弹性力学问题的插值型无单元伽辽金比例边界法

陈莘莘*, 童谷生, 万云

华东交通大学土木建筑学院, 南昌 330013

* 联系人, E-mail: chenshenshen@tsinghua.org.cn

收稿日期: 2016-08-15; 接受日期: 2016-09-29; 网络出版日期: 2016-12-28

国家自然科学基金资助项目(编号: 11462005, 11462006)和江西省高校科技落地计划项目(编号: KJLD14041)资助

摘要 比例边界法是一种半解析数值方法, 在处理应力奇异性问题和无限域问题时十分有效. 在改进的插值型移动最小二乘法的框架下将无单元伽辽金法与比例边界法结合, 本文首次提出插值型无单元伽辽金比例边界法求解弹性力学问题. 该方法在径向具有解析性质, 只需计算域边界上用节点进行离散, 并且环向上形函数的高阶连续性可以进一步提高计算精度和收敛速度. 运用插值型无单元伽辽金比例边界法进行计算时, 不需要基本解, 也不存在奇异积分问题. 改进的插值型移动最小二乘法形函数具有Kronecker delta函数的性质, 可以直接施加本质边界条件. 此外, 改进的插值型移动最小二乘法不仅克服了Lancaster和Salkauskas的插值型移动最小二乘法采用奇异权函数的缺点, 而且计算形函数时待定系数比传统的移动最小二乘法少一个. 最后给出了数值算例, 并验证了所提分析方法的有效性和正确性.

关键词 半解析, 比例边界法, 无单元伽辽金法, 改进的插值型移动最小二乘法, 弹性力学

PACS: 02.60.Ed, 02.70.-c, 02.70.Pt, 46.15.-x

比例边界法^[1,2]是一种特别适合于求解断裂力学问题^[3,4]和无限域问题^[5]的半解析数值方法. 该方法只需对计算域边界进行离散, 在引入具有径向和环向坐标的比例边界坐标系的基础上将偏微分方程半弱化为关于径向坐标的常微分方程, 从而实现将问题降低一维的目的. 相对于有限元法, 比例边界法具有仅离散部分边界的优点. 相对于边界元法, 比例边界法不需要基本解, 也不涉及奇异积分的计算.

为了减少或消除网格划分给数值计算带来的困难, 无网格法近年来得到了国内外许多学者的极大关注^[6,7]. 在无网格法中, 移动最小二乘近似(Moving

Least-Squares Approximation, MLS)^[8,9]是形成试函数的有效方法之一, 具有局部性质, 而且计算精度高. 目前, 移动最小二乘近似已经与比例边界法结合, 在环向采用无单元伽辽金法(Element-Free Galerkin, EFG)进行离散, 建立了无单元伽辽金比例边界法(Element-Free Galerkin Scaled Boundary Method, EFG-SBM)^[10,11]. 这是一种边界型的无网格法, 计算时仅仅需要边界上离散点的信息, 减少了前处理的工作量. 此外, 由于环向上形函数的高阶连续性, 无单元伽辽金比例边界法可以用较少的离散节点获得更高的计算精度, 而且无需进行应力光滑等后处理就可直接计算得到光滑连续的

引用格式: 陈莘莘, 童谷生, 万云. 弹性力学问题的插值型无单元伽辽金比例边界法. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2017, 47: 034601
Chen S S, Tong G S, Wan Y. An interpolating element-free Galerkin scaled boundary method for the elasticity problem (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2017, 47: 034601, doi: [10.1360/SSPMA2016-00362](https://doi.org/10.1360/SSPMA2016-00362)

应力场. 然而, 由于移动最小二乘法函数不满足插值性质, 无单元伽辽金比例边界法在施加本质边界条件时需通过转换矩阵将虚节点函数值转换到实际节点上, 这无疑增加了计算工作量, 使数值实施更加困难.

