y) \in X^2$ 为邻近对 (proximal) 是指它满足

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} d(T^n x, T^n y) = 0;$$

称它为 distal 对是指它不是邻近的. 记 (X, T) 全体邻近点对的集合为 $P(X, T)$. 一个点 x 称为是 distal 点, 是指对于 x 轨道闭包中除了 x 自己没有点与它组成邻近对. 一个系统 (X, T) 称为是 distal 的, 是指对于任何不同的点 $x, x' \in X$, (x, x') 为 distal 对.

2.2 Furstenberg 族

首先介绍关于 Furstenberg 族的基本概念 (关于更深入的内容参见文献 [2, 4]). 本节只对 $\mathbb{Z}_+$ 进行定义, 所有概念可以推广到 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{N}$ 等上.

设 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ 为 $\mathbb{Z}_+$ 全体子集组成的集合. 族 (或 Furstenberg 族) $\mathcal{F}$ 是指 $\mathcal{P}$ 满足遗传向上性的子集, 所谓遗传向上 (hereditary upwards) 是指, 如果 $F_1 \subset F_2$, $F_1 \in \mathcal{F}$, 那么有 $F_2 \in \mathcal{F}$. 一个族 $\mathcal{F}$ 称为真的 (proper), 是指它为 $\mathcal{P}$ 非平凡的子集, 亦即非空集也非 $\mathcal{P}$ 本身. 根据定义, 一个族 $\mathcal{F}$ 为真的当且仅当 $\mathbb{Z}_+ \in \mathcal{F}$ 并且 $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

$\mathcal{P}$ 的任何子集 $\mathcal{A}$ 都可以生成一个族

$$[\mathcal{A}] = \{F \in \mathcal{P} : \text{存在 } A \in \mathcal{A} \text{ 使得 } F \supset A\}.$$

对于族 $\mathcal{F}$, 它的对偶族 (dual family) 定义为

$$\mathcal{F}^* = \{F \in \mathcal{P} : \mathbb{Z}_+ \setminus F \notin \mathcal{F}\} = \{F \in \mathcal{P} : F \cap F' \neq \emptyset, \forall F' \in \mathcal{F}\}.$$

易见, $\mathcal{F}^*$ 也为族; 它为真的当且仅当 $\mathcal{F}$ 是真的. 容易验证下面的性质:

$$(\mathcal{F}^*)^* = \mathcal{F}, \quad \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_2^* \subset \mathcal{F}_1^*.$$

如果一个真族 $\mathcal{F}$ 对于有限交运算是封闭的, 那么 $\mathcal{F}$ 称为滤子 (filter). 用 $\mathcal{F}_{\inf}$ 来记 $\mathbb{Z}_+$ 的全体无穷子集组成的族, 用 $\mathcal{F}_{\text{cf}}$ 来记 $\mathbb{Z}_+$ 的全体补集为有限集的子集组成的族. $\mathcal{F}_{\text{cf}}$ 为滤子.

设 S 为 $\mathbb{Z}_+$ 的子集. S 的上 Banach 密度 (upper Banach density) 和上密度 (upper density) 分别定义为

$$BD^*(S) = \limsup_{|I| \rightarrow \infty} \frac{|S \cap I|}{|I|}, \quad D^*(S) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S \cap [0, n-1]|}{n},$$

其中 I 跑遍 $\mathbb{Z}_+$ 的全体非空有限子集, $|\cdot|$ 表示集合的势. 用 $\mathcal{F}_{\text{pubd}}$ 和 $\mathcal{F}_{\text{pud}}$ 分别表示全体具有正的上 Banach 密度和正的上密度子集组成的族.

$\mathbb{Z}_+$ 的子集 S 称为 syndetic 的或相对稠密的, 是指它具有有界的间距, 即存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对于任何 $i \in \mathbb{Z}_+$, 有 $\{i, i+1, \dots, i+N\} \cap S \neq \emptyset$. 称 S 为 thick 的, 是指它包含了任意长的区间, 即对于任何 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $a_n \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $\{a_n, a_n+1, \dots, a_n+n\} \subset S$. 称 S 为逐段 syndetic 的, 是指它为某个 syndetic 子集和某个 thick 子集的交; 称它为 thickly syndetic 的, 是指对于任何 $n \in \mathbb{N}$, 存在 A 的 syndetic 子集 $\{w_1^n, w_2^n, \dots\}$ 使得对于每个 i , 我们有 $\{w_i^n, w_i^n+1, \dots, w_i^n+n\} \subset A$. 分别用 $\mathcal{F}_s$ 、 $\mathcal{F}_t$ 、 $\mathcal{F}_{\text{ps}}$ 和 $\mathcal{F}_{\text{ts}}$ 来记全体 syndetic 子集、全体 thick 子集、全体逐段 syndetic 子集和全体 thickly syndetic 子集组成的族. 根据定义, 容易看出 $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_s^*$, $\mathcal{F}_{\text{ts}} = \mathcal{F}_{\text{ps}}^*$. 在这些族中, 只有 $\mathcal{F}_{\text{ts}}$ 为滤子 (参见文献 [2, 4]).

设 $\{p_i\}_{i=1}^\infty$ 为 $\mathbb{Z}_+$ 序列. 有限和定义为

$$\text{FS}(\{p_i\}_{i=1}^\infty) := \{p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \in \mathbb{N}\}.$$

子集 $F \subset \mathbb{Z}_+$ 称为是 IP 集合是指它包含了某个有限和集合 $\text{FS}(\{p_i\}_{i=1}^\infty)$. $\mathbb{Z}_+$ 的一个子集称为是 IP^* 集合是指它与任何 IP 集合相交非空. 用 $\mathcal{F}_{\text{ip}}$ 和 $\mathcal{F}_{\text{ip}}^*$ 表示全体 IP 集合和 IP^* 集合的族. 著名的 Hindman 定理^[40] 告诉我们 $\mathcal{F}_{\text{ip}}^*$ 是一个滤子 (也可参见文献 [4, 第 179 页]).

设 (X, T) 为一个拓扑动力系统, $x \in X$, 并且设 U 和 V 为 X 子集. 记

$$N(x, U) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : T^n x \in U\}, \quad N(U, V) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : U \cap T^{-n} V \neq \emptyset\}.$$

运用族可以刻画许多动力系统的性质. 例如,

(1) Gottschalk-Hedlund 定理指出, $x \in X$ 为极小点当且仅当对于 x 的任何邻域 U , $N(x, U) \in \mathcal{F}_s$ (参见文献 [13]).

(2) Furstenberg 指出, $x \in X$ 为回复点当且仅当对于 x 的任何邻域 U , $N(x, U) \in \mathcal{F}_{\text{ip}}$; 点 x 为 distal 点当且仅当对于 x 的任何邻域 U , $N(x, U) \in \mathcal{F}_{\text{ip}}^*$ (参见文献 [4, 定理 9.11] 或 [34, 命题 2.7]).

(3) 系统 (X, T) 为弱混合的当且仅当对于 X 的任何非空开集 U 和 V , 我们有 $N(U, V) \in \mathcal{F}_t$ (参见文献 [3, 4]).

(4) 系统 (X, T) 为 E 系统当且仅当存在传递点 $x \in X$ 使得对于 x 的任何邻域 U , $N(x, U) \in \mathcal{F}_{\text{pubd}}$ (参见文献 [41, 引理 3.6]).

2.3 幂零系统

2.3.1 幂零流形与幂零系统

设 G 为群. 对于 $g, h \in G$, 记 $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$ 为 g 和 h 的交换子. 用 $[A, B]$ 表示由 $\{[a, b] : a \in A,$

$b \in B$ 生成的子群. 归纳定义子群列 G_j ($j \geq 1$) 如下: $G_1 = G$, $G_{j+1} = [G_j, G]$. 称 G 为 d 阶幂零的, 是指存在 $d \geq 1$ 使得 G_{d+1} 为平凡群.

设 G 为 d 阶幂零 Lie 群, Γ 为其离散的余紧 (cocompact) 子群. 于是得到紧致流形 $X = G/\Gamma$, 称之为 d 阶幂零流形 (nilmanifolds). 群 G 可以通过左平移作用在 X 上, 我们将这个作用记为 $(g, x) \mapsto gx$. G 上的 Haar 测度 μ 自然可以遗传到 X 上, 它为 G 不变的. 取定 $\tau \in G$, 用 T 表示 X 上变换 $x \mapsto \tau x$. 那么 (X, T, μ) 是一个唯一遍历的系统, 称为 d 阶幂零系统 (nilsystems).

我们常用的性质有: 有限个 d 阶幂零流形的乘积仍为 d 阶幂零流形; d 阶幂零系统中任何一个点的轨道闭包仍然为幂零流形 (参见文献 [42, 定理 2.21]). 更多细节参见文献 [43, 44].

2.3.2 d 阶准幂零系统

我们需要研究幂零系统的逆极限, 在这之前我们先回顾一下逆极限的概念. 设 $\{(X_i, T_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ 为系统序列, 不妨取其上度量使得 $\text{diam}(X_i) \leq M < \infty$. 设对于每个 i 我们有因子映射 $\phi_i: X_{i+1} \rightarrow X_i$, 那么 $\{(X_i, T_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ 的逆极限系统, 定义为 $\{(x_i)_{i \in \mathbb{N}}: \phi_i(x_{i+1}) = x_i, i \in \mathbb{N}\}$, 由 $\{T_i\}$ 自然诱导了其上的变换 T . 它为 $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ 的紧致子集, 记为 $\lim_{\leftarrow} \{(X_i, T_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$. 定义

$$\rho(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \rho_i(x_i, y_i),$$

它为逆极限系统上的一个度量.

定义 2.1 ^[45] 系统 (X, T) 称为 d 阶准幂零系统 (d -step pro-nilsystem) 或阶数为 d 的系统 (system of order d), 是指它为 d 阶幂零极小系统的逆极限.

