多小波框架的构造理论

郭蔚^{①②*}, 彭立中^{③④}

① 河北工业大学理学院计算数学系, 天津 300130;

② 北京国际数学中心, 北京 100871;

③ 北京大学数学科学学院, 北京 100871;

④ 河北师范大学数学与信息科学学院, 石家庄 050016

E-mail: guowei@math.pku.edu.cn, lzpeng@math.pku.edu.cn

收稿日期: 2010-04-19; 接受日期: 2010-08-31; * 通信作者

国家自然科学基金数学天元基金 (批准号: 10926179) 和河北省科学技术研究与发展计划项目 (批准号: 072435158D, 09213515D, 09213575D) 资助项目

摘要 本文给出了多小波框架的 sub-QMF 条件, 提出了多小波框架低通滤波器的参数化设计, 由正交分解和矩阵的西扩张得到其相应的高通滤波器表示的整套多小波框架设计的参数化方法, 同时针对多描述编码的需求, 构造了两个长折叠对称带参数的多小波紧框架.

关键词 多小波框架 多小波框架的参数化 低通和高通滤波器的设计 多描述编码

MSC (2000) 主题分类 42B15, 42C40, 57R25

1 研究背景

任何一门学科的发展都是由理论研究和应用背景的双重刺激深入的. 从理论研究到信号处理的应用, 人们都希望小波具有一些良好的性质, 比如紧支撑、对称性、正交性、正则性和消失矩. 然而遗憾的是一维小波同时具有前三个性质的只有 Haar 小波^[1]. 由于 Haar 小波的光滑性较差, 在实际应用中效果并不理想. 那么在紧支撑、对称性和正交性三者之间, 我们必须做一个妥协. 小波的紧支撑等价于其滤波器的有限长, 这对于用计算机处理信号来说是必须的. 小波的对称性保证了信号的线性相位, 也就保证了信号变换的不失真. 看来唯一可以放弃的就是小波的正交性. 于是人们开始研究双正交小波、小波框架和多小波. Cohen 等^[2,3], Vetterli 和 Herley^[4] 分别构造了双正交小波. 而双正交小波由两个不同的多分辨分析构成, 它的分解和合成在任意尺度下不能交换. 为了保证基的交换性, 避免基交换的复杂性, 人们希望用相同的小波进行合成和分解, 这便是小波框架. 另一方面对紧支撑、对称性和正交性同时拥有的追求引发了多小波的发展. 与此同时随着互联网和无线网, 乃至新兴的 P2P 对等网的发展, 为了克服网络的带宽波动、堵塞引起的掉包、信号无法正确解码的现象, 人们提出了多描述编码 MDC 技术. 它要求将信号分解成具有一定的冗余量、相互能量均衡的几个描述在不同的信道传输. 小波框架和多小波正好能满足这种需要. 但多小波框架设计的研究结果并不多.

2003 年, Han 和 Mo 在 [5] 中给出了从尺度函数向量出发构造对偶多小波框架的方法. 2007 年, Averbuch 等给出了多小波框架的完全重构条件, 并给出了基于一对插值的多低通滤波器构造三通道对偶多框架的方法, 同时给出了以三次 B 样条为低通滤波器的构造实例^[6]. 那么多小波框架的低通和高通滤波可否设计? 低通滤波器的 sub-QMF 条件又是什么形式? 单小波的构造理论已经非常成

引用格式: Guo W, Peng L Z. The construct theory of multiwavelet frames (in Chinese). Sci Sin Math, 2010, 40(11): 1115–1128, doi: 10.1360/012010-288

熟^[7-10], 可否直接推广到多小波中? 然而多小波的滤波器系数为矩阵, 矩阵有不可交换性, 矩阵不等式该如何定义? 因此多小波框架的理论研究和构造方法成为一个具有挑战性的问题.

2 多小波框架

定义 2.1 设 $\{\psi^1, \dots, \psi^L\} \in L^2(R)$, 如果存在常数 C_1, C_2 , $0 \leq C_1 \leq C_2$, 使得

$$\begin{aligned} C_1 \|f\|^2 &\leq \sum_{l=1}^L \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k}^l \rangle|^2 \leq C_2 \|f\|^2, \quad \forall f \in L^2(R), \\ |\langle f, \psi_{j,k}^l \rangle|^2 &= \langle f, \psi_{j,k}^l \rangle \langle \psi_{j,k}^l, f \rangle, \\ \|f\|^2 &= \langle f, f \rangle, \\ \langle h, g \rangle &= \int_R h(t) \bar{g}(t)^T dt, \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中 h 是 $m \times n$ 矩阵, g 是 $j \times n$ 矩阵, 我们称 $(\psi^1, \dots, \psi^L)$ 为框架. 特别当 $C_1 = C_2 = 1$ 时, 我们称其为紧框架.