基于奇异权函数, Lancaster和Salkauskas^[12]提出了插值型移动最小二乘法, 其形函数满足Kronecker delta函数的性质. 任红萍等人^[13,14]简化了插值型移动最小二乘法的形函数计算公式, 从而进一步提高了计算效率. 然而, 插值型移动最小二乘法只能采用在节点处奇异的权函数, 这样计算形函数在节点处的导数时较为复杂, 另外奇异的权函数在数值上也无法实现. 为了克服奇异权函数造成的困难, Wang等人^[15,16]提出了一种改进的插值型移动最小二乘法(Improved Interpolating Moving Least-Squares, IIMLS). 该方法采用非奇异权函数, 任何移动最小二乘法的权函数都可以作为该方法的权函数, 克服了Lancaster和Salkauskas的插值型移动最小二乘法采用奇异权函数的缺点. 此外, 改进的插值型移动最小二乘法的试函数中待定系数比传统的移动最小二乘法少一个, 且形函数满足Kronecker delta函数的性质.

本文将比例边界法和改进的插值型移动最小二乘法相结合, 提出了弹性力学问题的插值型无单元伽辽金比例边界法(Interpolating Element-Free Galerkin Scaled Boundary Method, IIEFG-SBM). 首先采用虚位移原理将弹性力学问题的平衡微分方程半弱化为关于径向坐标的二阶常微分方程, 然后引入Schur分解^[2]对该方程进行解析求解. 本文提出的插值型无单元伽辽金比例边界法是以节点的真实变量作为未知函数, 可以很容易地直接施加本质边界条件. 最后, 通过数值算例验证了本文方法的有效性和合理性.

1 改进的插值型移动最小二乘法

在IIEFG-SBM中, 我们在环向采用无单元伽辽金(EFG)方法进行离散. 本文采用的IIMLS插值在分段光滑的边界段上独立进行, 而不是定义在整个边界上. 在某一光滑边界段 S_I 上假设有 N 个节点 $s_1, s_2, \dots, s_N$, 这里 s 代表 S_I 上从起点开始的弧长.

令 $p_1(s), p_2(s), \dots, p_m(s)$ 表示给定用来构造逼近函数的一组基函数, 其中 $p_1(s)=1$. 为了使得权函数非奇异, 并且逼近函数满足插值性质, 将由给定的基函数构造

一组新的基函数. 令

$$\hat{p}_i(\bar{s})_s = p_i(\bar{s}) - \sum_{l=1}^n v(s, s_l) p_i(s_l), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

其中 $\bar{s}$ 位于点 s 局部影响域内, $s_l(l=1, 2, \dots, n)$ 为影响域覆盖 s 的节点, 并且

$$v(s, s_l) = \prod_{j \neq l} \frac{s - s_j}{s_l - s_j}, \quad (2)$$

对于函数 $u(s)$ 也进行与基函数相同的变换, 也即构造局部函数

$$\hat{u}(\bar{s})_s = u(\bar{s}) - \sum_{l=1}^n v(s, s_l) u(s_l). \quad (3)$$

下面采用移动最小二乘法以获得局部函数 $\hat{u}(\bar{s})_s$ 的逼近函数. 为此构造如下形式的局部逼近函数:

$$\hat{u}^h(\bar{s})_s = \sum_{i=1}^m \hat{p}_i(\bar{s})_s \hat{a}_i(s), \quad (4)$$

式中, $\hat{a}_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, m$)为待定系数. 由式(1)可得

$$\hat{p}_1(\bar{s})_s = 1 - \sum_{l=1}^n v(s, s_l) = 0. \quad (5)$$

于是由式(4)可以得到

$$\hat{u}^h(\bar{s})_s = \sum_{i=2}^m \hat{p}_i(\bar{s})_s \hat{a}_i(s). \quad (6)$$

由式(6)可以看出, 当基函数为 m 个时, 本文基于非奇异权函数的改进的移动最小二乘插值法需要的待定系数是 $m-1$ 个, 比传统的移动最小二乘法少一个, 所以虽然本文方法在构造逼近函数时需要对基函数进行变换, 但仍然具有较高的计算效率.