∞ 阶幂零系统指它为幂零系统的逆极限 (不限定阶数 (参见文献 [29])).

定义 2.2 $\mathbb{Z}$ 的子集 A 称为 $\text{Nil}_d \text{ Bohr}_0$ 集, 是指存在一个 d 阶幂零系统 (X, T) , $x_0 \in X$ 以及 x_0 的开邻域 U 使得 $N(x_0, U)$ 包含于 A 中. 用 $\mathcal{F}_{d,0}$ 记全体 $\text{Nil}_d \text{ Bohr}_0$ 集.

因为任何 d 阶幂零系统为 distal 的, 那么它的逆极限系统 d 阶准幂零系统也是 distal 的. 对于 distal 系统, 它的每个点都是极小点. 由此易见在上面定义中, (X, T) 可以改为 d 阶极小幂零系统或 d 阶准幂零系统.

2.4 超空间

设 X 为紧致度量空间, 设 ρ 为其上的度量. 用 $K(X)$ 来记 X 上的超空间 (hyperspace), 即 X 非空闭子集全体. 超空间赋予 Hausdorff 度量 d_H :

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \max_{x \in A} \min_{y \in B} \rho(x, y), \max_{y \in B} \min_{x \in A} \rho(x, y) \right\}, \quad \forall A, B \in K(X).$$

在此度量下 $K(X)$ 成为一个紧致度量空间. 易证, X 的全体有限子集在 $K(X)$ 中稠密.

对于 X 的非空开集 $U_1, \dots, U_n$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 我们令

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \left\{ K \in K(X) : K \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ 且 } K \cap U_i \neq \emptyset, \forall i = 1, \dots, n \right\}.$$

那么集合

$$\{\langle U_1, \dots, U_n \rangle : U_1, \dots, U_n \text{ 为 } X \text{ 非空开集}, n \in \mathbb{N}\}$$

形成 Hausdorff 度量 d_H 相应拓扑的一组基. 这个拓扑也称为 Vietoris 拓扑 (参见文献 [46, 定理 4.5]).

现在设 (X, T) 为拓扑动力系统, 那么 T 可以诱导一个超空间上的连续映射 $T_K : K(X) \rightarrow K(X)$:

$$T_K(C) = TC, \quad \forall C \in K(X).$$

于是 $(K(X), T_K)$ 成为一个拓扑动力系统, 称为 (X, T) 的诱导系统或超空间系统.

3 多重回复性

3.1 多重 Birkhoff 回复定理

动力系统中多重回复性研究始于运用动力系统方法来研究诸如 van der Waerden 定理的组合数论问题 (参见文献 [47]).

定理 3.1 (van der Waerden 定理) 对于自然数的任何有限剖分, 必有一个剖分元包含任意长的等差数列.

Furstenberg 和 Weiss^[20] 阐述了 van der Waerden 定理如何等价于拓扑多重回复定理的, 并且通过证明如下多重回复定理给出了 van der Waerden 定理的新证明.

定理 3.2 (单个映射的多重 Birkhoff 回复定理) 设 (X, T) 为动力系统, $d \in \mathbb{N}$, 那么存在点 $x \in X$ 和递增自然数序列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ 使得

$$T^{jn_k}x \rightarrow x, \quad k \rightarrow \infty, \quad \forall j = 1, 2, \dots, d.$$

这个定理容易推广到多个映射的情形:

定理 3.3 (多重 Birkhoff 回复定理) 设 X 为紧致度量空间, $T_1, \dots, T_d$ 为 X 上相互交换的连续映射 ($d \in \mathbb{N}$), 那么存在点 $x \in X$ 和递增自然数序列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ 使得

$$T_j^{n_k}x \rightarrow x, \quad k \rightarrow \infty, \quad \forall j = 1, 2, \dots, d.$$

上述多重 Birkhoff 回复定理等价于 van der Waerden 定理的 $\mathbb{N}^d$ 推广版本 Grünwald 定理 (参见文献 [7, 定理 1.20]).

van der Waerden 定理的一个重要推广是著名的 Szemerédi 定理:

定理 3.4^[17] 任何具有正上密度的自然数子集必定包含了任意长的等差数列.

Furstenberg^[18] 运用动力系统方法给出了 Szemerédi 定理的新证明. 首先他证明了 Szemerédi 定理等价于如下的多重 Poincaré 回复定理:

定理 3.5^[18] (单个映射多重 Poincaré 回复定理) 设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为保测系统, $d \in \mathbb{N}$, 那么对于任何具有正测度的集合 $A \in \mathcal{B}$, 存在任意大的整数 $n \geq 1$ 使得

$$\mu(A \cap T^{-n}A \cap \dots \cap T^{-2n}A \cap \dots \cap T^{-dn}A) > 0.$$

Furstenberg 和 Katznelson^[48-50] 对这个结果进行了系列推广, 例如, 他们证明了:

定理 3.6^[48] (多重 Poincaré 回复定理) 设 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 为概率空间, $T_1, \dots, T_d$ 为 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上相互交换的保测映射 ($d \in \mathbb{N}$), 那么对于任何具有正测度的集合 $A \in \mathcal{B}$, 存在任意大的整数 $n \geq 1$ 使得

$$\mu(A \cap T_1^{-n}A \cap \dots \cap T_2^{-n}A \cap \dots \cap T_d^{-n}A) > 0.$$

根据这些定理, 我们可以定义多重的 Poincaré 和 Birkhoff 回复集 (参见文献 [51]).

定义 3.7 设 $d \in \mathbb{N}$.

(1) 称 $S \subset \mathbb{Z}$ 为 d 重 Poincaré 回复集, 是指对于每个保测系统 $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ 和正测集 $A \in \mathcal{X}$, 存在 $n \in S$ 使得 $\mu(A \cap T^{-n}A \cap \cdots \cap T^{-dn}A) > 0$.

(2) 称 $S \subset \mathbb{Z}$ 为 d 重 Birkhoff 回复集, 是指对于任何极小系统 (X, T) 以及任何 X 的非空开集 U , 存在 $n \in S$ 使得 $U \cap T^{-n}U \cap \cdots \cap T^{-dn}U \neq \emptyset$.

用 $\mathcal{F}_{\text{Poi}_d}$ 和 $\mathcal{F}_{\text{Bir}_d}$ 记由全体 d 重 Poincaré 回复集和全体 d 重 Birkhoff 回复集组成的族.

文献 [51] 详细研究了这些定义, 指出 d 重 Poincaré (Birkhoff) 回复集与 $d+1$ 重 Poincaré (Birkhoff) 回复集是不一样的概念.

3.2 多重 Birkhoff 回复定理的多项式推广

设 $\mathcal{P}$ 为全体整数值多项式 (在整数集上取值为整数的多项式), $\mathcal{P}_0$ 为满足 $p(0) = 0$ 的整数值多项式 p 的全体, $\mathcal{P}_0^*$ 为 $\mathcal{P}_0$ 非常值元素全体.

定理 3.8 [52] 设 X 为紧致度量空间, 设 Γ 为幂零群, 设 $T_1, \dots, T_d \in \Gamma$, $k \in \mathbb{N}$, $p_{i,j} \in \mathcal{P}_0$, $i = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, d$. 那么存在点 $x \in X$ 以及递增自然数序列 $\{n_m\}_{m=1}^\infty$ 使得对于每个 $i = 1, \dots, k$,

$$T_1^{p_{i,1}(n_m)} \cdots T_d^{p_{i,d}(n_m)} x \rightarrow x, \quad m \rightarrow \infty.$$

这个定理是多重 Birkhoff 回复定理对于幂零群作用的多项式推广, 对于交换群的情形是由 Bergelson 和 Leibman [53] 给出的. 如果我们要求 (X, Γ) 为极小的, 那么多重回复点是 X 的稠密 G_δ 集, 即下面的定理:

定理 3.9 [52] 设 X 为紧致度量空间, 设 Γ 为幂零群, (X, Γ) 为极小系统. 设 $T_1, \dots, T_d \in \Gamma$, $k \in \mathbb{N}$ 以及 $p_{i,j} \in \mathcal{P}_0$, $i = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, d$. 那么存在稠密 G_δ 集 X_0 使得对于任何点 $x \in X_0$ 存在递增自然数序列 $\{n_m\}_{m=1}^\infty$ 使得对于每个 $i = 1, \dots, k$,

$$T_1^{p_{i,1}(n_m)} \cdots T_d^{p_{i,d}(n_m)} x \rightarrow x, \quad m \rightarrow \infty.$$

这个结果的遍历理论版本参见文献 [54].

3.3 多重遍历平均

多重遍历平均问题是比多重回复定理更为深刻的一个问题: 给定一个概率空间 X , 设 $T_1, \dots, T_d$ 为 X 上的保测变换, 对于 X 上可测函数 $f_1, \dots, f_d$, 称

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_1(T_1^n x) f_2(T_2^n x) \cdots f_d(T_d^n x)$$

为多重遍历平均. 多重遍历平均问题就是研究多重遍历平均是否收敛的问题 (这里的收敛包括 L^2 以及逐点收敛两种情形). 如果只有一个保测映射, 那么此时多重遍历平均是指平均

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) f_2(T^{2n} x) \cdots f_d(T^{dn} x).$$

$d = 1$ 就是著名的 von Neumann 的 L^2 遍历定理和 Birkhoff 逐点遍历定理.