设 r 重的低通滤波器 $\{H_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, 它对应的高通滤波器 $\{G_k^l\}_{k \in \mathbb{Z}, l=1, \dots, L}$. H_k, G_k^l 均为 $r \times r$ 矩阵. 记它们的 Z 变换为

$$P(Z) = \sum_k H_k Z^{-k}, \quad Q_L(Z) = \sum_k G_k^L Z^{-k}.$$

下述定理给出了多小波框架的完全重构条件.

定理 2.2^[6] 框架 $\{H_k, G_k^l\}$ 完全重构的充要条件是

$$R^*(Z)R(Z) = I_{2r}, \quad (2.2)$$

其中相位矩阵

$$R(Z) = \begin{pmatrix} P(Z) & P(-Z) \\ Q_1(Z) & Q_1(-Z) \\ \vdots & \vdots \\ Q_L(Z) & Q_L(-Z) \end{pmatrix}.$$

3 多小波框架低通滤波器的 sub-QMF 条件

我们首先将 C^* 代数的极分解定理作为我们的引理, 推导出 AA^* 酉等价于 A^*A . 最后推导出多小波框架低通滤波器应满足的 sub-QMF 条件.

引理 3.1 设 A 是复的 $n \times n$ 阶矩阵, 则

$$A = U\sqrt{A^*A},$$

其中 U 是酉矩阵.

证明 见文献 [11].

引理 3.2 AA^* 与 A^*A 酉等价, 即 $AA^* \cong A^*A$.

证明 由引理 3.1 有

$$A = U\sqrt{A^*A}.$$

则

$$A^* = \sqrt{A^*A}U.$$

于是

$$AA^* = U\sqrt{A^*A}\sqrt{A^*A}U = UA^*AU.$$

故

$$AA^* \cong A^*A.$$

引理 3.3 若 $\{P, Q_1, \dots, Q_L\}$ 是多重小波紧框架, 且满足完全重构条件, 则

$$\begin{pmatrix} P^*(Z) \\ P^*(-Z) \end{pmatrix} (P(Z) \ P(-Z)) \leq I_{2r}.$$

证明 由定理 2.2 我们有 $R^*(Z)R(Z) = I_{2r}$, 即

$$\begin{pmatrix} P^*(Z) & Q_1^*(Z) & \cdots & Q_L^*(Z) \\ P^*(-Z) & Q_1^*(-Z) & \cdots & Q_L^*(-Z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(Z) & P(-Z) \\ Q_1(Z) & Q_1(-Z) \\ \vdots & \vdots \\ Q_L(Z) & Q_L(-Z) \end{pmatrix} = I_{2r}. \quad (3.1)$$

记

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1(Z) & Q_1(-Z) \\ \vdots & \vdots \\ Q_L(Z) & Q_L(-Z) \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix} P^*(Z) \\ P^*(-Z) \end{pmatrix} (P(Z) \ P(-Z)) + Q^*Q = I_{2r}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} P^*(Z) \\ P^*(-Z) \end{pmatrix} (P(Z) \ P(-Z)) \leq I_{2r}.$$

定理 3.4 若多小波紧框架满足

$$\begin{pmatrix} P^*(Z) \\ P^*(-Z) \end{pmatrix} (P(Z) \ P(-Z)) \leq I_{2r},$$

则

$$P(Z)P^*(Z) + P(-Z)P^*(-Z) \leq I_r. \quad (3.2)$$

证明

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P^*(Z) \\ P^*(-Z) \end{pmatrix} (P(Z) \ P(-Z)) &= \begin{pmatrix} P^*(Z)P(Z) & P^*(Z)P(-Z) \\ P^*(-Z)P(Z) & P^*(-Z)P(-Z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P^*(Z) & 0 \\ P^*(-Z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(Z) & P(-Z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

记

$$F(Z) = \begin{pmatrix} P(Z) & P(-Z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则有

$$F^*(Z)F(Z) \leq I_{2r}.$$

由引理 3.2 知

$$F^*(Z)F(Z) \cong F(Z)F^*(Z).$$

所以

$$F(Z)F^*(Z) \leq I_{2r}.$$

即

$$\begin{pmatrix} P(Z) & P(-Z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^*(Z) & 0 \\ P^*(-Z) & 0 \end{pmatrix} \leq I_{2r}.$$

故

$$P(Z)P^*(Z) + P(-Z)P^*(-Z) \leq I_r.$$

为了运算的方便, 我们给出 (3.2) 的另一种等价形式.