定义加权离散 L^2 模为

$$J(s) = \sum_{l=1}^n w_l(s) (\hat{u}^h(s_l)_s - \hat{u}(s_l)_s)^2, \quad (7)$$

式中, $w_l(s)$ 是节点 s_l 的权函数, 并且它是以 s_l 为中心的紧支函数. 本文采用样条权函数, 即

$$w_l(\bar{r}) = 1 - 6\bar{r}^2 + 8\bar{r}^3 - 3\bar{r}^4, \quad \bar{r} \leq 1, \quad (8)$$

式中, $\bar{r} = |s - s_l| / r_l$, r_l 为权函数支撑域半径. 本文中, 各节点的支撑域半径取为 $r_l = \alpha \Delta s$, 其中 Δs 为相邻节点之间的距离, 系数 α 取为3.0.

由式(7)可确定系数 $\hat{a}_i(s)$ ($i = 2, 3, \dots, m$), 并代入式(6)可以得到

$$\hat{u}^h(\bar{s})_s = \hat{\mathbf{p}}^T(\bar{s})_s \mathbf{A}^{-1}(s) \mathbf{H}(s) \mathbf{u}, \quad (9)$$

式中

$$\hat{\mathbf{p}}^T(\bar{s})_s = (\hat{p}_2(\bar{s})_s, \hat{p}_3(\bar{s})_s, \dots, \hat{p}_m(\bar{s})_s), \quad (10)$$

$$\mathbf{u} = (u(s_1), u(s_2), \dots, u(s_n))^T, \quad (11)$$

$$\mathbf{A}(s) = \sum_{l=1}^n w_l(s) \hat{\mathbf{p}}(s_l) \hat{\mathbf{p}}^T(s_l), \quad (12)$$

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{l=1}^n w_l(s) \hat{\mathbf{p}}(s_l) (\mathbf{e}_l - \mathbf{v}(s)), \quad (13)$$

式中, $\mathbf{e}_l$ 为 n 维单位行向量, 其第 l 个元素为 1, 且

$$\hat{\mathbf{p}}^T(s_l)_s = (\hat{p}_2(s_l)_s, \hat{p}_3(s_l)_s, \dots, \hat{p}_m(s_l)_s), \quad (14)$$

$$\mathbf{v}(s) = (v(s, s_1), v(s, s_2), \dots, v(s, s_n)). \quad (15)$$

根据式(3)和式(9), 函数 $u(s)$ 的逼近函数可以写为

$$u^h(s) = \Phi(s) \mathbf{u} = \sum_{l=1}^n \varphi_l(s) u(s_l), \quad (16)$$

其中形函数矩阵 $\Phi(s)$ 为

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= (\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s)) \\ &= \mathbf{v}(s) + \mathbf{g}^T(s) \mathbf{A}^{-1}(s) \mathbf{H}(s), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\mathbf{g}^T(s) = (g_2(s), g_3(s), \dots, g_m(s)), \quad (18)$$

$$g_i(s) = p_i(s) - \sum_{l=1}^n v(s, s_l) p_i(s_l). \quad (19)$$

2 弹性力学问题的IEFG-SBM

2.1 弹性力学问题的控制方程

二维弹性力学问题的平衡方程为

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0, \quad (20)$$

式中, $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\mathbf{f}$ 分别表示应力和体力, 梯度算子 $\mathbf{L}$ 可表示为

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}. \quad (21)$$

几何方程和本构方程可分别表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}, \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{u}, \quad (23)$$

式中, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变, $\mathbf{D}$ 为弹性矩阵. 相应的边界条件如下:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \text{ on } S_u, \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}, \text{ on } S_t, \quad (25)$$

式中, $\bar{\mathbf{u}}$ 和 $\bar{\mathbf{t}}$ 分别为边界上给定的位移和面力矢量. 区域 Ω 的边界是 S , 且 $S = S_u \cup S_t$, $\mathbf{n}$ 是边界上的单位外法线矢量.