目前 L^2 收敛的情形的结果比较丰富. 对于单个映射, Host 和 Kra [55] 证明了, 设 $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ 为保测系统, $d \in \mathbb{N}$, 以及 $f_i \in L^\infty(X, \mathcal{X}, \mu)$, $i = 1, 2, \dots, d$, 那么,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) \cdots f_d(T^{dn} x)$$

在 L^2 中收敛 (也可参见文献 [56]). 对于 $T_1, \dots, T_k$ 相互交换的情形由 Tao [57] 给出. 最近, Walsh [58] 将 L^2 收敛的情形推到了非常一般的情形: 设 Γ 为幂零群, $(X, \mathcal{X}, \mu, \Gamma)$ 为保测系统. 那么对于 $T_1, T_2, \dots, T_d \in \Gamma$, $f_1, \dots, f_k \in L^\infty(X, \mathcal{X}, \mu)$ 以及整数值多项式 $p_{i,j}$,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \prod_{j=1}^k (T_1^{p_{1,j}(n)} T_2^{p_{2,j}(n)} \cdots T_d^{p_{d,j}(n)}) f_j$$

在 $L^2(X, \mathcal{X}, \mu)$ 中收敛.

但是对于逐点收敛的情形, 只有很少的进展. 这方面最主要的结果是 Bourgain 的结果, 他证明了, 对于任何整数值多项式 $p(n)$ 以及 $f \in L^p(X, \mathcal{X}, \mu)$ ($p > 1$), 平均 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^{p(n)} x)$ 几乎处处成立 (参见文献 [59]); 对 $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ 和 $f_1, f_2 \in L^\infty(X, \mathcal{X}, \mu)$, 平均 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^{a_1 n} x) f_2(T^{a_2 n} x)$ 几乎处处成立 (参见文献 [60]). 最近, Huang 等 [61] 证明了, 对于 $d \in \mathbb{N}$ 和测度 distal 系统,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) \cdots f_d(T^{dn} x)$$

几乎处处收敛, 其中 $f_1, \dots, f_d \in L^\infty(X, \mathcal{X}, \mu)$.

3.4 多重遍历平均的拓扑对应

设 $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ 为遍历系统, $d \in \mathbb{N}$. 文献 [61] 证明了, 存在 X^d 上概率测度族 $\{\mu_x^{(d)}\}_{x \in X}$ 使得对于 μ 几乎每个点 $x \in X$, $\mu_x^{(d)}$ 为 $T \times T^2 \times \cdots \times T^d$ 作用下遍历的, 并且对于所有 $f_1, \dots, f_d \in L^\infty(\mu)$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) f_2(T^{2n} x) \cdots f_d(T^{dn} x) \\ & \rightarrow \int_{X^d} f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_d(x_d) d\mu_x^{(d)}(x_1, x_2, \dots, x_d), \quad N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

其中收敛指在 $L^2(\mu)$ 中收敛.

我们可以不妨设 X 为紧致度量空间, T 为 X 上连续自映射 (参见文献 [4]). 我们称一个点 $x_0 \in X$ 为相对 $T \times T^2 \times \cdots \times T^d$ 多重 generic 的, 是指对所有连续函数 $f_1, \dots, f_d$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x_0) f_2(T^{2n} x_0) \cdots f_d(T^{dn} x_0) \\ & \rightarrow \int_{X^d} f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_d(x_d) d\mu_{x_0}^{(d)}(x_1, x_2, \dots, x_d), \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

设 $\sigma_d = T \times T^2 \times \cdots \times T^d$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, x_0, \dots, x_0) \in X^d$. 那么 $x_0 \in X$ 为相对于 $T \times T^2 \times \cdots \times T^d$ 的多重 generic 点, 当且仅当

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_d^n \delta_{\mathbf{x}_0} \rightarrow \mu_{x_0}^{(d)}, \quad N \rightarrow \infty,$$

其中 $M(X^d)$ 为 X^d 全体概率测度空间, 赋予弱 $*$ 拓扑.

命题 3.10 设 $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ 为遍历系统, $d \in \mathbb{N}$, 其中 X 为紧致度量空间, T 为 X 上连续自映射. 那么对于所有 $f_1, \dots, f_d \in L^\infty(\mu)$,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) \cdots f_d(T^{dn} x)$$

μ 几乎处处收敛当且仅当对 μ 几乎所有点 $x_0 \in X$, x_0 为相对于 $T \times T^2 \times \cdots \times T^d$ 的多重 generic 点.

多重遍历平均的拓扑对应最早由 Glasner^[62] 开始研究 (其他证明参见文献 [63, 64]). 例如, 他证明了下面的定理:

定理 3.11^[62] 设 (X, T) 为拓扑弱混合的极小系统, $d \in \mathbb{N}$. 那么存在稠密 G_δ 子集 X_0 使得对于任意 $x \in X_0$,

$$\overline{\{(T^n x, T^{2n} x, \dots, T^{dn} x) \in X^d : n \in \mathbb{Z}\}} = X^d.$$

它的测度对应问题仍然未解决:

问题 3.12 设 $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ 为测度弱混合的保测系统, $d \in \mathbb{N}$. 是否存在 $X_0 \in \mathcal{X}$ 使得 $\mu(X_0) = 1$, 并且对于任何 $x \in X_0$ 它是 $T \times T^2 \times \cdots \times T^d$ 下多重 generic 点? 即对任何 $x \in X_0$,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_d^n \delta_x \rightarrow \mu^d, \quad N \rightarrow \infty,$$

其中 $\mu^d = \mu \times \cdots \times \mu$.

结合 Bourgain 定理^[59] 和 Furstenberg-Sarközy 定理^[18], 我们有下列定理:

定理 3.13 设 $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ 为测度弱混合系统. 那么对于任何整数值多项式 $p(n)$ 和 $f \in L^\infty(X, \mathcal{X}, \mu)$, 存在可测集 $X_0 \in \mathcal{X}$ 使得 $\mu(X_0) = 1$, 并且对于任何 $x \in X_0$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^{p(n)} x) = \int_X f d\mu.$$

它的拓扑对应也是成立的:

定理 3.14^[65] 设 (X, T) 为拓扑弱混合的极小系统. 那么对于任何整数值多项式 $p(n)$, 存在稠密 G_δ 集合 $X_0 \subseteq X$ 使得对于每个 $x \in X_0$,

$$\overline{\{T^{p(n)} x : n \in \mathbb{N}\}} = X.$$

3.5 弱混合系统的多重遍历平均问题

定理 3.15^[53] 设 $(X, \mathcal{X}, \mu, \Gamma)$ 为保测系统, Γ 为交换群使得对于任何 $T \in \Gamma$, $T \neq e_\Gamma$ 为弱混合的. 对 $d, k \in \mathbb{N}$, 设 $T_1, \dots, T_d \in \Gamma$, $p_{i,j} \in \mathcal{P}_0$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq d$ 使得

$$g_i(n) = T_1^{p_{i,1}(n)} \cdots T_d^{p_{i,d}(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

以及任何 $i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}$ 表达式 $g_i(n)g_j(n)^{-1} = T_1^{p_{i,1}(n)-p_{j,1}(n)} \cdots T_d^{p_{i,d}(n)-p_{j,d}(n)}$ 非平凡地依赖于 n . 那么对于任何 $f_1, \dots, f_k \in L^\infty(X, \mu)$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \prod_{i=1}^k f_i(T_1^{p_{i,1}(n)} \cdots T_d^{p_{i,d}(n)} x) - \prod_{i=1}^k \int_X f_i(x) d\mu \right\|_{L^2} = 0.$$

事实上, 对于幂零作用, 文献 [54] 给出了类似结果. 最近, Huang 等^[65] 给出了这个结果幂零群作用下的拓扑版本:

定理 3.16^[65] 设 (X, Γ) 为动力系统, Γ 为幂零群, 且对每个 $T \in \Gamma$, $T \neq e_\Gamma$ 为弱混合极小的. 对于 $d, k \in \mathbb{N}$, 设 $T_1, \dots, T_d \in \Gamma$, $\{p_{i,j}(n)\}_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq d} \in \mathcal{P}_0$ 使得任何 $i = 1, 2, \dots, k$,

$$g_i(n) = T_1^{p_{i,1}(n)} \dots T_d^{p_{i,d}(n)},$$

以及任何 $i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}$ 表达式 $g_i(n)g_j(n)^{-1}$ 都非平凡依赖于 n , 那么存在 X 稠密 G_δ 子集 X_0 使得对所有 $x \in X_0$,

$$\{(g_1(n)x, \dots, g_k(n)x) : n \in \mathbb{Z}\}$$

在 X^k 中稠密.

注 3.17 称 $g(n)$ 非平凡依赖于 n 是指 $g(n)$ 为 $\mathbb{Z}$ 到 Γ 的非平凡映射. 当 Γ 为交换群时, 我们有

$$g_i(n)g_j(n)^{-1} = T_1^{p_{i,1}(n)-p_{j,1}(n)} \dots T_d^{p_{i,d}(n)-p_{j,d}(n)}.$$

如果 Γ 为幂零群, 那么表达式 $g_i(n)$ 和 $g_i(n)g_j(n)^{-1}$ 会依赖于 Γ 的 Malcev 基.

作为上定理的应用, 可以证明下结论:

定理 3.18^[65] 设 (X, Γ) 为动力系统, 其中 Γ 为幂零群使得每个 $T \in \Gamma$, $T \neq e_\Gamma$ 为拓扑弱混合且极小的. 对 $k \in \mathbb{N}$, 设 $T_1, \dots, T_k \in \Gamma$, $\{p_i(n)\}_{1 \leq i \leq k} \in \mathcal{P}_0$ 使得 $g(n) = T_1^{p_1(n)} \dots T_k^{p_k(n)}$ 非平凡依赖于 n . 那么存在一个 X 的稠密 G_δ 子集 X_0 使得对于任何 $x \in X_0$ 和 X 任何非空开集 U , 集合 $\{n \in \mathbb{Z} : g(n)x \in U\}$ 为逐段 syndetic 的.

作为本节的结束, 我们提出下面的问题:

问题 3.19 如何对于一般极小幂零群作用陈述和证明多重遍历平均的拓扑对应?

4 Bohr 问题

4.1 拓扑回复集

定义 4.1 一个子集 $R \subset \mathbb{N}$ 称为是拓扑回复集或 Birkhoff 回复集, 是指对于任何极小系统 (X, T) 以及其非空开集 $U \subset X$, 存在 $n \in R$ 使得 $U \cap T^{-n}U \neq \emptyset$.