设

$$\begin{aligned} P(Z) &= \sum_n H_n Z^n \\ &= \sum_k H_{2k} Z^{2k} + Z \sum_k H_{2k+1} Z^{2k}, \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} P_e(Z) &= \sqrt{2} \sum_k H_{2k} Z^k, \\ P_o(Z) &= \sqrt{2} \sum_k H_{2k+1} Z^k, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} P(Z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (P_e(Z^2) + Z P_o(Z^2)) \\ &= ((P_e(Z^2) \ P_o(Z^2))) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_r \\ Z I_r \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P(Z)P^*(Z) + P(-Z)P^*(-Z) \\
&= (P(Z) \ P(-Z)) \begin{pmatrix} P^*(Z) \\ P^*(-Z) \end{pmatrix} \\
&= (P_e(Z^2) \ P_o(Z^2)) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_r & I_r \\ ZI_r & -ZI_r \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_r & Z^{-1}I_r \\ I_r & -Z^{-1}I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_e^*(Z^2) \\ P_o^*(Z^2) \end{pmatrix} \\
&= (P_e(Z^2) \ P_o(Z^2)) \begin{pmatrix} P_e^*(Z^2) \\ P_o^*(Z^2) \end{pmatrix} \\
&= P_e(Z^2)P_e^*(Z^2) + P_o(Z^2)P_o^*(Z^2),
\end{aligned}$$

于是 (3.2) 有如下等价形式

$$P_e(Z^2)P_e^*(Z^2) + P_o(Z^2)P_o^*(Z^2) \leq I_r.$$

即

$$P_e(Z)P_e^*(Z) + P_o(Z)P_o^*(Z) \leq I_r. \quad (3.3)$$

上述定理给出了多小波紧框架低通滤波器所满足的充要条件, 它正好与单小波紧框架的 sub-SQF 的形式很一致. 这使得多小波框架的低通滤波器设计有了理论依据.

4 多小波框架高通滤波器的构造

定理 4.1 若 $P(Z)P^*(Z) + P(-Z)P^*(-Z) \leq I_r$, 则存在 $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_L\}$ 使得 $\{P, Q_1, Q_2, \dots, Q_L\}$ 满足紧框架,

$$Q(Z) = \begin{pmatrix} Q_1(Z) & Q_1(-Z) \\ \vdots & \vdots \\ Q_L(Z) & Q_L(-Z) \end{pmatrix},$$

且 Q 有如下形式

$$Q(Z) = M\sqrt{\Lambda(Z)}Y(Z),$$

其中 $\Lambda(Z)$ 为

$$I_{2r} - \begin{pmatrix} P^*(Z) \\ P^*(-Z) \end{pmatrix} (P(Z) \ P(-Z))$$

的特征根组成的对角矩阵, $Y(Z)$ 为其对应的特征向量,

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_r & I_r \\ ZI_r & -ZI_r \end{pmatrix}.$$

证明 若 $\{P, Q_1, \dots, Q_L\}$ 构成紧框架, 则有

$$\begin{pmatrix} P^*(Z) & Q_1^*(Z) & \cdots & Q_L^*(Z) \\ P^*(-Z) & Q_1^*(-Z) & \cdots & Q_L^*(-Z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(Z) & P(-Z) \\ Q_1(Z) & Q_1(-Z) \\ \vdots & \vdots \\ Q_L(Z) & Q_L(-Z) \end{pmatrix} = I_{2r},$$

$$\begin{pmatrix} P^*(Z) \\ P^*(-Z) \end{pmatrix} (P(Z) \ P(-Z)) + Q^*Q = I_{2r},$$

$$\begin{aligned} Q^*Q &= I_{2r} - \begin{pmatrix} P^*(Z) \\ P^*(-Z) \end{pmatrix} (P(Z) \ P(-Z)) \\ &= Y^*(Z)\Lambda(Z)Y(Z) \\ &= Y^*(Z)\sqrt{\Lambda(Z)}M^*M\sqrt{\Lambda(Z)}Y(Z). \end{aligned}$$