2.2 控制方程的导出

在IEFG-SBM中, 需要建立笛卡尔坐标系与比例边界坐标系的转换关系. 考虑如图1所示的以点 $O(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$ 为中心的比例边界坐标系 (ξ, s) . 其中, s 为环向坐标, 沿着边界逆时针方向; ξ 为径向坐标, 从相似中心指向边界. 对于有限域, 在相似中心处 $\xi=0$, 边界上 $\xi=1$; 对于无限域, $1 \leq \xi \leq \infty$. 若将笛卡尔坐标系的原点放置在相似中心处, 计算区域内点的笛卡尔坐标 $(\hat{x}, \hat{y})$ 与比例边界坐标 (ξ, s) 的关系可以表示为

$$\hat{x} = \xi x(s), \hat{y} = \xi y(s), \quad (26)$$

式中, $(x(s), y(s))$ 为边界上任意点坐标, $(\hat{x}, \hat{y})$ 为域内点坐标.

在比例边界坐标系下, 式(21)中的梯度算子 $\mathbf{L}$ 可以表示为

$$\mathbf{L} = \mathbf{b}_1(s) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{b}_2(s) \frac{\partial}{\partial s}, \quad (27)$$

式中, $\mathbf{b}_1(s)$ 和 $\mathbf{b}_2(s)$ 仅取决于计算域边界, 可分别表示为

图1 比例边界坐标系
Figure 1 Scaled boundary coordinate system.

$$\mathbf{b}_1(s) = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} y(s)_{,s} & 0 \\ 0 & -x(s)_{,s} \\ -x(s)_{,s} & y(s)_{,s} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\mathbf{b}_2(s) = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} -y(s) & 0 \\ 0 & x(s) \\ x(s) & -y(s) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

式中, $|J|$ 为雅可比矩阵的行列式, 且有

$$|J| = x(s)y(s)_{,s} - y(s)x(s)_{,s}. \quad (30)$$

由于径向无需离散, 域内任意点处的位移 $\mathbf{u}(\xi, s)$ 可通过式(16)表示为

$$\mathbf{u}(\xi, s) = \Phi(s)\mathbf{u}(\xi), \quad (31)$$

式中, $\mathbf{u}(\xi)$ 为径向上的节点位移函数. 将式(27)和(31)代入式(23)可得内部点的应力 $\sigma(\xi, s)$

$$\sigma(\xi, s) = \mathbf{D}(\mathbf{B}_1(s)\mathbf{u}(\xi)_{,\xi} + \mathbf{B}_2(s)\mathbf{u}(\xi)/\xi), \quad (32)$$

式中, $\mathbf{B}_1(s)$ 和 $\mathbf{B}_2(s)$ 描述了应变与位移之间的关系, 其具体形式可表示为

$$\mathbf{B}_1(s) = \mathbf{b}_1(s)\Phi(s), \quad \mathbf{B}_2(s) = \mathbf{b}_2(s)\Phi(s)_{,s}. \quad (33)$$

如果不考虑体力作用, 弹性力学问题的虚位移原理可以写为

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon(\xi, s)^T \sigma(\xi, s) d\Omega = \int_{S_t} \delta \mathbf{u}(s)^T \bar{\mathbf{t}}(s) ds. \quad (34)$$

将式(31)和(32)代入式(34), 并将虚位移取为 $\delta \mathbf{u}(\xi, s) = \Phi(s)\delta \mathbf{u}(\xi)$, 可推导出 IIEFG-SBM 的控制方程为

$$\mathbf{E}_0 \xi^2 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi\xi} + (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_1) \xi \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} - \mathbf{E}_2 \mathbf{u}(\xi) = 0, \quad (35)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}_0 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} + \mathbf{E}_1^T \mathbf{u}(\xi)|_{\xi=1}, \quad (36)$$