一个子集 $R \subset \mathbb{N}$ 称为是 Bohr 回复集, 是指对于任何紧致交换度量群上旋转系统 (X, T) 以及其非空开集 $U \subset X$, 存在 $n \in R$ 使得 $U \cap T^{-n}U \neq \emptyset$.

对于 $l \geq 1$, 令

$$N^l(U) = \{n \in \mathbb{N} : U \cap T^{-n}U \cap \dots \cap T^{-ln}U \neq \emptyset\}.$$

称 $R \subset \mathbb{N}$ 为 l 重回复集或 l 重 Birkhoff 回复集, 是指对于任何极小系统 (X, T) 以及其非空开集 $U \subset X$, 存在 $n \in R$ 使得 $N^l(U) \neq \emptyset$.

定理 4.2^[66] 设 $R \subset \mathbb{N}$. 以下命题等价:

- (1) R 为 l 重回复集;
- (2) 对于任何系统 (X, T) 以及其开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_r\}$, 存在 $1 \leq j \leq r$ 和 $n \in R$ 使得 $n \in N^l(U_j)$;
- (3) 对于 $\mathbb{N}$ 的任何剖分 $\mathbb{N} = C_1 \cup \dots \cup C_r$, 存在某个剖分元包含公差属于 R 且长为 $l+1$ 的等差数列;

- (4) 每个 syndetic 集 $E \subset \mathbb{N}$ 包含公差属于 R 且长为 $l+1$ 的等差数列;
 (5) 对于任何系统 (X, T) , 任何 $\epsilon > 0$, 存在 $x \in X$ 和 $n \in R$ 使得 $\sup_{1 \leq j \leq l} d(T^{jn}x, x) < \epsilon$;
 (6) 对于任何系统 (X, T) , 存在 $x \in X$ 使得

$$\inf_{n \in R} \sup_{1 \leq j \leq l} d(T^{jn}x, x) = 0;$$

- (7) 对于任何极小系统 (X, T) , 存在稠密 G_δ 子集 $X_0 \subset X$ 使得对于 $x \in X_0$,

$$\inf_{n \in R} \sup_{1 \leq j \leq l} d(T^{jn}x, x) = 0.$$

4.1.1 Bohr 问题

定义 4.3 集合 $E \subset \mathbb{N}$ 称为 Bohr₀ 集, 是指它包含了形如下面集合的整数子集:

$$\{n \in \mathbb{N} : \|\alpha_1 n\| < \epsilon, \dots, \|\alpha_k n\| < \epsilon\},$$

其中 $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 以及 $\epsilon > 0$.

注意 Katznelson^[21] 说明 A 为 Bohr₀ 集当且仅当它为 Nil₁ Bohr₀ 集. 对于 Nil_d Bohr₀ 集, 我们可以运用广义多项式对它进行刻画 (参见文献 [26]).

问题 4.4 (Bohr 问题) 设 $S \subset \mathbb{N}$ 为 syndetic 集, 那么 $S - S$ 是否一定包含了一个 Bohr₀ 集?

易见 $S - S$ 为 Δ^* 集 (此根据 $S - S \supset N(U, U)$ 易得, 其中 $U \subset X$ 为某极小系统 (X, T) 的非空开集). 下面我们会看到, 这个问题有动力系统、组合数论、调和分析等的等价版本.

问题 4.5^[21] 任何 Bohr 回复集是否为拓扑回复集?

上面两个问题实际上是等价的:

定理 4.6 以下命题等价:

- (1) 设 $S \subset \mathbb{N}$ 为 syndetic 的, 那么 $S - S$ 包含一个 Bohr₀ 集;
- (2) Bohr 回复集是拓扑回复集;
- (3) 对于任何系统 (X, T) 以及它的非空开集 U , $N_X(U, U)$ 包含了某个形如 $N_Y(V, V)$ 的集合, 其中 (Y, S) 为极小等度连续系统, V 为 Y 的非空开集;
- (4) 如果集合 $E \subset \mathbb{N}$ 满足 $E \cap (S - S) \neq \emptyset$ (其中 $S = N_T(x, U)$: (X, T) 为任何一个极小等度连续系统, $x \in X$ 以及 U 为 x 开邻域), 那么 E 为拓扑回复集;
- (5) $\mathcal{F}_{\text{Bir}_1} = \mathcal{F}_{1,0}^*$.

关于 Bohr 问题的更多讨论参见文献 [66, 67].

4.2 Veech 定理

关于 Bohr 问题最主要的进展是 Veech 在 1968 年的结果:

定理 4.7^[23] 设 S 为 syndetic 集合, 那么 $(S - S)\Delta B$ 包含了一个 Bohr₀ 集, 其中 B 为零上 Banach 密度集合.

关于 Bohr 问题的其他结果有下面的定理:

定理 4.8^[22] 如果 $S \subseteq \mathbb{Z}$ 为 syndetic 集合, 那么存在 Bohr₀ 集 B 使得 $S - S + S - S \supseteq B$.

定理 4.9^[68] 如果 $S \subseteq \mathbb{Z}$ 为 syndetic 集合, 那么存在 Bohr₀ 集合 B 和 $s \in S$ 使得

$$S - S + S - s \supseteq B.$$

文献 [66] 中也有关于 Bohr 问题最近的一些结论.

4.3 Veech 定理的高阶情形

Huang 等^[26] 给出了 Veech 定理的高阶版本:

定理 4.10 (参见文献 [26, 定理 A]) 设 $d \in \mathbb{N}$.

(1) 如果 $A \subset \mathbb{Z}$ 为 $\text{Nil}_d \text{ Bohr}_0$ 集, 那么存在 syndetic 子集 S 使得

$$A \supset \{n \in \mathbb{Z} : S \cap (S - n) \cap (S - 2n) \cap \cdots \cap (S - dn) \neq \emptyset\}.$$

(2) 对于 syndetic 子集 S ,

$$\{n \in \mathbb{Z} : S \cap (S - n) \cap (S - 2n) \cap \cdots \cap (S - dn) \neq \emptyset\}$$

为“几乎” $\text{Nil}_d \text{ Bohr}_0$ 集, 即存在零上 Banach 密度集合 $M \subset \mathbb{Z}$ 使得 $I\Delta M$ 为 $\text{Nil}_d \text{ Bohr}_0$ 集.

在定理 4.10 中“几乎”能否去掉, 就是所谓的高阶 Bohr 问题, 等价地可以论述为下列问题:

问题 4.11 ^[26] (高阶 Bohr 问题) $\mathcal{F}_{\text{Bir}_d} = \mathcal{F}_{d,0}^*$?

一个重要的事实是, 对于 $d \in \mathbb{N}$, 有 $\mathcal{F}_{\text{Poi}_d} \subset \mathcal{F}_{\text{Bir}_d} \subset \mathcal{F}_{d,0}^*$ (参见文献 [26, 推论 D]). 注意 $\mathcal{F}_{\text{Poi}_1} \neq \mathcal{F}_{\text{Bir}_1}$ (参见文献 [69]).

为证明定理 4.10, 我们运用 Furstenberg 对应原则将之转换为动力系统回复性问题, 即我们证明了如下等价命题:

定理 4.12 ^[26] 设 $d \in \mathbb{N}$.

(1) 如果 $A \subset \mathbb{Z}$ 为 $\text{Nil}_d \text{ Bohr}_0$ 集, 那么存在极小 d 阶幂零系统 (X, T) 以及它的非空开集 U 使得

$$A \supset \{n \in \mathbb{Z} : U \cap T^{-n}U \cap \cdots \cap T^{-dn}U \neq \emptyset\}.$$

(2) 对于任何极小系统 (X, T) 以及它的非空开集 U ,

$$I = \{n \in \mathbb{Z} : U \cap T^{-n}U \cap \cdots \cap T^{-dn}U \neq \emptyset\}$$

为“几乎” $\text{Nil}_d \text{ Bohr}_0$ 集.

定理 4.10(1) 的证明需要运用幂零 Lie 群理论以及非常复杂的构造和计算. 而定理 4.10(2) 的证明依赖于 Bergelson 等的一个定理 (参见文献 [70, 定理 1.9]): 设 $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ 为遍历系统, $f \in L^\infty(\mu)$ 以及 $d \in \mathbb{N}$. 那么序列 $\{I_f(d, n)\}$ 为一个 d 阶幂零序列与一个一致密度趋向于零的序列之和, 其中 $I_f(d, n) = \int f(x)f(T^n x) \cdots f(T^{dn} x) d\mu(x)$.

4.4 高阶几乎自守性与 d 阶局部邻近关系

在进一步讨论之前, 我们需要引入一些新的概念. 设 $d \in \mathbb{N}$, $P = \{p_i\}_i$ 为 $\mathbb{Z}$ 中一个 (有限或无限) 序列. 集合 $\text{SG}_d(P)$ 称为 P 的间距小于 d 和集 (set of sums with gaps of length less than d of P), 是指它是形如下式的数全体:

$$\epsilon_1 p_1 + \epsilon_2 p_2 + \cdots + \epsilon_n p_n,$$

其中 $n \geq 1$ 为整数, $\epsilon_i \in \{0, 1\}$, $\forall 1 \leq i \leq n$, ϵ_i 不全为 0, 并且任何两个相邻的 1 之间的 0 的个数小于 d . 对 $d \in \mathbb{N}$, 令 $\mathcal{F}_{\text{SG}_d}$ 为全体 SG_d 集组成的族. 易见,

$$\mathcal{F}_{\text{SG}_1} \supset \mathcal{F}_{\text{SG}_2} \supset \cdots \supset \mathcal{F}_{\text{SG}_\infty} =: \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\text{SG}_i}.$$

注意在上面定义中, P 视为序列而非 $\mathbb{Z}$ 子集. 例如, 如果 $P = \{p_i\}$, 那么 $\text{SG}_1(P)$ 为形如 $p_m + p_{m+1} + \cdots + p_n$ 的元素全体, 于是它与差集 $\Delta(S)$ 一致 (其中 $S = \{0, p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, \dots\}$). 因此, SG_1^* 集也就是 Δ^* 集. 对于序列 P , $\text{SG}_2(P)$ 的元素形如

$$\sum_{i=m_0}^{m_1} p_i + \sum_{i=m_1+2}^{m_2} p_i + \cdots + \sum_{i=m_{k-1}+2}^{m_k} p_i + \sum_{i=m_k+2}^{m_{k+1}} p_i,$$

其中 $k \in \mathbb{N}$, 自然数列 $m_0, m_1, \dots, m_{k+1}$ 满足 $m_{i+1} \geq m_i + 2, \forall i = 1, \dots, k$, 以及 $m_1 \geq m_0$.