这里 $\Lambda(Z)$ 为

$$I_{2r} - \begin{pmatrix} P^*(Z) \\ P^*(-Z) \end{pmatrix} (P(Z) \ P(-Z))$$

的特征根组成的对角矩阵, $Y(Z)$ 为其对应的特征向量. 根据正算子函数演算定理, 于是有

$$Q = M\sqrt{\Lambda(Z)}Y(Z).$$

同样用奇偶相位分解矩阵我们可得下面等价的形式:

$$\begin{aligned} Q^*Q &= I_{2r} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_2 & Z^{-1}I_2 \\ I_2 & -Z^{-1}I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_e^*(Z^2) \\ P_o^*(Z^2) \end{pmatrix} (P_e(Z^2) \ P_o(Z^2)) \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ ZI_2 & -ZI_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_2 & Z^{-1}I_2 \\ I_2 & -Z^{-1}I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ ZI_2 & -ZI_2 \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_2 & Z^{-1}I_2 \\ I_2 & -Z^{-1}I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_e^*(Z^2) \\ P_o^*(Z^2) \end{pmatrix} (P_e(Z^2) \ P_o(Z^2)) \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ ZI_2 & -ZI_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_2 & Z^{-1}I_2 \\ I_2 & -Z^{-1}I_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(I_4 - \begin{pmatrix} P_e^*(Z^2) \\ P_o^*(Z^2) \end{pmatrix} (P_e(Z^2) \ P_o(Z^2)) \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ ZI_2 & -ZI_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

将 A 对角化, 记

$$A = \left(I_4 - \begin{pmatrix} P_e^*(Z^2) \\ P_o^*(Z^2) \end{pmatrix} (P_e(Z^2) \ P_o(Z^2)) \right),$$

可得 $A = Y_A^*(Z)\sqrt{\Lambda_A(Z)}\sqrt{\Lambda_A(Z)}Y_A(Z)$. 其中 $\sqrt{\Lambda_A(Z)}$ 为 A 的特征根组成的对角矩阵, $Y_A(Z)$ 为其对应的特征向量矩阵. 进一步, 记

$$\sqrt{\Lambda_A(Z)}Y_A(Z) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

这里 $\{A_{ij}\}$ 为 2 阶矩阵. 于是

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ ZI_2 & -ZI_2 \end{pmatrix},$$

这样, 我们得到对应的两个高通,

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_{11} + A_{12}Z), \quad Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_{21} + A_{22}Z).$$

由上述定理可以得到多小波紧框架高通滤波器的一般构造方法:

步骤 1 将低通滤波器的符号 $P(z)$ 做相位分解得到

$$P_e(Z) = \sqrt{2} \sum_k H_{2k} Z^k, \quad P_o(Z) = \sqrt{2} \sum_k H_{2k+1} Z^k.$$

步骤 2 求解矩阵

$$A = \left(I_4 - \begin{pmatrix} P_e^*(Z^2) \\ P_o^*(Z^2) \end{pmatrix} (P_e(Z^2) \ P_o(Z^2)) \right)$$

的特征根.

步骤 3 求解步骤 2 中所求特征根对应的特征向量.

步骤 4 由特征根组成的对角矩阵 $\Lambda_A(Z)$ 和由特征向量组成的矩阵 $Y_A(Z)$ 可得

$$\sqrt{\Lambda_A(Z)}Y_A(Z) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

步骤 5 求得两个高通滤波器为:

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_{11} + A_{12}Z), \quad Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_{21} + A_{22}Z).$$

以上构造步骤中的第 2 步和第 3 步, 矩阵求特征根和特征向量目前还没有快速算法. 这使得该算法对高阶矩阵的运算有一定的困难. 下面的定理通过酉扩张给出了一种易运算的构造方式.

定理 4.2 若 2×2 低通滤波器的符号 $P(Z)$ 满足

$$P(Z)P^*(Z) + P(-Z)P^*(-Z) \leq I_2,$$

则存在 $\{Q_1(Z), Q_2(Z), Q_3(Z)\}$ 使得 $\{P(Z), Q_1(Z), Q_2(Z), Q_3(Z)\}$ 构成紧框架.

