综 述

均匀染色最近的一些进展

献给徐利治教授 95 华诞

李国伟

台湾中研院数学研究所, 台北 10617

E-mail: makwlih@sinica.edu.tw

收稿日期: 2015-01-30; 接受日期: 2015-05-11

摘要 所谓图 G 的均匀染色是一个正常的染色, 使得任两个色类的大小相差不超过 1. 本文着重在最近三年均匀染色相关的发展, 挑选若干成果加以报道, 并尽量列出英语文献.

关键词 均匀染色 均匀列表染色 均匀 Δ 染色猜想 乘积图 均匀放松染色

MSC (2010) 主题分类 05C15

一个图 G 是由点集合 $V(G)$ 和边集合 $E(G)$ 所构成. 本文所考虑的图都是有限图, 不包含自我回路, 也没有平行边. 令 $|G|$ 和 $\|G\|$ 分别表示图 G 的点数和边数, 点数也称为图的阶数. 假如 G 的点集合可以划分为 k 个两两不相交的集合 $V_1, V_2, \dots, V_k$, 使得每一个 V_i 都是一个独立集 (集合中没有两点相邻), 则称 G 为 k 可染的, 而称 k 个独立集为色类. 等价地, 染色可看成是从 $V(G)$ 到 $\{1, 2, \dots, k\}$ 的映射 π , 它把相邻的点对应到相异的数, 映射 π 称为 (正常的) k 染色. 对于固定的 i ($1 \leq i \leq k$) 而言, 全体对应到它的点就构成一个色类. 能使 G 为 k 可染的最小 k , 称为 G 的染色数, 记作 $\chi(G)$. 我们称图 G 可用 k 色均匀染色, 或称 G 是均匀 k 可染的, 意思是, G 有一个 k 染色, 对于任意一对色类 V_i 和 V_j , 均满足 $||V_i| - |V_j|| \leq 1$. 能使 G 用 k 色均匀染色的最小 k , 称为 G 的均匀染色数, 记作 $\chi_=(G)$. 使得凡是 $k \geq n$ 时, G 就可以用 k 色均匀染色的最小 n , 称为 G 的均匀染色临界数, 记作 $\chi_*(G)$.

有关均匀染色的第一篇综论文章是文献 [1], 之后在文献 [2] 里继续加以扩充, 它是到目前为止针对均匀染色及其相关课题介绍较全面的文献. 本文着重在报导最近与图的均匀染色研究相关的发展, 特别是在文献 [2] 出版后的一些结果, 并将补充文献 [2] 的文献. 不过原来参考文献只包括英语作品, 本次补充仍沿旧习.

有关图的均匀染色研究, 由 Hajnal 和 Szemerédi [3] 所证明的一个经典结果的叙述如下: 令 G 是一个图 (不要求必须是连通图), 若 $k \geq \Delta(G) + 1$, 则 G 是均匀 k 可染的. 此处用 $\Delta(G)$ 表示图 G 的最大度数. 目前, 一个中心研究课题就是下列的均匀 Δ 染色猜想, 最早在文献 [4] 中提出.

猜想 1 令 G 为连通图. 假设 G 不是完全图 K_n , 也不是长度为奇数的圈 C_{2n+1} , 也不是完全二部图 $K_{2n+1, 2n+1}$, 则 G 是均匀 $\Delta(G)$ 可染的.

文献 [2] 里曾提到修正 Yeh 和 Zhang 一篇未发表论文稿中的证明, 可以得到文献 [2, 定理 16] 的结果. 有关证明的细节最终发表在文献 [5], 而定理的叙述如下:

定理 1 令图 G 的阶数至少为 6. 若 G 满足 $(|G| + 1)/3 \leq \Delta(G) < |G|/2$, 且 G 没有分支块是 $K_{\Delta(G)+1}$, 则 G 是均匀 $\Delta(G)$ 可染的.

最近, Kierstead 和 Kostochka^[6] 建立了下面的定理, 会覆盖定理 1 的结果.

定理 2 令图 G 满足 $\chi(G)$ 和 $\Delta(G)$, $|G|/4 \leq r$. 假设 r 是偶数, 或者 G 不包含 $K_{r,r}$, 则 G 是均匀 r 可染的.

Kierstead 和 Kostochka 认为他们是把 Corrádi 和 Hajnal 的结果更加细致化, 并且还推广到有向图的情形, 请参见文献 [6–8].