设 (X, T) 为拓扑动力系统, $d \geq \mathbb{N}$. 点对 $(x, y) \in X \times X$ 称为是 d 阶局部邻近的 (regionally proximal of order d), 如果对于任何 $\delta > 0$, 存在 $x', y' \in X$ 以及向量 $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ 使得 $\rho(x, x') < \delta$, $\rho(y, y') < \delta$, 且

$$\rho(T^{\mathbf{n} \cdot \epsilon} x', T^{\mathbf{n} \cdot \epsilon} y') < \delta, \quad \forall \epsilon \in \{0, 1\}^d, \quad \epsilon \neq (0, \dots, 0),$$

其中

$$\mathbf{n} \cdot \epsilon = \sum_{i=1}^d \epsilon_i n_i.$$

用 $\mathbf{RP}^{[d]}(X)$ 表示全体 d 阶局部邻近点对的集合, 称为 d 阶局部邻近关系 (the regionally proximal relation of order d).

局部渐近关系最早由 Host 等^[45] 引入, 他们同时证明了对于极小 distal 系统, $\mathbf{RP}^{[d]}(X)$ 为等价关系. Shao 和 Ye^[71] 证明了对于一般的极小系统, d 阶局部邻近关系为等价关系. 注意, 当 $d = 1$ 时, $\mathbf{RP}^{[1]}(X)$ 为经典的局部邻近关系, 它是等价关系的第一个证明是由 Veech^[23] 给出的. 关于进一步的结果, 参见文献 [72–74].

文献 [26] 运用各种族对 d 阶局部邻近关系进行了刻画.

定理 4.13 (参见文献 [26, 定理 E]) 设 (X, T) 为极小系统, $x, y \in X, d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, 那么以下各结论等价:

- (1) $(x, y) \in \mathbf{RP}^{[d]}(X)$;
- (2) 对于 y 的任何邻域 U , $N(x, U) \in \mathcal{F}_{d,0}^*$;
- (3) 对于 y 的任何邻域 U , $N(x, U) \in \mathcal{F}_{\text{Poi}_d}$;
- (4) 对于 y 的任何邻域 U , $N(x, U) \in \mathcal{F}_{\text{Bir}_d}$;
- (5) 对于 y 的任何邻域 U , $N(x, U) \in \mathcal{F}_{\text{SG}_d}$.

对于极小系统 (X, T) , 点 $x \in X$ 称为 d 阶几乎自守点, 是指

$$\mathbf{RP}^{[d]}[x] = \{y \in X : (x, y) \in \mathbf{RP}^{[d]}(X)\} = \{x\}.$$

我们可以运用 $\mathcal{F}_{\text{Poi}_d}^*$, $\mathcal{F}_{\text{Bir}_d}^*$ 和 $\mathcal{F}_{d,0}$ 来刻画 d 阶几乎自守性.

定理 4.14 (参见文献 [26, 定理 F]) 设 (X, T) 为极小系统, $x \in X, d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, 那么以下的命题等价:

- (1) x 为 d 阶几乎自守点;
- (2) 对于 x 的任何邻域 V , $N(x, V) \in \mathcal{F}_{d,0}$;
- (3) 对于 x 的任何邻域 V , $N(x, V) \in \mathcal{F}_{\text{Poi}_d}^*$;
- (4) 对于 x 的任何邻域 V , $N(x, V) \in \mathcal{F}_{\text{Bir}_d}^*$.

特别地, 当 $d = \infty$ 时, 我们有下面的定理:

定理 4.15 (参见文献 [26, 定理 8.1.7]) 设 (X, T) 为极小系统, 那么 (X, T) 为 ∞ -步几乎自守系统充分必要是存在 $x \in X$ 使得对于 x 的任意邻域 V , $N(x, V) \in \mathcal{F}_{\text{fp}}^*$.

这里 $\mathcal{F}_{\text{fp}}^*$ 表示与包含任意长有限 IP 集都相交的集和组成的族.

4.5 Nil_d Bohr_d 集、SG_d 集和 Konieczny 的一个结果

文献 [75] 证明了每个 SG_d 集为逐段 Nil_d Bohr₀ 的, 于是自然有以下问题:

问题 4.16 每个 Nil_d Bohr₀ 集是否为 SG_d^{*} 集?

在定理 4.13 中, 我们知道对于刻画 d 阶局部渐近关系, Nil_d Bohr₀ 集和 SG_d^{*} 集的作用是一样的. 目前对于问题 4.16, 最佳的答案是 Konieczny 的一个结果:

定理 4.17 [76] 如果 $k \geq \frac{1}{2}d(d+1)$, 那么 $\mathcal{F}_{d,0} \subset \mathcal{F}_{\text{SG}_k}^*$.

5 乘积回复性

设 $\mathcal{F}$ 为族, (X, T) 为一个动力系统. 点 $x \in X$ 称为 $\mathcal{F}$ 回复的, 是指对于 x 的任何邻域 U , $N(x, U) \in \mathcal{F}$. 点 $x \in X$ 称为是 $\mathcal{F}$ 乘积回复的, 是指对于任何系统 (Y, S) 中的 $\mathcal{F}$ 回复点 y , (x, y) 为乘积空间 $(X \times Y, T \times S)$ 中的回复点. 如果一个点为 $\mathcal{F}_{\text{inf}}$ 乘积回复的, 那么就称它为乘积回复点; 如果它为 $\mathcal{F}_s$ 乘积回复的, 那么也称它为弱乘积回复的.

本节讨论 $\mathcal{F}$ 乘积回复性质, 主要侧重于 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{inf}}, \mathcal{F}_{\text{ps}}, \mathcal{F}_{\text{pubd}}$ 和 $\mathcal{F}_s$ 的情形.

5.1 回复性与 IP 集

IP 集是组合中非常重要的概念, 著名的 Hindman 定理断言 IP 集具有 Ramsey 性质:

定理 5.1 [40] 任何 IP 集的有限剖分必有其一仍为 IP 集.

Furstenberg 运用 IP 集来刻画回复点: x 为回复点当且仅当它为 $\mathcal{F}_{\text{ip}}$ 回复的. 并且对于任何 IP-集 R , 存在动力系统 (X, T) , 其上一个回复点 $x \in X$ 以及 x 的邻域 U 使得 $N(x, U) \subseteq R \cup \{0\}$ (参见文献 [4, 定理 2.17]). 仿照 Furstenberg [4] 的方法, 我们有如下结论:

引理 5.2 [34] 设 (X, T) 为动力系统. 如果 $x \in R(X, T)$ 为回复点, $\{V_i\}_{i=1}^\infty$ 为 x 一组邻域集合, 那么存在一个 IP 集合 $\text{FS}(\{p_i\}_{i=1}^\infty)$ 使得对于任何 $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{FS}(\{p_i\}_{i=n}^\infty) \subset N(x, V_n).$$

尤其, 每个回复点为 $\mathcal{F}_{\text{ip}}$ 回复的.

Furstenberg 运用 IP^{*} 刻画乘积回复, 并且证明了一个点为乘积回复的当且仅当它为 distal 点 (见下面定理 5.6 的表述). 这个结论常见的证明需要运用 Auslander-Ellis 定理:

定理 5.3 [14, 15] 设 (X, T) 为动力系统, 那么对于任何点 $x \in X$, 其轨道闭包中存在极小点 $y \in \overline{\text{orb}(x, T)}$ 使得 (x, y) 为邻近的.

注 5.4 (1) 定理 5.3 常见的证明需要依赖于 Zorn 引理. 文献 [34] 中的证明仅运用了 Hindman 定理, 不依赖于 Zorn 引理. 类似的情形是, 之前关于任何动力系统 (X, T) 一定包含极小子系统的证明需要运用 Zorn 引理, 但是当空间 X 为紧致度量空间而作用半群为 $\mathbb{Z}_+$ 时, Weiss [77] 给了一个构造性证明.

(2) 根据 Auslander-Ellis 定理, Furstenberg 引入了中心集 (central set) 的概念. 一个子集 $S \subseteq \mathbb{Z}_+$ 称为中心集, 是指存在系统 (X, T) 、一个点 $x \in X$ 以及一个与 x 邻近的极小点 y 和 y 的一个邻域 U_y 使得 $N(x, U_y) \subset S$. Furstenberg (参见文献 [4, 命题 8.10]) 证明了任何中心集是 IP 集.

在 Auslander-Ellis 定理中, 我们还可以加上一定的乘积回复性质:

命题 5.5 ^[34] 设 (X, T) 为拓扑动力系统. 设 (Y, S) 为另一动力系统以及取定其上的一个回复点 $z \in R(Y, S)$, 那么对于任何点 $x \in X$, 存在其轨道闭包中点 $y \in \overline{\text{orb}(x, T)}$ 使得 $(x, y) \in P(X, T)$ 并且 (y, z) 为乘积系统 $X \times Y$ 的回复点.