证明 将

$$P(Z)P^*(Z) + P(-Z)P^*(-Z) \leq I_2,$$

变成等价形式

$$P_e(Z)P_e^*(Z) + P_o(Z)P_o^*(Z) \leq I_2,$$

寻找一个矩阵元素为 Laurent 多项式的 2×2 矩阵 $\tilde{P}(Z)$, 使得

$$P_e(Z)P_e^*(Z) + P_o(Z)P_o^*(Z) + \tilde{P}(Z)\tilde{P}^*(Z) = I_2. \quad (4.1)$$

记 $\hat{F}(Z) = (P_e(Z) \ P_o(Z) \ \tilde{P}(Z))$, 则 $\hat{F}(Z)\hat{F}^*(Z) = I_2$. 令 $Q(Z) = I_6 - \hat{F}^*(Z)\hat{F}(Z)$, 容易验证 $Q^*Q = Q$. 于是

$$Q^*Q + \hat{F}^*\hat{F} = I_6. \quad (4.2)$$

设

$$Q(Z) = \{Q_{ij}(Z)\}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

取 Q 的前两列并记为

$$\hat{Q}(Z) = \{Q_{ij}(Z)\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2.$$

记 $F(Z) = (P_e(Z) \ P_o(Z))$, 由 (4.2) 可得:

$$F^*(Z)F(Z) + \hat{Q}^*(Z)\hat{Q}(Z) = I_4,$$

$$\begin{pmatrix} P_e^*(Z) & Q_{11}^*(Z) & Q_{21}^*(Z) & Q_{31}^*(Z) \\ P_o^*(Z) & Q_{12}^*(Z) & Q_{22}^*(Z) & Q_{32}^*(Z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_e(Z) & P_o(Z) \\ Q_{11}(Z) & Q_{12}(Z) \\ Q_{21}(Z) & Q_{22}(Z) \\ Q_{31}(Z) & Q_{32}(Z) \end{pmatrix} = I_4.$$

取

$$Q_i(Z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_{i1}(Z) + ZQ_{i2}(Z)), \quad i = 1, 2, 3,$$

即为新求的三个高通滤波器. 其中, 由 $Q(Z) = I_6 - \hat{F}^*(Z)\hat{F}(Z)$, 我们可知

$$\begin{aligned} Q_1(Z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[I_2 - P_e^*(Z)P_e(Z) - ZP_e^*(Z)P_o(Z)], \\ Q_2(Z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[-P_o^*(Z)P_e(Z) + Z(I_2 - P_o^*(Z)P_o(Z))], \\ Q_3(Z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[-\tilde{P}^*(Z)P_e(Z) - Z\tilde{P}^*(Z)P_o(Z)]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

在以上定理中, 只要能找到 $\tilde{P}(Z)$, 由 (4.3) 式很容易能得到三个相应的高通滤波器. 这里 $\tilde{P}(Z)$ 不是唯一的. 我们在下一节中给出两种不同的求法, 由此也能看到它对高通滤波器的影响.

5 多小波框架的参数化表示和例子

我们对多小波框架的研究和设计主要源于多描述编码 MDC^[11-14] 的应用. 而 MDC 设计的目标就是保持各个描述之间的相关和平衡. 以往的平衡定义是指各个描述之间信号能量的均衡, 这正好与多小波的平衡性一致. 文献 [15] 给出了 DMC 设计中平衡的一个新的度量 — 平衡偏心模 BEM (balance

eccentric module), 也就是将两个描述中的失真率相减取模. 当平衡偏心模为零时, 说明两个描述的失真率相等. 当两个描述的能量和失真率都相同的情况下, 它们之间的相互补偿更加接近有效, 文献 [15] 同时还给出一个重要的结论: 一个有限长的平衡多小波如果同时还是折叠对称和因果的, 那么它就只能是两个长的. 基于这个结论, 以下我们仅以两个长折叠对称的多小波框架的参数化设计为例.

例 5.1 两个长折叠对称的二重多小波紧框架的参数表示.

设

$$P(Z) = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ b & a \end{pmatrix} Z,$$

其中

$$\begin{aligned} a &= r(\cos \alpha + \cos \beta), & b &= r(\sin \alpha + \sin \beta), \\ c &= r(\sin \alpha - \sin \beta), & d &= r(\cos \alpha - \cos \beta), \quad 0 < r \leq 1. \end{aligned}$$

解 由 $P(Z)$ 的相位分解我们有

$$P_e(Z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}, \quad P_o(Z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} c & d \\ b & a \end{pmatrix}.$$

由 (3.3) 式

$$P_e(Z)P_e^*(Z) + P_o(Z)P_o^*(Z) \leq I_2,$$

即

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & b \\ d & a \end{pmatrix} \leq 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 2(ad + bc) \\ 2(ad + bc) & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{pmatrix} \leq 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

得

$$\begin{cases} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \leq 2, \\ \left| \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) & -(ad + bc) \\ -(ad + bc) & 1 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \end{pmatrix} \right| \geq 0. \end{cases}$$

简单计算后可得,

$$(a + d)^2 + (b + c)^2 \leq 2.$$

于是参数化取

$$\begin{aligned} a &= r(\cos \alpha + \cos \beta), & b &= r(\sin \alpha + \sin \beta), \\ c &= r(\sin \alpha - \sin \beta), & d &= r(\cos \alpha - \cos \beta), \quad 0 < r \leq 1. \end{aligned}$$

例 5.2 采用定理 4.2 中的方法, 求出例 5.1 中对应的两个高通滤波器.