令 $K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$ 表示完全 r 部图, 其中 $r \geq 2$ 且 $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r$. 请注意

$$\chi_=(K_{n_1, n_2, \dots, n_r}) \geq 1 + \sum_{i=2}^r \left\lceil \frac{n_i}{n_1 + 1} \right\rceil.$$

Nakprasit 和 Saigrasun^[9] 研究何种与点数相关的必要条件, 可使此下界得以达到. 使用那些条件, 他们找到一个 $O(rn_1)$ 时间的算法, 可以计算 $\chi_=(K_{n_1, n_2, \dots, n_r})$. Rahbarnia 和 Moaied^[10] 则研究了完全多部图的均匀染色临界值.

在 Chen 和 Wu 的一篇 1994 年未发表的论文中, 已经求得 $\chi_*(K_{n_1, n_2, \dots, n_r})$ 的公式. 最近, Yan 和 Wang^[11] 公布了此临界值的一个式子, 并且提供了线性时间的算法.

不同的研究群针对各种特殊图类作出研究, 我们在此处加以简略地叙述.

令图 G 的点为 $x_1, \dots, x_n$, 所谓图 G 的 Mycielskian $\mu(G)$ 是定义在相异的点 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z$ 之上的图, 除了保有原来 G 的边外, 再将每一点 y_i 连到 z , 如果 x_j 与 x_i 在 G 中相邻的话, 也将 y_i 连到 x_j . 如果把一个新的点连到长度为 $n-1$ 的圈的每一点, 则得到一个轮 W_n . Kalimuthu 等人^[12] 计算出了 $\chi_=(\mu(W_n))$ 和 $\chi_=(\mu(K_{m,n}))$.

Kaliraj 等人^[13, 14] 计算了所谓 sun let 图和 Knödel 图, 以及它们的线图、中图 (middle graph) 和全图 (total graph) 的均匀染色数. 针对 $K_{1,n}$ 的类似研究出现在文献 [15] 里.

Coxeter^[16] 最早定义了广义的 Petersen 图 $P(m, n)$. 当 $m \geq 2n + 1 > 3$ 时, Sudha 和 Raja^[17] 得到 $\chi_=(P(m, n))$ 的界.

在各类的图乘积上, 最近作出不少有意义的进展.

给定两个图 G_1 和 G_2 , 使用它们的点集合的卡氏积 $V(G_1) \times V(G_2)$ 为新的点集合, 可以定义出各种的乘积图. 本文关心的乘积图的边集合, 可分别如下定义:

(1) 方格乘积 $G_1 \square G_2$, 也称为卡氏积, 边集合为 $E(G_1 \square G_2) = \{(u, x)(v, y) \mid (u = v \text{ 且 } xy \in E(G_2)) \text{ 或 } (x = y \text{ 且 } uv \in E(G_1))\}$.

(2) 交叉乘积 $G_1 \times G_2$, 也称为 Kronecker 积、直积或张量积, 边集合为 $E(G_1 \times G_2) = \{(u, x)(v, y) \mid uv \in E(G_1) \text{ 且 } xy \in E(G_2)\}$.

Lin 和 Chang^[18] 曾猜想, 对于二部图 G 和 H 而言, 会有 $\chi_*(G \square H) \leq 4$. Yan 等人^[19] 证明了 $\chi_*(K_{m,n} \square K_{m',n'}) \leq 4$, 也就证明了猜想成立.

Lin 和 Chang^[18] 也猜想, 对于任何有边且连通的图 G 和 H 而言, 会有 $\chi_=(G \square H) \leq \chi(G)\chi(H)$. 如果 G 或 H 为平衡完全多部图, Yan 等人^[20] 证明了此猜想. 特别地, 他们证明了, 若 $r \geq 2, s \geq 2$ 且 $n, m_1, m_2, \dots, m_s \geq 1$, 则 $\chi_=(K_{r(n)} \square K_{m_1, m_2, \dots, m_s}) \leq r \lceil \frac{s-1}{r-1} \rceil$. 针对交叉乘积, Yan 和 Wang^[21] 给出了 $\chi_*(K_m \times K_n)$ 的精确值. 文献 [22] 给出的精确值包括 $\chi_=(K_{m_1, \dots, m_r} \times K_n)$ 和 $\chi_*(K_{m_1, \dots, m_r} \times K_n)$, 其中 $\sum_{i=1}^r m_i \leq n$. 其他与图乘积相关的结果可参见文献 [23–25].