式中

$$\mathbf{P} = \int_{S_t} \Phi(s)^T \bar{\mathbf{t}} ds, \quad (37)$$

$$\mathbf{E}_0 = \int_S \mathbf{B}_1(s)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1(s) |J| ds, \quad (38)$$

$$\mathbf{E}_1 = \int_S \mathbf{B}_2(s)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1(s) |J| ds, \quad (39)$$

$$\mathbf{E}_2 = \int_S \mathbf{B}_2(s)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2(s) |J| ds. \quad (40)$$

2.3 控制方程的求解

式(35)是关于径向坐标的二阶常微分方程组, 其求解可通过降阶来处理. 引入 $\mathbf{q}(\xi)$ 作为 $\mathbf{u}(\xi)$ 的对偶变量

$$\mathbf{q}(\xi) = \mathbf{E}_0 \xi \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} + \mathbf{E}_1^T \mathbf{u}(\xi). \quad (41)$$

联立式(35)和(41), 可将二阶常微分方程(35)降阶为

$$\xi \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\xi) \\ \mathbf{q}(\xi) \end{Bmatrix}_{,\xi} = -\mathbf{Z} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\xi) \\ \mathbf{q}(\xi) \end{Bmatrix}, \quad (42)$$

式中

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_0^{-1} \mathbf{E}_1^T & -\mathbf{E}_0^{-1} \\ \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_0^{-1} \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_2 & -\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_0^{-1} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

为了避免特征分解中平行特征向量的问题, 对 Hamiltonian 矩阵进行分块对角 Schur 分解

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \begin{bmatrix} \Psi_n^{(u)} & \Psi_p^{(u)} \\ \Psi_n^{(q)} & \Psi_p^{(q)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_n^{(u)} & \Psi_p^{(u)} \\ \Psi_n^{(q)} & \Psi_p^{(q)} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \Psi \mathbf{S} \Psi^{-1}, \end{aligned} \quad (44)$$

式中, 上三角矩阵 $\mathbf{S}_n$ 和 $\mathbf{S}_p$ 分别为非正特征值和非负特征值对应的 Schur 标准型. 矩阵 $\mathbf{S}$ 和 Ψ 均可进一步分块及块对角化. 式(42)的解可写为

$$\mathbf{u}(\xi) = \Psi_n^{(u)} \xi^{-\mathbf{S}_n} \mathbf{c}_n + \Psi_p^{(u)} \xi^{-\mathbf{S}_p} \mathbf{c}_p, \quad (45)$$

$$\mathbf{q}(\xi) = \Psi_n^{(q)} \xi^{-\mathbf{S}_n} \mathbf{c}_n + \Psi_p^{(q)} \xi^{-\mathbf{S}_p} \mathbf{c}_p. \quad (46)$$

对于有限域问题(0 ≤ ξ ≤ 1), 相似中心(ξ=0)处的位移必须为有限值. 因此有限域问题的刚度矩阵 $\mathbf{K}^b$ 可相应地写为

$$\mathbf{K}^b = \Psi_n^{(q)} (\Psi_n^{(u)})^{-1}. \quad (47)$$

边界节点位移 $\mathbf{u}(\xi=1)$ 可结合位移约束条件和外荷载条件通过如下的平衡方程式进行求解:

$$\mathbf{K}^b \mathbf{u}(\xi=1) = \mathbf{P}. \quad (48)$$

然后, 积分常数 $\mathbf{c}_n$ 可由下式计算

$$\mathbf{c}_n = (\Psi_n^{(u)})^{-1} \mathbf{u}(\xi=1). \quad (49)$$

域内任意点的位移场和应力场可通过式(50)和(51)分别计算得到

$$\mathbf{u}(\xi, s) = \Phi(s)(\psi_n^{(u)} \xi^{-s} \mathbf{c}_n), \quad (50)$$

$$\sigma(\xi, s) = \psi_n^{(s)} \xi^{-s} \mathbf{c}_n, \quad (51)$$

式中

$$\psi_n = \mathbf{D}(-\mathbf{B}_1(s)\psi_n^{(u)} \mathbf{S}_n + \mathbf{B}_2(s)\psi_n^{(u)}). \quad (52)$$

以上就是弹性力学问题的插值型无单元伽辽金比例边界法(Interpolating Element-Free Galerkin Scaled Boundary Method, IEFG-SBM). 插值型无单元伽辽金比例边界法基于改进的插值型移动最小二乘法, 可直接施加本质边界条件.