5.2 乘积回复

下面给出 Furstenberg 关于乘积回复点的刻画:

定理 5.6 (参见文献 [4, 定理 9.11]) 设 (X, T) 为动力系统. 那么以下命题等价:

- (1) x 为乘积回复点;
- (2) x 为 distal 点;
- (3) 对于任何系统 (Y, S) 中的极小点 y , (x, y) 为乘积空间的极小点;
- (4) x 为 IP^* 回复点.

5.3 $\mathcal{F}_{\text{ps}}$ 乘积回复

文献 [30] 指出, 一个 $\mathcal{F}_s$ 乘积回复点不必为极小点. 一个自然问题为: $\mathcal{F}_{\text{ps}}$ 乘积回复点是否必为极小点? 董攀登、邵松和叶向东回答了这个问题:

定理 5.7 ^[34] 任何 $\mathcal{F}_{\text{ps}}$ 乘积回复点必为极小点.

由于 $\mathcal{F}_{\text{pubd}}$ 乘积回复点为 $\mathcal{F}_{\text{ps}}$ 乘积回复点, 作为定理 5.7 的推论, 每个 $\mathcal{F}_{\text{pubd}}$ 乘积回复点必为极小点. 一般地, 我们有

推论 5.8 设 $\mathcal{F}$ 为满足 $\mathcal{F}_{\text{ps}} \subseteq \mathcal{F}$ 的族, 那么每个 $\mathcal{F}$ 乘积回复点必为极小点.

另外一个相关的结论是:

定理 5.9 ^[34] 由 $\mathcal{F}_s$ 乘积回复点的轨道闭包构造的系统是一个 M 系统.

易见 $\mathcal{F}_{\text{inf}}$ 乘积回复 $\Rightarrow \mathcal{F}_{\text{pubd}}$ 乘积回复 $\Rightarrow \mathcal{F}_{\text{ps}}$ 乘积回复, 文献 [34] 提出了如下问题: 上述蕴含关系可是严格的? Oprocha 和 Zhang ^[31] 研究了上述问题, 指出上面几个性质等价.

根据定理 5.6, 点 x 为 distal 的当且仅当 x 为 $\mathcal{F}_{\text{inf}}$ 乘积回复的. 于是为了回答刚才的问题, 仅需证明如下命题:

定理 5.10 ^[31] $\mathcal{F}_{\text{ps}}$ 乘积回复点为 distal 点.

5.4 弱乘积回复点

Furstenberg (参见文献 [4, 定理 9.11 和第 181 页] 或本文定理 5.6) 证明了一个点为乘积回复的当且仅当它为 distal 点. Auslander 和 Furstenberg ^[27] 提了如下问题: 如果对于任何极小点 y , (x, y) 为回复点, 那么 x 是否为 distal 点? 按照前面的定义, 即问弱乘积回复点是否为 distal 点? 文献 [30] 给出了否定的回答.

事实上, 在 Furstenberg 和 Auslander 提出这个问题时, Furstenberg 没有意识到在他之前的工作中就已回答了这个问题 (参见文献 [34, 定理 4.3]). 事实上, Furstenberg ^[4] 证明了 F 系统不交于任何极小系统. 任取一个 F 系统 X 以及它的一个传递点 x , 下面说明 x 是弱乘积回复但是非 distal 的. 设 y

为任何极小系统 Y 的极小点, 根据 Furstenberg 的结论, (x, y) 为 $X \times Y$ 的传递点, 尤其为 $X \times Y$ 的回复点. 于是 x 为弱乘积回复点. 另外易见 x 不可能为 distal 点.

于是自然有以下问题:

问题 5.11 (参见文献 [30, 问题 5.3] 和 [34, 问题 9.2]) 极小的弱乘积回复点是否为 distal 点?

最近, Galsner 和 Weiss^[32] 给出了一个否定的回答: 存在极小非 distal 的弱乘积回复点. 这个反例基于文献 [78–80] 中的双重极小 (doubly minimal) 系统和关于 POD (proximal orbit dense) 系统的知识.

定义 5.12 一个极小动力系统 (X, T) 称为 POD (proximal orbit dense), 是指它为完全极小的²⁾, 并且对于 X 中任何不同点 u 和 v , 存在非零 $n \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\Gamma_n = \{(T^n x, x) : x \in X\}$$

包含于 $\overline{\text{orb}((u, v), T \times T)}$ 中.

极小系统 (X, T) 称为双重极小 (doubly minimal^[80]) 或称为具有拓扑极小自交 (having topologically minimal self joinings in the sense of del Junco^[79]) 是指 $X \times X$ 中点在 $T \times T$ 下的轨道要么为图 $\Gamma_m = \{(T^m x, x) : x \in X\}$, $m \in \mathbb{Z}$, 要么为全空间 $X \times X$.

易见, 任何双重极小 (doubly minimal) 系统为 POD 的. 最近, Huang 和 Ye^[81] 证明了任何双重极小 (doubly minimal) 系统必为子转移系统. 下面是关于 POD 系统的重要性质:

定理 5.13^[78] 设 (Y, S) 为 POD 系统, 那么对于任何不是 (Y, S) 扩充的极小系统 (X, T) 不交于 (Y, S) .

下面的命题是从文献 [32] 的证明中提炼出的一个一般性结果.

命题 5.14 设 (X, T) 和 (Y, S) 为极小系统, $\pi : X \rightarrow Y$ 为因子映射. 设 $(y_0, x_1) \in Y \times X$ 以及 $y_1 = \pi(x_1)$.

(1) 如果存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $y_1 = S^n y_0$, 那么 $\overline{\text{orb}((y_0, x_1), S \times T)}$ 形如

$$\Gamma_{\pi, n} = \{(\pi(x), T^n x) : x \in X\};$$

(2) 如果 $\overline{\text{orb}((y_0, y_1), S \times S)} = Y \times Y$, 那么

$$\overline{\text{orb}((y_0, x_1), S \times T)} = Y \times X.$$

推论 5.15 设 (Y, S) 为双重极小 (doubly minimal) 系统, (X, T) 为任何一个极小系统, 那么乘积空间任何点 $(y, x) \in Y \times X$ 的轨道闭包要么为 $Y \times X$, 要么为图 $\Gamma_{\pi, n} = \{(\pi(z), T^n z) : z \in X\}$, 其中 $\pi : X \rightarrow Y$ 为因子映射, $n \in \mathbb{Z}$.

证明 设 (Y, S) 为双重极小 (doubly minimal) 系统, 那么 (Y, S) 为弱混合的且具有 POD 性质. 设 (X, T) 为任何一个极小系统. 根据定理 5.13, 要么 (X, T) 与 (Y, S) 为不交的, 要么 (Y, S) 为 (X, T) 的因子. 如为前者, 则乘积系统 $Y \times X$ 为极小的. 如为后者, 存在因子映射 $\pi : X \rightarrow Y$. 我们考虑点 $(y_0, x_1) \in Y \times X$, 且记 $y_1 = \pi(x_1)$. 那么根据命题 5.14 以及 (Y, S) 为双重极小 (doubly minimal) 系统, 我们就可得到所需结论. $\square$

由于存在非平凡的双重极小 (doubly minimal) 系统^[79, 80], 作为上面结果的推论我们得到问题 5.11 的否定回答. 首先我们注意任何极小弱混合系统没有 distal 点. 这是 Veech 的一个结论 (参见文献 [82]),

²⁾完全极小是指对于任何 $n \in \mathbb{N}$, (X, T^n) 也是极小系统.

也可按照下面事实推出这个结论: 设 (X, T) 为极小弱混合系统, 那么对于每个点 $x \in X$ 存在稠密 G_δ 子集 $X_0 \subset X$ 使得对于每个 $x_0 \in X_0$, 点对 (x, x_0) 为邻近的 (参见文献 [4, 定理 9.12]) 或引理 6.10 (参见文献 [83, 定理 3.8]). 关于这个结论的进一步推广参见文献 [84].

定理 5.16 ^[32] 存在极小弱混合系统, 它的每个点是弱乘积回复的.

证明 设 (Y, S) 为弱混合的双重极小 (doubly minimal) 系统, 设 (X, T) 为任何极小系统. 由定理 5.13, 要么 X 不交于 Y , 要么 Y 为 X 的因子. 如果为第一种情形, 那么 $Y \times X$ 为极小系统, 其上每个点 (y, x) 自然为回复的. 如果为第二种情形, 由推论 5.15, 要么

$$\overline{\text{orb}((y, x), S \times T)} = Y \times X,$$

要么

$$\overline{\text{orb}((y, x), S \times T)} = \Gamma_{\pi, n} = \{(\pi(z), T^n z) : z \in X\},$$

其中 $\pi : X \rightarrow Y$ 为因子映射, $n \in \mathbb{Z}$. 对于前者, (y, x) 为回复点; 对于后者, 存在 $z \in X$ 使得

$$(y, x) = (\pi(z), T^n z)$$

为回复点. 证毕. □

问题 5.17 给出弱乘积回复性质的刻画.

如果 x 为弱乘积回复点, 那么它必为回复点. 由定理 5.9, x 的轨道闭包为 M 系统. 我们猜测:

问题 5.18 如果 x 为弱乘积回复的, 那么其轨道闭包中的弱乘积回复点为稠密 G_δ 集.

6 Furstenberg 不交性问题

类比于数论中互素的概念, Furstenberg ^[4] 在动力系统中引入了不交性 (disjointness) 的概念.

定义 6.1 设 (X, T) 和 (Y, S) 为两个拓扑动力系统. 子集 $J \subset X \times Y$ 称为 X 和 Y 的一个交 (joining), 是指 J 为非空闭不变的子集, 并且到分量的投射分别映满 X 和 Y . 如果 $X \times Y$ 是唯一的交, 那么就称 (X, T) 和 (Y, S) 为不交的 (disjoint), 记为 $(X, T) \perp (Y, S)$ 或 $X \perp Y$.