两个图 G 或 H 的日冕运算 $G \circ H$, 是由一个 G 与 $|G|$ 个同样的 H 所构成, 把 G 里的第 i 个点与第 i 个 H 的所有点相连. Furmańczyk 等人^[26] 给出了一些 $\chi_=(G \circ H)$ 的精确值或上界, 其中 G 是 3 或 4 可染的图, 而 H 是 r 部图. 日冕运算可以反复进行而得到 l 阶日冕 $G \circ^l H = (G \circ^{l-1} H) \circ H$. 以上结果在文献 [27] 里都推广到了 l 阶日冕 $G \circ^l H$. 虽然对于 3 正则图的日冕运算的普通染色是多项式时间可解, 但是, 对于这些图的均匀染色问题, 却在文献 [28] 中证明属于 NP 困难.

Furmańczyk 等人^[29] 研究了有关均匀染色的探索算法, 他们找到一些多项式时间近似算法, 也报导了针对一般图均匀染色的实验结果. 文献 [30, 31] 也发展出其他的探索算法.

如果映射 L 对于图 G 的每点 v , 分配一个有限的表 $L(v)$, 其中的元素是允许染 v 点的颜色, 则映射 L 称为图 G 的列表分配. 若对于所有的 $v \in V(G)$ 都有 $|L(v)| = k$, 则称列表分配 L 是 k 一致的. 假如 G 有一个正当染色 π , 使得 $\pi(v) \in L(v)$ 对所有点 v 成立, 则称 G 是 L 可染的. 假设对于任意 k 一致的列表分配 L , 图 G 都是 L 可染的, 并且每个色类最多包含 $\lceil |G|/k \rceil$ 个点, 则称 G 为均匀 k 可选的.

Kostochka 等人^[32] 提出下列的猜想:

猜想 2 只要 $k > \Delta(G)$ 时, 图 G 就是均匀 k 可选的.

Kierstead 和 Kostochka^[33] 证明了当 $\Delta(G) \leq 7$ 时猜想为真, 并且证明了当 $\Delta(G) \leq k$ 且 $|G| \geq k^3$ 时, 图 G 就是均匀 $k+2$ 可选的. 他们的证明可以导出多项式时间的算法.

近年来获得不少有关可平面图的可染和均匀可选的结果.

定理 3^[34] 任何可平面图 G , 如果没有 6 与 7 圈, 当 $k \geq \max\{\Delta(G), 6\}$ 时, 则是均匀 k 可染的, 也是均匀 k 可选的.

定理 4^[35] 任何可平面图 G , 如果没有 5 与 6 圈, 而当 $k \geq \max\{\Delta(G), 7\}$ 时, 则是均匀 k 可染的, 也是均匀 k 可选的.

定理 5^[36] 任何可平面图 G , 如果没有 4 圈, 而当 $k \geq \max\{\Delta(G), 6\}$ 时, 则是均匀 k 可染的, 也是均匀 k 可选的.

定理 6^[37] 任何可平面图 G , 如果没有 5 圈也没有相邻的三角形, 而当 $k \geq \max\{\Delta(G), 8\}$ 时, 则是均匀 k 可染的, 也是均匀 k 可选的.

用来定义均匀染色的均匀性, 可以推广后定义 r 均匀染色. 图 G 的 r 均匀 k 染色是 G 的一种 k 染色, 它满足的条件是 $||V_i| - |V_j|| \leq r$ 对所有 i 和 j 成立. 如果图 G 有一个 r 均匀 k 染色, 则 G 称为 r 均匀 k 可染的. 使得 G 为 r 均匀 k 可染的最小整数 k , 称为 G 的 r 均匀染色数, 记作 $\chi_{r=}(G)$. 图 G 的 r 均匀染色临界数 $\chi_{r=}^*(G)$ 是最小的整数 s , 使得凡是 $k \geq s$ 时, G 就是 r 均匀 k 可染的.

Hertz 和 Ries^[38] 首先提出 r 均匀染色概念, 他们证明了, 当 F 是森林且 $r \geq 1$ 和 $k \geq 3$ 时, F 是 r 均匀 k 可染的充要条件是 $k \geq \max\{\lceil (|F| + r)/(\alpha_v(F) + r) \rceil \mid v \in V(F)\}$, 其中 $\alpha_v(F)$ 表示 F 里会包含 v 点的最大独立集的大小.