3 算例分析

为了说明本文的插值型无单元伽辽金比例边界法的有效性, 采用二次基函数对三个典型算例进行了计算, 并与解析解进行了比较.

3.1 无限大圆孔板

为了验证本文方法能精确有效地处理无限域问题, 考虑如图2所示的含中心圆孔的无限大方板. 方板在无穷远处承受的水平拉应力为 $\sigma_0=1$, 圆孔半径 $a=1$, 按平面应变分析. 材料的弹性模量 $E=1000$, 泊松比 $\nu=0.3$. 考虑到对称性, 可取结构的1/4作为分析模型. 该问题是个应力集中问题, 其解析解为^[17]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 1 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) + \frac{3}{2r^4} \cos 4\theta, \\ \sigma_y &= -\frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \right) - \frac{3}{2r^4} \cos 4\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \right) + \frac{3}{2r^4} \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (53)$$

相似中心设置在圆孔圆心处, 中心圆孔板的边界节点分布如图2所示, 共布置了9个节点. 图3给出了 $x=0$ 截面上各点的正应力 σ_x 分布. 可以看出, 插值型无单元伽辽金比例边界法的计算结果与解析解吻合得很好.

3.2 单边裂纹方板受拉力

本算例考虑一个中部左侧含单边裂纹的方板, 如图4所示. 裂纹长度为 a , 板边长为 b , 上下端受均布拉应力 σ 的作用.

图2 无限大圆孔板的离散模型

Figure 2 Discretization model of the infinite plate with a central hole.

图3 (网络版彩图) $x=0$ 截面的正应力 σ_x 比较

Figure 3 (Color online) Comparison of normal stress σ_x at $x=0$.

图4 单边裂纹方板

Figure 4 A square plate with an edge crack.

在这一问题中, 相似中心取在裂纹尖端, 采用如图4所示的节点布置方案, 共57个节点, 其中点A处设置有两个独立的节点. 我们对 a/b 在0.2–0.6取值时的正则化应力强度因子 $K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$ 进行了分析. 本文数值解与解析解^[18]的比较见表1. 由表1可见, 本文数值解与解析解吻合很好, 而且还可以看出应力强度因子随

着裂纹长度的增加而增大.

3.3 中心斜裂纹拉伸板

为了进一步验证本文数值方法的有效性, 本算例考虑一含中心斜裂纹的拉伸板, 如图5所示. 斜裂纹长度为 $2a$, 与水平方向的夹角 $\theta=45^\circ$, 板宽为 $2w$, 板高为 $2h$, 上下端受均布拉应力 σ 的作用. 板高与板宽之比取为 $h/w=2.0$, 裂纹长度与板宽之比 a/w 在 $0.3\text{--}0.7$ 之间变化.

计算时将该板划分为2个子域, 并且2个裂纹尖端分别为各自的相似中心, 相应的节点布置方案如图6所示. 表2和3给出了裂纹长度变化时, 本文方法计算得到的正则化应力强度因子 $K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$ 和 $K_{II} / \sigma \sqrt{\pi a}$. 为了进行对比, 表2和3还给出了文献[19,20]的计算结果. 由表2和3可知, 插值型无单元伽辽金比例边界法对应力强度因子 K_I 和 K_{II} 的计算精度都很高.