设 $\mathcal{F}$ 为一些系统的集合, $\mathcal{F}^\perp$ 表示与所有 $\mathcal{F}$ 中元素不交的系统的全体. 用 $\mathcal{M}$ 表示全体极小系统的集合. Furstenberg ^[4] 证明了, 如果两个系统为不交的, 那么其中至少有一个系统为极小的. Furstenberg 提了如下自然的问题:

问题 6.2 (参见文献 [4, 问题 E]) 刻画 $\mathcal{M}^\perp$.

下面我们给出一个系统在 $\mathcal{M}^\perp$ 中的条件以及 $\mathcal{M}^\perp$ 中元素的一些性质, 这些结果来自文献 [29, 35–37, 85] 等.

6.1 必要条件

首先我们需要一些引理.

引理 6.3 设 (X, T) 为传递系统, $x \in \text{Tran}_T$. 那么

- (1) (X, T) 为 M 系统当且仅当对于 x 的任何邻域 U , $N(x, U)$ 为逐段 syndetic 的;
- (2) 设 K 为 (X, T) 的极小子集, 那么 K 是 (X, T) 唯一的一个极小子集当且仅当对于 K 的任何邻域 U , $N(x, U)$ 为 thickly syndetic 的.

定义 6.4 $\mathbb{Z}_+$ 的子集 A 称为 m 集, 是指存在极小系统 (Y, S) , $y \in Y$ 以及 Y 的非空开子集 V 使得 $A \supset N(y, V)$. 全体 m 集组成的集合记为 $\mathcal{F}_{\text{mset}}$.

可以证明下面的定理:

定理 6.5 设 (X, T) 为传递系统, $x \in \text{Trans}_T$. 那么

(1) $(X, T) \in \mathcal{M}^\perp$ 当且仅当对于 x 的任何邻域 U 以及任何 m 集 A ,

$$N(x, U) \cap A \neq \emptyset;$$

(2) $(X, T) \perp (Y, S)$ 当且仅当对于 x 的任何邻域 U , $N(x, U) \in \mathcal{F}_{\text{mset}}^*(Y)$.

通过复杂的构造, 我们能够证明

定理 6.6 每个 thickly syndetic 集合包含了一个 m 集合.

两个系统称为弱不交 (weakly disjoint), 是指乘积系统为传递的. 于是一个系统 scattering 当且仅当它与所有极小系统是弱不交的 (参见文献 [39]).

引理 6.7 (参见文献 [86, 定理 2.9(b)]) Scattering 系统弱不交于所有 M 系统.

有了以上的准备, 我们能够证明

定理 6.8 设 (X, T) 为传递系统. 如果 $(X, T) \perp \mathcal{M}$, 那么 (X, T) 为弱混合的 M 系统.

6.2 充分条件

Furstenberg^[4] 证明了一个系统为 F 系统当且仅当它为弱混合且具有稠密的周期点集; 他也证明了 F 系统不交于任何极小系统. 文献 [35] 证明了每个具有稠密正则极小点的弱混合系统不交于任何极小系统³⁾. 下面是这个结果的加强 (参见文献 [34, 37]).

定理 6.9 每个具有稠密 distal 点的弱混合系统不交于任何极小系统.

文献 [34] 给出了两个证明, 其中一个证明需要下面关于邻近核的一个结论. 对于一个动力系统 (X, T) 和点 $x \in X$, 它的邻近核是指,

$$P[x] = \{y \in X : y \text{ 邻近于 } x\} = \{y \in X : (x, y) \in P(X, T)\}.$$

关于更多邻近核的研究参见文献 [83, 84].

引理 6.10 (参见文献 [83, 定理 3.8]) 设 (X, T) 为弱混合系统, 那么对于任何点 $x \in X$, 它的邻近核 $P[x]$ 为 X 的稠密 G_δ 子集.

在研究超空间时, Li 等^[36] 加强了定理 6.9. 首先他们证明了下面的定理:

定理 6.11 设 (X, T) 为动力系统. 如果 $(K(X), T_K)$ 为弱混合的, 并且不交于任何极小系统, 那么 (X, T) 是弱混合的且不交于任何极小系统.

我们称动力系统 (X, T) 具有稠密 distal 集, 是指对于 X 的任何非空开集 U , 存在 $(K(X), T_K)$ 的 distal 点 C 使得 $C \subset U$.

命题 6.12 设 (X, T) 为动力系统. 则以下命题等价:

- (1) (X, T) 为弱混合的且具有稠密 distal 集;
- (2) $(K(X), T_K)$ 为弱混合的且 distal 点全体在空间中稠密;
- (3) $(K(X), T_K)$ 为弱混合的且具有稠密 distal 集.

综合定理 6.11、命题 6.12 和定理 6.9, 我们有如下定理 6.9 的推广:

³⁾一个极小点 x 称为是正则的 (regular) 是指对于 x 的每个邻域 U , 存在 k 使得 $N(x, U) \supset k\mathbb{Z}_+$.

定理 6.13 每个具有稠密 distal 集的弱混合系统不交于任何极小系统.

注意存在系统具有稠密的 distal 集, 但是它的 distal 点全体不稠密 (参见文献 [85]).

6.3 问题

已知如果系统 (X, T) 为弱混合的 M 系统, 那么 $(K(X), T_K)$ 亦然. 于是我们有如下问题:

问题 6.14 是否有如下结果: 一个传递系统 (X, T) 不交于任何极小系统当且仅当 $(K(X), T_K)$ 为传递的且 distal 点全体稠密?

注意, 文献 [34] 证明了任何具有稠密极小点的弱混合系统不交于所有极小 PI 系统.

7 更多的问题

由于篇幅的限制, 还有很多有意义的回复性问题无法展开. 这里陈述了几个未解决的问题. Glasner 和 Maon^[87] 引入了各种刚性. 对于 $n \in \mathbb{N}$, 我们称系统 (X, T) 为 n 刚性 (n -rigid), 是指乘积系统 $(X^n, T^{(n)})$ 中每个点都是回复点.

问题 7.1 对 $n \geq 2$, 是否存在系统为 n 刚性但是非 $n+1$ 刚性的?

文献 [85] 证明了, 如果 (X, T) 为一致刚性的 (存在 $n_i \rightarrow \infty$ 使得 $d(T^{n_i}, \text{id}) \rightarrow 0$), 那么 $(K(X), T_K)$ 是逐点回复的.

问题 7.2 是否存在 (X, T) 使得 $(K(X), T_K)$ 是逐点回复的, 但 (X, T) 不为一致刚性的?

Weiss^[80] 证明了正的 2- 刚性蕴含拓扑熵为零. 一个未解决的问题是

问题 7.3 是否 2- 刚性蕴含拓扑熵为零?

问题 7.4 设 $\mathbb{P}$ 为素数集合, 那么集合

$$C_d(\mathbb{P}) = \{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P} \cap (\mathbb{P} - n) \cap (\mathbb{P} - 2n) \cap \cdots \cap (\mathbb{P} - dn) \neq \emptyset\}$$

是否为 $\text{Nil}_d \text{ Bohr}_0$ 集合?

注意根据 Green 和 Tao^[19] 的结论, 对于任何 $d \in \mathbb{N}$, $C_d(\mathbb{P}) \neq \emptyset$.

参考文献

- 1 Akin E. The General Topology of Dynamical Systems. Graduate Studies in Mathematics, vol. 1. Providence: Amer Math Soc, 1993
- 2 Akin E. Recurrence in Topological Dynamical Systems: Furstenberg Families and Ellis Actions. New York: Plenum Press, 1997
- 3 Furstenberg H. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation. Math Syst Theory, 1967, 1: 1–49
- 4 Furstenberg H. Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory. Princeton: Princeton University Press, 1981
- 5 de Vries J. Elements of Topological Dynamics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993
- 6 Walters P. An Introduction to Ergodic Theory. Graduate Texts in Mathematics, vol. 79. New York/Berlin: Springer-Verlag, 1982
- 7 Bergelson V. Combinatorial and Diophantine applications of ergodic theory. In: Handbook of Dynamical Systems, vol. 1B. Amsterdam: Elsevier B V, 2006, 745–869
- 8 Bergelson V. Ultrafilters, IP sets, dynamics, and combinatorial number theory. In: Ultrafilters across Mathematics. Contemporary Mathematics, vol. 530. Providence: Amer Math Soc, 2010, 23–47