Yen^[39] 开始有系统地研究, 把关于均匀染色的结果推广到 r 均匀染色. 特别地, 他得到了下面的定理:

定理 7 完全多部图 $K_{n_1, \dots, n_t}$ 是 r 均匀 k 可染的充要条件为以下条件之一会满足,

- (1) $r \geq 1, k \geq (\sum_{i=1}^t \lceil n_i/r \rceil) + 1$;
- (2) 存在正整数 m 使得 $\lfloor n_i/m \rfloor \geq \lceil n_i/(m+r) \rceil$ 对于所有 $1 \leq i \leq t$ 成立, 且 $\sum_{i=1}^t \lfloor n_i/m \rfloor \geq k \geq \sum_{i=1}^t \lceil n_i/(m+r) \rceil$.

Yen 也得到了 $\chi_{r=}(K_{n_1, \dots, n_t})$ 和 $\chi_{r=}^*(K_{n_1, \dots, n_t})$ 的精确值. 其他 r 均匀染色结果可参见文献 [40].

图 G 的 (k, d) 染色是 G 的一个 k 染色, 使得每个色类导来的子图的最大度不超过 d . 如此的一个染色称为 d 放松 k 染色, 而称 G 为 (k, d) 可染的. 当一个 (k, d) 染色满足均匀性的条件时, 就称为一个均匀 (k, d) 染色. 使得 G 有均匀 (k, d) 染色的最小整数 k , 称为 G 的均匀 d 放松染色数. Cummuang 和 Nakprasit^[41] 得到了路径、圈、完全图和超立方图, 以及轮的均匀 d 放松染色数. 定义 G 的均匀 d 放松临界数为最小的 k , 使得对于所有 $k' \geq k$, G 都有均匀 (k', d) 染色, 此数记为 $\chi_{\leq}^d(G)$. Gao 和 Zhou^[42] 提出了下列 Ore 型的猜想, 其中 $\theta(G) = \max\{\deg(x) + \deg(y) \mid xy \in E(G)\}$.

猜想 3 假设图 G 满足 $\theta(G) \leq 2r + 1$, 则当 $d \in \{1, \dots, r - 1\}$ 时, $\chi_{\leq}^d(G) \leq r + 1 - d$ 成立.

他们证明了, 当 $|G| = rs$ 时, 如果 G 满足 $\theta(G) \leq 2r$, 则 $\chi_{\leq}^1(G) \leq r$.

Gao 等人^[43] 将放松的均匀染色推广到了放松的均匀列表染色. 所谓图 G 是均匀 (k, d) 可选的意思是, 对于任意 k 一致的列表分配 L 而言, 都存在一个 G 的 (k, d) 染色, 使得每一点所染的色来自表 L , 而且每种颜色最多出现在 $\lceil |G|/k \rceil$ 个点上. Gao 等人^[43] 得到了下面的定理:

定理 8 (1) 若 $\theta(G) \leq 6$, 则 G 是均匀 $(3, 1)$ 可选的;

(2) 若 $\theta(G) \leq 6$, 则 G 是均匀 $(2, 2)$ 可选的.

其他类的均匀概念, 在近年来也有多方的发展. 例如, 文献 [44, 45] 获得了有关均匀全染色的结果, 而其他相关概念的结果可参见文献 [17, 46–49].

在文献 [2] 出版后, 除以上所报道的结果外, 有关图的均匀染色研究的文章尚可参见文献 [50–56].