4 结论

本文在改进的插值型移动最小二乘法的框架下将无单元伽辽金法和比例边界法相结合, 提出了弹性力学问题的插值型无单元伽辽金比例边界法. 由本文分析和算例求解可以看出:

表1 正则化应力强度因子 $K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$ 与裂纹宽度的关系
Table 1 Normalized mode I SIFs ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$) for various crack lengths

a/b	数值解	理论解 ^[18]
0.2	1.488	1.488
0.3	1.848	1.848
0.4	2.324	2.325
0.5	3.010	3.010
0.6	4.153	4.153

图5 中心斜裂纹拉伸板
Figure 5 Central inclined cracked plate under tension.

表2 正则化应力强度因子 $K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$ 与裂纹宽度的关系
Table 2 Normalized mode I SIFs ($K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$) for various crack lengths

a/w	本文结果	文献[19]	文献[20]
0.3	0.5366	0.5406	0.5405
0.4	0.5720	0.5719	0.5719
0.5	0.6115	0.6119	0.6121
0.6	0.6604	0.6611	0.6605
0.7	0.7198	0.721	0.7154

图6 中心斜裂纹板的离散模型
Figure 6 Discretization model of the plate with an inclined central crack.

表3 正则化应力强度因子 $K_{II} / \sigma \sqrt{\pi a}$ 与裂纹宽度的关系
Table 3 Normalized mode II SIFs ($K_{II} / \sigma \sqrt{\pi a}$) for various crack lengths

a/w	本文结果	文献[19]	文献[20]
0.3	0.5263	0.5162	0.5161
0.4	0.5314	0.5290	0.5288
0.5	0.5465	0.5458	0.5457
0.6	0.5678	0.5674	0.5676
0.7	0.5952	0.595	0.5953

(1) 改进的插值型移动最小二乘法采用非奇异权函数, 任何移动最小二乘法的权函数都可以作为该方法的权函数, 从而克服了Lancaster和Salkauskas的插值型移动最小二乘法因权函数奇异导致的计算不便. 由于改进的插值型移动最小二乘法的形函数具有Kronecker delta函数性质, 本质边界条件可以直接施加. 此外, 虽然改进的插值型移动最小二乘法在计算形函数时需要基函数进行函数变换, 但因为该方法比传统移动最小二乘法的待定系数少一个, 从而仍具有较高的计算效率. 同时, 可以用更少的节点来计算形函数, 也就更能保证移动最小二乘插值法的紧支性, 减少形函数计算中矩阵奇异性的产生, 获得较高的计

算精度.

(2) 插值型无单元伽辽金比例边界法是以节点的真实变量作为未知函数的纯边界类型的无网格方法. 该方法将求解的问题降低了一维, 它的输入数据只是边界上离散的点, 减少了前处理的工作量. 此外, 该方法在径向可以解析求得物理场函数值, 而且环向上形

函数的高阶连续性使得该方法可以获得更高的计算精度.

(3) 采用矩阵函数和Schur分解相结合的方法对关于径向坐标的二阶常微分方程组进行求解, 可以避免特征分解中出现平行特征向量的问题, 从而可进一步提高本文方法的计算精度和数值稳定性.