解 设

$$P(Z) = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ b & a \end{pmatrix} Z,$$

这里 a, b, c, d 同例 5.1, 则

$$P_e(Z^2) = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}, \quad P_o(Z^2) = \begin{pmatrix} c & d \\ b & a \end{pmatrix}.$$

取 $r = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}$, 那么低通滤波器为

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0.7743 & 0.5000 \\ -0.1076 & 0.1667 \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} 0.1667 & -0.1076 \\ 0.5000 & 0.7743 \end{pmatrix}.$$

于是有

$$A = \begin{pmatrix} 0.3830 & -0.1958 & -0.0399 & 0.0884 \\ -0.1958 & 0.5598 & -0.0884 & -0.0399 \\ -0.0399 & -0.0884 & 0.5598 & -0.1958 \\ 0.0884 & -0.0399 & -0.1958 & 0.3830 \end{pmatrix},$$

于是对应的两个高通滤波器为:

高通滤波器一,

$$Q_{10} = \begin{pmatrix} 0.5417 & -0.2769 \\ -0.2769 & 0.79177 \end{pmatrix}, \quad Q_{11} = \begin{pmatrix} -0.0564 & 0.1250 \\ -0.1250 & -0.0564 \end{pmatrix};$$

高通滤波器二,

$$Q_{20} = \begin{pmatrix} -0.0564 & -0.1250 \\ 0.1250 & -0.0564 \end{pmatrix}, \quad Q_{21} = \begin{pmatrix} 0.7917 & -0.2769 \\ -0.2769 & 0.5417 \end{pmatrix}.$$

图 5.1 是用例 5.1 中的低通和例 5.2 中的高通组成的三通道多小波框架的一层分解图. 容易看到, 各自带之间有很强的相似性, 这正好满足了 MDC 的冗余特性要求. 同时我们也注意到多小波框架的分解比小波分解有明显的高频、中频和低频. 这也可以应用到可分级编码 SVC 中.

例 5.3 如果取低通滤波器

$$P(Z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{5}{16} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{3}{16} \end{pmatrix} Z,$$

于是对应的两个高通滤波器为:

高通滤波器一,

$$Q_{10} = \begin{pmatrix} 0.6856 & -0.0452 \\ -0.0452 & 0.6053 \end{pmatrix}, \quad Q_{11} = \begin{pmatrix} -0.0452 & -0.0215 \\ -0.1018 & -0.0452 \end{pmatrix};$$

图 5.1 三通道多小波框架一层分解图

高通滤波器二,

$$Q_{20} = \begin{pmatrix} -0.0452 & -0.1018 \\ -0.0215 & -0.0452 \end{pmatrix}, \quad Q_{21} = \begin{pmatrix} 0.6053 & -0.0452 \\ -0.0452 & 0.6856 \end{pmatrix}.$$

从该例子可以看出, 两个低通都是 B 样条. 虽然它们有很好的性质, 但配上的高通却不光滑. 这恰好说明我们需要低通和高通滤波器一起设计才能取得整体的光滑性.

例 5.4 采用定理 4.2 中的方法, 取

$$\tilde{P}(Z) = \sqrt{1 - 4r^2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

求出例 5.1 中新对应的三个高通滤波器的参数表示.

解 在例 5.1 中

$$P_e(Z) = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}, \quad P_o(Z) = \begin{pmatrix} c & d \\ b & a \end{pmatrix}.$$

由定理 4.2 我们有

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 - a^2 - d^2 & -ab - cd \\ -ab - cd & 1 - b^2 - c^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ac + bd & 2ad \\ 2bc & ac + bd \end{pmatrix} Z, \\ Q_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ac + bd & 2bc \\ 2ad & ac + bd \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 - b^2 - c^2 & -ab - cd \\ -ab - cd & 1 - a^2 - d^2 \end{pmatrix} Z, \\ Q_3 &= -\sqrt{\frac{1 - 4r^2}{2}} \begin{pmatrix} a \cos \theta + d \sin \theta & b \cos \theta + c \sin \theta \\ d \cos \theta - a \sin \theta & c \cos \theta - b \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$-\sqrt{\frac{1-4r^2}{2}} \begin{pmatrix} c \cos \theta + b \sin \theta & d \cos \theta + a \sin \theta \\ b \cos \theta - c \sin \theta & a \cos \theta - d \sin \theta \end{pmatrix} Z.$$