- 9 Glasner E. Classifying dynamical systems by their recurrence properties. *Topol Methods Nonlinear Anal*, 2004, 24: 21–40
- 10 Glasner E, Weiss B. On the interplay between measurable and topological dynamics. In: *Handbook of Dynamical Systems*, vol. 1B. Amsterdam: Elsevier B V, 2006, 597–648
- 11 Li L, Ye X. Recent development of chaos theory in topological dynamics. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2016, 32: 83–114
- 12 Oprocha P, Zhang G. Topological aspects of dynamics of pairs, tuples and sets. In: *Recent Progress in General Topology*, III. Paris: Atlantis Press, 2014, 665–709
- 13 Gottschalk W, Hedlund G. *Topological Dynamics*. Providence: Amer Math Soc, 1955
- 14 Auslander J. *Minimal Flows and Their Extensions*. North-Holland Mathematics Studies, vol. 153. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1988
- 15 Ellis R. *Lectures on Topological Dynamics*. New York: W A Benjamin, 1969
- 16 Erdős P, Turán P. On some sequences of integers. *J Lond Math Soc* (2), 1936, 11: 261–264
- 17 Szemerédi E. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. *Acta Arith*, 1975, 27: 199–245
- 18 Furstenberg H. Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions. *J Anal Math*, 1977, 31: 204–256
- 19 Green B, Tao T. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. *Ann of Math* (2), 2008, 167: 481–547
- 20 Furstenberg H, Weiss B. Topological dynamics and combinatorial number theory. *J Anal Math*, 1978, 34: 61–85
- 21 Katznelson Y. Chromatic numbers of Cayley graphs on $\mathbb{Z}$ and recurrence. *Combinatorica*, 2001, 21: 211–219
- 22 Følner E. Generalization of a theorem of Bogoliuboff to topological abelian groups. *Math Scand*, 1954, 2: 5–19
- 23 Veech W A. The equicontinuous structure relation for minimal Abelian transformation groups. *Amer J Math*, 1968, 90: 723–732
- 24 Glasner E. On minimal actions of Polish groups. *Topology Appl*, 1998, 117: 259–272
- 25 Huang W, Ye X. Generic eigenvalues, generic homomorphisms and weak disjointness. *Contemp Math*, 2012, 567: 119–143
- 26 Huang W, Shao S, Ye X. Nil Bohr-sets and almost automorphy of higher order. *Mem Amer Math Soc*, 2016, 241: 1–86
- 27 Auslander J, Furstenberg H. Product recurrence and distal points. *Trans Amer Math Soc*, 1994, 343: 221–232
- 28 Ellis D, Ellis R, Nerurkar M. The topological dynamics of semigroup actions. *Trans Amer Math Soc*, 2001, 353: 1279–1320
- 29 Dong P, Donoso S, Maass A, et al. Infinite-step nilsystems, independence and complexity. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2013, 33: 118–143
- 30 Haddad K, Ott W. Recurrence in pairs. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2008, 28: 1135–1143
- 31 Oprocha P, Zhang G. On weak product recurrence and synchronization of return times. *Adv Math*, 2013, 244: 395–412
- 32 Glasner E, Weiss B. On doubly minimal systems and a question regarding product recurrence. *ArXiv:1508.02817*, 2015
- 33 Glasner E. *Ergodic Theory via Joinings*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 101. Providence: Amer Math Soc, 2003
- 34 Dong P, Shao S, Ye X. Product recurrent properties, disjointness and weak disjointness. *Israel J Math*, 2012, 188: 463–507
- 35 Huang W, Ye X. Dynamical systems disjoint from any minimal system. *Trans Amer Math Soc*, 2005, 357: 669–694
- 36 Li J, Yan K, Ye X. Recurrence properties and disjointness on the induced spaces. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2015, 35: 1059–1073
- 37 Oprocha P. Weak mixing and product recurrence. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 2010, 60: 1233–1257
- 38 Glasner E, Weiss B. Sensitive dependence on initial conditions. *Nonlinearity*, 1993, 6: 1067–1075
- 39 Blanchard F, Host B, Maass A. Topological complexity. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2000, 20: 641–662
- 40 Hindman N. Finite sums from sequences within cells of a partition of $\mathbb{N}$. *J Combin Theory Ser A*, 1974, 17: 1–11
- 41 Huang W, Park K, Ye X. Dynamical systems disjoint from all minimal systems with zero entropy. *Bull Soc Math France*, 2007, 135: 259–282
- 42 Leibman A. Pointwise convergence of ergodic averages for polynomial sequences of translations on a nilmanifold. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2005, 25: 201–213
- 43 Corwin L J, Greenleaf F P. *Representations of Nilpotent Lie Groups and Their Applications, I: Basic Theory and Examples*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990
- 44 Malcev A I. On a class of homogeneous spaces. *Izv Ross Akad Nauk Ser Mat*, 1949, 13: 9–32
- 45 Host B, Kra B, Maass A. Nilsequences and a structure theory for topological dynamical systems. *Adv Math*, 2010, 224: 103–129
- 46 Nadler S B J. *Continuum Theory: An Introduction*. New York: Marcel Dekker, 1992

- 47 van der Waerden L. Beweis eine baudetschen vermutung nieus arch. Wisk, 1927, 15: 212–216
- 48 Furstenberg H, Katznelson Y. An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations. J Anal Math, 1978, 34: 275–291
- 49 Furstenberg H, Katznelson Y. An ergodic Szemerédi theorem for IP-systems and combinatorial theory. J Anal Math, 1985, 45: 117–168
- 50 Furstenberg H, Katznelson Y. A density version of the Hales-Jewett theorem. J Anal Math, 1991, 57: 64–119
- 51 Frantzikinakis N, Lesigne E, Wierdl M. Sets of k -recurrence but not $(k+1)$ -recurrence. Ann Inst Fourier (Grenoble), 2006, 56: 839–849
- 52 Leibman A. Multiple recurrence theorem for nilpotent group actions. Geom Funct Anal, 1994, 4: 648–659
- 53 Bergelson V, Leibman S. Polynomial extensions of van der Waerden’s and Szemerédi’s theorems. J Amer Math Soc, 1996, 9: 725–753
- 54 Zorin-Kranich P. A nilpotent IP polynomial multiple recurrence theorem. J Anal Math, 2014, 123: 183–225
- 55 Host B, Kra B. Nonconventional ergodic averages and nilmanifolds. Ann of Math (2), 2005, 161: 397–488
- 56 Ziegler T. Universal characteristic factors and Furstenberg averages. J Amer Math Soc, 2007, 20: 53–97
- 57 Tao T. Norm convergence of multiple ergodic averages for commuting transformations. Ergodic Theory Dynam Systems, 2008, 28: 657–688
- 58 Walsh M. Norm convergence of nilpotent ergodic averages. Ann of Math (2), 2012, 175: 1667–1688
- 59 Bourgain J. Pointwise ergodic theorems for arithmetic sets. Publ Math Inst Hautes Études Sci, 1989, 69: 5–45
- 60 Bourgain J. Double recurrence and almost sure convergence. J Reine Angew Math, 1990, 404: 140–161
- 61 Huang W, Shao S, Ye X. Pointwise convergence of multiple ergodic averages and strictly ergodic models. ArXiv:1406.5930, 2014
- 62 Glasner E. Topological ergodic decompositions and applications to products of powers of a minimal transformation. J Anal Math, 1994, 64: 241–262
- 63 Kwietniak D, Oprocha P. On weak mixing, minimality and weak disjointness of all iterates. Ergodic Theory Dynam Systems, 2012, 32: 1661–1672
- 64 Moothathu T K S. Diagonal points having dense orbit. Colloq Math, 2010, 120: 127–138
- 65 Huang W, Shao S, Ye X. Topological correspondence of multiple ergodic averages of nilpotent group actions. J Anal Math, in press, 2016
- 66 Host B, Kra B, Maass A. Variations on topological recurrence. Monatsh Math, 2016, 179: 57–89
- 67 Boshernitzan M, Glasner E. On two recurrence problems. Fund Math, 2009, 206: 113–130
- 68 Ellis R, Keynes H. Bohr compactifications and a result of Følner. Israel J Math, 1972, 12: 314–330
- 69 Kříž I. Large independent sets in shift-invariant graphs: Solution of Bergelson’s problem. Graphs Combin, 1987, 3: 145–158
- 70 Bergelson V, Host B, Kra B. Multiple recurrence and nilsequences. Invent Math, 2005, 160: 261–303
- 71 Shao S, Ye X. Regionally proximal relation of order d is an equivalence one for minimal systems and a combinatorial consequence. Adv Math, 2012, 231: 1786–1817
- 72 Gutman Y, Manners F, Varjú P P. Cubespaces and higher order Fourier analysis. ArXiv:1605.08945, 2016
- 73 Gutman Y, Manners F, Varjú P P. Nilspaces and nilmanifolds. ArXiv:1605.08948, 2016
- 74 Gutman Y, Manners F, Varjú P P. Nilspaces and inverse limit representation theorems for topological dynamical systems. ArXiv:1605.08950, 2016
- 75 Host B, Kra B. Nil-Bohr sets of integers. Ergodic Theory Dynam Systems, 2011, 31: 113–142
- 76 Konieczny J. Combinatorial properties of Nil-Bohr sets. ArXiv:1507.07370, 2015
- 77 Weiss B. Single Orbit Dynamics. Providence: Amer Math Soc, 2000
- 78 Furstenberg H, Keynes H, Shapiro L. Prime flows in topological dynamics. Israel J Math, 1973, 14: 26–38
- 79 King J L. A map with topological minimal self-joinings in the sense of del Junco. Ergodic Theory Dynam Systems, 1990, 10: 745–761
- 80 Weiss B. Multiple recurrence and doubly minimal systems. In: Topological Dynamics and Applications (Minneapolis, MN, 1995). Providence: Amer Math Soc, 1998, 189–196
- 81 Huang W, Ye X. A note on double minimality. Comm Math Stat, 2015, 3: 57–61
- 82 Veech W A. Point-distal systems. Amer J Math, 1970, 92: 205–242
- 83 Akin E, Kolyada S. Li-Yorke sensitivity. Nonlinearity, 2003, 16: 1421–1433
- 84 Huang W, Shao S, Ye X. Mixing and proximal cells along sequences. Nonlinearity, 2004, 17: 1245–1260
- 85 Li J, Oprocha P, Ye X, et al. When are all closed subsets recurrent? Ergodic Theory Dynam Systems, doi: 10.1017/etds.2016.5, 2016

86 Akin E, Glasner E. Residual properties and almost equicontinuity. J Anal Math, 2001, 84: 243–286

87 Glasner E, Maon D. Rigidity in topological dynamics. Ergodic Theory Dynam Systems, 1989, 9: 309–320

Progress on some recurrence problems in dynamics

YE XiangDong & SHAO Song

Abstract The investigation of recurrence is in the center of the study of dynamical systems. In this survey we will discuss progress on some recurrence problems in dynamics, focusing on several topics related to multiple recurrence, Bohr problem, product recurrence, and Furstenberg disjointness problem etc. Our main aim is to introduce briefly recent progress on some recurrence problems in dynamics, give related references and state some open problems.

Keywords multiple recurrence, Bohr problem, product recurrence, Furstenberg disjointness

MSC(2010) 37B20, 37B05, 37A25

doi: 10.1360/N012016-00087