参考文献

- 1 Lih K-W. The equitable coloring of graphs. In: Du D Z, Pardalos P M, eds. Handbook of Combinatorial Optimization, vol. 3. New York: Kluwer Academic Publishers, 1998, 543–566
- 2 Lih K-W. Equitable coloring of graphs. In: Pardalos P M, Du D Z, Graham R L, eds. Handbook of Combinatorial Optimization. 2nd ed. New York: Springer, 2013, 1199–1248
- 3 Hajnal A, Szemerédi E. Proof of a conjecture of Erdős. In: Erdős P, Rényi A, Sós V T, eds. Combinatorial Theory and its Applications, vol. II. Amsterdam: North-Holland, 1970, 601–623
- 4 Chen B-L, Lih K-W, Wu P-L. Equitable coloring and the maximum degree. European J Combin, 1994, 15: 443–447
- 5 Chen B-L, Huang K-C, Lih K-W. Equitable coloring of graphs with intermediate maximum degree. ArXiv:1408.6046, 2014
- 6 Kierstead H A, Kostochka A V. A refinement of a result of Corrádi and Hajnal. Combinatorica, doi: 10.1007/s00493-014-3059-6, 2014
- 7 Czygrinow A, Kierstead H A, Molla T. On directed versions of the Corrádi-Hajnal corollary. European J Combin, 2014, 42: 1–14
- 8 Kierstead H A, Kostochka A V, Yeager E C. On the Corrádi-Hajnal Theorem and a Question of Dirac. Report No. 10, 2013/2014. Djursholm: Institut Mittag-Leffler, 2014
- 9 Nakprasit K, Saigrasun W. On equitable coloring of complete r -partite graphs. Int J Pure Appl Math, 2011, 71: 229–239
- 10 Rahbarnia F, Moaied M. An upper bound for the equitable chromatic number of complete n -partite graphs. J Nonlinear Anal Appl, 2014, 2014: 00090
- 11 Yan Z, Wang W. Equitable chromatic threshold of complete multipartite graphs. ArXiv:1207.3578, 2012
- 12 Kalimuthu K, Joseph V V, Moideen A A M. Equitable coloring on Mycielskian of wheels and bigraphs. Appl Math E-Notes, 2013, 13: 174–182
- 13 Kaliraj K, Vernold V J, Akbar A M M. On equitable coloring of sun let graph families. Ars Combin, 2012, 103: 497–504
- 14 Kaliraj K, Vernold V J, Akbar A M M. On equitable colouring of Knödel graphs. Int J Comput Math, 2014, 91: 1428–1433
- 15 Sujitha N, Pauline M H M. On equitable coloring of star graph families. Int J Stat Math, 2013, 8: 1–4
- 16 Coxeter H S M. Self-dual configurations and regular graphs. Bull Amer Math Soc, 1950, 56: 413–455