若参数取法如例 5.2, 则对应的三个高通滤波器为:

高通滤波器一,

$$Q_{10} = \begin{pmatrix} 1.8472 & -0.0923 \\ -0.0923 & 1.9346 \end{pmatrix}, \quad Q_{11} = \begin{pmatrix} -0.0188 & 0.0417 \\ -0.0417 & -0.0188 \end{pmatrix};$$

高通滤波器二,

$$Q_{20} = \begin{pmatrix} -0.0188 & -0.0417 \\ 0.0417 & -0.0188 \end{pmatrix}, \quad Q_{21} = \begin{pmatrix} 1.9306 & -0.0923 \\ -0.0923 & 1.8472 \end{pmatrix};$$

高通滤波器三,

$$Q_{30} = \begin{pmatrix} 0.0718 & -0.1111 \\ -0.5162 & -0.3333 \end{pmatrix}, \quad Q_{31} = \begin{pmatrix} -0.3333 & -0.5162 \\ -0.1111 & 0.0718 \end{pmatrix}.$$

例 5.5 采用定理 4.2 中的方法, 取 $\tilde{P}(Z)$ 为如下形式:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(Z) &= \begin{pmatrix} e & f \\ h & -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h \\ f & -e \end{pmatrix} Z \\ &= \begin{pmatrix} e + gZ & f + hZ \\ h + fZ & -g - eZ \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

求出例 5.1 中所对应的三个高通滤波器的参数表示.

解 由

$$P^*(Z)P(Z) + P^*(-Z)P(-Z) + \tilde{P}^*(Z)\tilde{P}(Z) = I_2, \quad (5.1)$$

可得

$$\begin{pmatrix} 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) & 4(ad + bc) \\ 4(ad + bc) & 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} *_{11} & 0 \\ 0 & *_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} *_{11} &= (e^2 + f^2 + g^2 + h^2) + (eg + hf)Z + (eg + hf)Z^{-1}, \\ *_{22} &= (e^2 + f^2 + g^2 + h^2) + (eg + hf)Z + (eg + hf)Z^{-1}. \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{cases} 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 = 1, \\ eg + hf = 0, \\ ad + bc = 0. \end{cases}$$

整理得

$$(e+g)^2 + (f+h)^2 = 1 - 2(a+d)^2 - 2(b+c)^2 = 1 - 8r^2.$$

令

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{2}\sqrt{1-8r^2}(\cos \tilde{\alpha} + \cos \tilde{\beta}), & g &= \frac{1}{2}\sqrt{1-8r^2}(\cos \tilde{\alpha} - \cos \tilde{\beta}), \\ f &= \frac{1}{2}\sqrt{1-8r^2}(\sin \tilde{\alpha} + \sin \tilde{\beta}), & h &= \frac{1}{2}\sqrt{1-8r^2}(\sin \tilde{\alpha} - \sin \tilde{\beta}), \quad 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

再由 (4.3) 求出相应的高通滤波器矩阵.

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1-a^2-d^2 & -ab-cd \\ -ab-cd & 1-b^2-d^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ac+bd & 2ad \\ 2bc & ac+bd \end{pmatrix} Z, \\ Q_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ac+b^2 & cd+bc \\ ad+ab & ac+d^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1-b^2-c^2 & -ab-cd \\ -ab-cd & 1-a^2-d^2 \end{pmatrix} Z, \\ Q_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ga+fb & gd+fc \\ ah-eb & hd-ec \end{pmatrix} Z^{-2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} gc+bf & gd+fa \\ hc-eb & hd-ea \end{pmatrix} Z^{-1} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ca+hb & ed+hc \\ fa-gb & fd-gc \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ac+bh & ed+ha \\ fc-gb & fd-ag \end{pmatrix} Z. \end{aligned}$$

若参数取法如例 5.2, $\tilde{\alpha} = \alpha, \tilde{\beta} = \beta$, 则对应的三个高通滤波器为:

高通滤波器一,

$$Q_{10} = \begin{pmatrix} 1.8472 & -0.0923 \\ -0.0923 & 1.9346 \end{pmatrix}, \quad Q_{11} = \begin{pmatrix} -0.0188 & 0.0417 \\ -0.0417 & -0.0188 \end{pmatrix};$$

高通滤波器二,

$$Q_{20} = \begin{pmatrix} -0.0188 & -0.0417 \\ 0.0417 & -0.0188 \end{pmatrix}, \quad Q_{21} = \begin{pmatrix} 1.9306 & -0.0923 \\ -0.0923 & 1.8472 \end{pmatrix};$$

高通滤波器三,

$$\begin{aligned} Q_{30} &= \begin{pmatrix} 0.0566 & 0.0146 \\ -0.2630 & -0.0676 \end{pmatrix}, & Q_{31} &= \begin{pmatrix} -0.0366 & -0.0786 \\ 0.1698 & 0.3652 \end{pmatrix}, \\ Q_{32} &= \begin{pmatrix} -0.3051 & -0.2630 \\ -0.0657 & -0.0566 \end{pmatrix}, & Q_{33} &= \begin{pmatrix} -0.2119 & -0.1698 \\ -0.0456 & -0.0366 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6 结论

本文运用 C^* 代数中的极分解定理, 给出了多小波框架所满足的 sub-QMF (quadrature mirror filter) 条件. 这使得多小波框架的低通设计有了理论依据. 进一步在低通滤波器的设计基础上, 利用正交分解和酉扩充得到相应高通的多小波框架. 首次给出了整套多小波框架设计的参数化方法. 并给出了最短两个长的折叠对称的多小波紧框架的参数表示. 这已被证明^[15]是唯一能满足 MDC 平衡偏心模为零的有限折叠对称的多小波框架. 对于多小波框架在 MDC 中的应用将是我们下一步研究的目标.

致谢 作者对审稿人的有益建议深表感谢.

参考文献

- 1 Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia: SIAM, 1992
- 2 Cohen A, Daubechies I. A stability criterion for biorthogonal wavelet bases and their related subband coding schemes. *Duke Math J*, 1992, 68: 313–335
- 3 Cohen A, Daubechies I, Feauveau J C. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm Pure Appl Math*, 1992, 45: 485–560
- 4 Vetterli M, Herley C. Wavelets and filter banks: theory and design. *IEEE Trans Signal Process*, 1992, 40: 2207–2232
- 5 Han B, Mo Q. Multiwavelet frames from refinable function vectors. *Adv Comput Math*, 2003, 18: 211–245
- 6 Averbuch A Z, Zheludev V A, Cohen T. Multiwavelet frames in signal space originated from Hermite splines. *IEEE Trans Signal Process*, 2007, 55: 797–808
- 7 Chui C K, He W J. Compactly supported tight frames associated with refinable functions. *Appl Comput Harmonic Anal*, 2000, 8: 293–319
- 8 Daubechies I, Grossmann A, Meyer Y. Painless nonorthogonal expansions. *J Math Physics*, 1986, 27: 1271–1283
- 9 Nam K. Tight wavelet frame construction and its application for image. PhD thesis. Athens: University of Georgia, 2005
- 10 Peng L Z, Wang H H. Construction for a class of smooth tight wavelet frames. *Sci China Ser F*, 2003, 46: 445–458
- 11 Rordam M, Larsen F, Laustsen N J. An Introduction to K -Theory for C^* -Algebras. London Mathematical Society Student Texts, 49. Cambridge: Cambridge University Press, 2000
- 12 Goyal V K. Beyond traditional transform coding. PhD thesis. Berkeley, CA: University of California, 1999
- 13 Shapiro J. Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients. *IEEE Trans Signal Process*, 1993, 41: 3445–3462
- 14 Said A, Pearlman W A. A new fast and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees. *IEEE Trans Circuits Syst Video Technol*, 1996, 6: 243–250
- 15 Wang N, Li B B, Peng L Z. Balanced multiple description coding based on multifilter banks. Preprint, 2009

The construct theory of multiwavelet frames

GUO Wei & PENG LiZhong

Abstract In this paper, we give the sub-quadrature mirror filter (sub-QMF) condition about the multiwavelet frame, and propose the complete method that constructs corresponding high-pass filters based on design of low-pass filters using unitary matrix extension. And aiming at the multiple description coding, we design two-length parametric multiwavelet frames with asymmetrical folds.

Keywords: multiwavelet frames, parameterizations of multiwavelet frames, lowpass and highpass filter design, multiple description coding

MSC(2000): 42B15, 42C40, 57R25