- 17 Sudha S, Raja G M. Equitable coloring of prisms and the generalized Petersen graphs. *IMPACT: Int J Res Engrg Tech*, 2014, 2: 105–112
- 18 Lin W H, Chang G J. Equitable colorings of Cartesian products of graphs. *Discrete Appl Math*, 2012, 160: 239–247
- 19 Yan Z, Lin W H, Wang W. The equitable chromatic threshold of the Cartesian product of bipartite graphs is at most 4. *Taiwanese J Math*, 2014, 18: 773–780
- 20 Yan Z, Wang W, Zhang X. Equitable colorings of Cartesian products with balanced complete multipartite graphs. *Discrete Appl Math*, 2015, 180: 200–203
- 21 Yan Z, Wang W. Equitable chromatic threshold of direct products of complete graphs. *Ars Combin*, 2014, 114: 235–243
- 22 Yan Z, Wang W. Equitable coloring of Kronecker products of complete multipartite graphs and complete graphs. *Discrete Appl Math*, 2014, 162: 328–333
- 23 Adefokun T C, Ajayi D O. On equitable coloring of weak product of odd cycles. *Int J Math Comb*, 2013, 1: 109–113
- 24 Yan Z, Wang W. Equitable chromatic threshold of Kronecker products of complete graphs. *ArXiv:1208.0918*, 2013
- 25 Zuo L, Wu F, Zhang S. Equitable colorings of Cartesian product graphs of wheels with complete bipartite graphs. *WSEAS Trans Math*, 2014, 13: 236–245
- 26 Furmańczyk H, Kaliraj K, Kubale M, et al. Equitable coloring of corona products of graphs. *Adv Appl Discrete Math*, 2013, 11: 103–120
- 27 Furmańczyk H, Kubale M, Mkrtchyan V V. Equitable colorings of corona multiproducts of graphs. *ArXiv:1210.6568*, 2012
- 28 Furmańczyk H, Kubale M. Equitable coloring of corona products of cubic graphs is harder than ordinary coloring. *ArXiv:1409.0650*, 2014
- 29 Furmańczyk H, Jastrzębski A, Kubale M. Equitable coloring of graphs. Recent theoretical results and new practical algorithms. *J Appl Comput Sci*, in press, 2014
- 30 Méndez-Díaz I, Nasini G, Severín D. An exact DSatur-based algorithm for the equitable coloring problem. *Electron Notes Discrete Math*, 2013, 44: 281–286
- 31 Méndez Díaz I, Nasini G, Severín D. A tabu search heuristic for the equitable coloring problem. In: *Combinatorial Optimization, Lecture Notes in Comput Sci*, 8596. Cham: Springer, 2014, 347–358
- 32 Kostochka A V, Pelsmayer M J, West D B. A list analogue of equitable coloring. *J Graph Theory*, 2003, 44: 166–177
- 33 Kierstead H A, Kostochka A V. Equitable list coloring of graphs with bounded degree. *J Graph Theory*, 2013, 74: 309–334
- 34 Dong A, Tan X, Zhang X, et al. Equitable coloring and equitable choosability of planar graphs without 6- and 7-cycles. *Ars Combin*, 2012, 103: 333–352
- 35 Dong A, Zhang X, Li G. Equitable coloring and equitable choosability of planar graphs without 5- and 7-cycles. *Bull Malays Math Sci Soc (2)*, 2012, 35: 897–910
- 36 Dong A, Li G, Wang G. Equitable and list equitable colorings of planar graphs without 4-cycles. *Discrete Math*, 2013, 313: 1610–1619
- 37 Zhu J, Bu Y, Min X. Equitable list-coloring for C_5 -free plane graphs without adjacent triangles. *Graphs Combin*, 2015, 31: 795–804
- 38 Hertz A, Ries B. A note on r -equitable k -colorings of trees. *Yugosl J Oper Res*, 2014, 24: 293–298
- 39 Yen C H. On r -equitable coloring of complete multipartite graphs. *Taiwanese J Math*, 2013, 17: 991–998
- 40 Wang W, Yan Z, Zhang X. On r -equitable chromatic threshold of Kronecker products of complete graphs. *Discrete Appl Math*, 2014, 175: 129–134
- 41 Cummuang S, Nakprasit K. Equitable defective colorings of some classes of graphs. *KKU Sci J*, 2011, 39: 687–694
- 42 Gao W, Zhou F. A question on relaxed equitable coloring. *Discrete Math Algorithms Appl*, 2012, 4: 1250042
- 43 Gao W, Zhang Y, Xu T, et al. Relaxed equitable list coloring of graphs. *J Comput Inf Syst*, 2013, 9: 821–828
- 44 Gui H, Wang W, Wang Y, et al. Equitable total-coloring of subcubic graphs. *Discrete Appl Math*, 2015, 184: 167–170
- 45 Ma G, Ma M. The equitable total chromatic number of some join graphs. *Open J Appl Sci*, 2012, Supplement: 96–99
- 46 Li J W, Chen Z P, Yan G H. On the equitable adjacent strong edge coloring of $K(n, m)$. *Appl Mech Mater*, 2012, 198–199: 402–406
- 47 Wang T, Liu M J, Li D M. Equitable strong edge coloring of the joins of paths and cycles. *J Math Res Appl*, 2012, 32: 11–18
- 48 Wu J L, Zhang X, Li H. Equitable vertex arboricity of graphs. *Discrete Math*, 2013, 313: 2696–2701
- 49 Zhang X, Wu J L. A conjecture on equitable vertex arboricity of graphs. *Filomat*, 2014, 28: 217–219
- 50 Andreica M I, Tapus N. Reliability analysis of tree networks applied to balanced content replication. In: *IEEE International Conference on Automation, Quality and Testing, Robotics*, vol. 1. Cluj-Napoca: IEEE, 2008, 79–84

- 51 Esperet L, Lemoine L, Maffray F. Equitable partition of graphs into induced forests. *Discrete Math*, 2015, 338: 1481–1483
- 52 Han J, Zhao Y. On multipartite Hajnal-Szemerédi theorems. *Discrete Math*, 2013, 313: 1119–1129
- 53 Karthick T. Note on equitable coloring of graphs. *Australas J Combin*, 2014, 59: 251–259
- 54 Nakprasit K, Cummuang S. Equitable defective colorings of complete bipartite graphs. *Int J Pure Appl Math*, 2014, 92: 73–86
- 55 Sereni J S. Equitable Colourings of Graphs with Bounded Density and Given Girth. Technical Report. Prague: Charles University, 2008
- 56 Sudha S, Raja G M. Interval edge coloring of gird graphs and equitable interval edge coloring of gird of diamonds and prism graphs Y_n , $n > 2$. *Int J Sci Innov Math Res*, 2014, 2: 408–417

Recent progress on equitable coloring of graphs

LIH Ko-Wei

Abstract An equitable coloring of a graph G is a proper vertex coloring of G such that the sizes of any two color classes differ by at most one. This is a survey of results obtained in very recent years on equitable coloring of graphs, together with a comprehensive bibliography.

Keywords equitable coloring, list equitable coloring, equitable Δ -coloring conjecture, product graphs, relaxed equitable coloring

MSC(2010) 05C15

doi: 10.1360/N012015-00060