参考文献

- 1 Wolf J P, Song C. The scaled boundary finite-element method—a fundamental solution-less boundary-element method. *Comp Methods Appl Mech Eng*, 2001, 190: 5551–5568
- 2 Song C. A matrix function solution for the scaled boundary finite-element equation in statics. *Comp Methods Appl Mech Eng*, 2004, 193: 2325–2356
- 3 Zhu C L, Li J B, Lin G. J integral method for calculation of fracture energy of mixed mode inclined cracks based on SBFEM (in Chinese). *China Civil Eng J*, 2011, 44: 16–22 [朱朝磊, 李建波, 林皋. 基于SBFEM任意角度混合型裂纹断裂能计算的J积分方法研究. *土木工程学报*, 2011, 44: 16–22]
- 4 Jiang C, Long X Y, Han X, et al. A crack propagation path analysis method of random cracked structure (in Chinese). *Chin J Solid Mech*, 2014, 35: 30–38 [姜潮, 龙湘云, 韩旭, 等. 一种随机裂纹结构的裂纹扩展路径分析方法. *固体力学学报*, 2014, 35: 30–38]
- 5 Deeks A J, Wolf J P. Semi-analytical solution of Laplace's equation in non-equilibrating unbounded problems. *Comp Struct*, 2003, 81: 1525–1537
- 6 Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless methods: An overview and recent developments. *Comp Methods Appl Mech Eng*, 1996, 139: 3–47
- 7 Cheng Y M, Peng M J. Boundary element free method for elastodynamics (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2005, 35: 435–448 [程玉民, 彭妙娟. 弹性动力学的边界无单元法. *中国科学G辑: 物理学 力学 天文学*, 2005, 35: 435–448]
- 8 Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods. *Int J Numer Meth Engng*, 1994, 37: 229–256
- 9 Atluri S N, Zhu T. A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Comp Mech*, 1998, 22: 117–127
- 10 He Y, Yang H, Deeks A J. An Element-free Galerkin (EFG) scaled boundary method. *Finite Elements Anal Des*, 2012, 62: 28–36
- 11 He Y, Yang H, Deeks A J. An Element-Free Galerkin scaled boundary method for steady-state heat transfer problems. *Numer Heat Trans Part B-Fundam*, 2013, 64: 199–217
- 12 Lancaster P, Salkauskas K. Surfaces generated by moving least squares methods. *Math Comp*, 1981, 37: 141
- 13 Ren H P, Cheng Y M, Zhang W. An interpolating boundary element free method (IBEFM) for the elasticity problem (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2010, 40: 361–369 [任红萍, 程玉民, 张武. 弹性力学的插值型边界无单元法. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2010, 40: 361–369]
- 14 Ren H P, Cheng Y M, Zhang W. Researches on the improved interpolating moving least-squares method (in Chinese). *Chin J Eng Math*, 2010, 27: 1021–1029 [任红萍, 程玉民, 张武. 改进的移动最小二乘插值法研究. *工程数学学报*, 2010, 27: 1021–1029]
- 15 Wang J F, Sun F X, Cheng Y M. An improved interpolating element-free Galerkin method with a nonsingular weight function for two-dimensional potential problems. *Chin Phys B*, 2012, 21: 090204
- 16 Wang J, Wang J, Sun F, et al. An interpolating boundary element-free method with nonsingular weight function for two-dimensional potential problems. *Int J Comput Methods*, 2013, 10: 1350043
- 17 Timoshenko S P, Goodier J N. *Theory of Elasticity*. 3th ed. New York: McGraw-Hill Inc., 1970.
- 18 Civelek M B, Erdogan F. Crack problems for a rectangular plate and an infinite strip. *Int J Fract*, 1982, 19: 139–159
- 19 Kitagawa H, Yuuki R. Analysis of arbitrarily shaped crack in a finite plate using conformal mapping. First report: Construction of analysis procedure and its applicability. *Trans Jpn Soc Mech Eng*, 1977, 43: 4354–4362
- 20 Tsang D K L, Oyadiji S O. Super singular element method for two-dimensional crack analysis. *Proc R Soc A-Math Phys Eng Sci*, 2008, 464: 2629–2648

An interpolating element-free Galerkin scaled boundary method for the elasticity problem

CHEN ShenShen^{*}, TONG GuSheng & WAN Yun

School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China

As a newly-developed semi-analytical method, the scaled boundary finite element method is very powerful to deal with singular and unbounded problems. By combining the element-free Galerkin (EFG) method with the scaled boundary method in the frame of improved interpolating moving least-squares (IIMLS) method, an interpolating element-free Galerkin scaled boundary method (IEFG-SBM) is firstly proposed to solve elasticity problems in this paper. In the IEFG-SBM, the solution in the radial direction is obtained analytically and only nodes are required to discretize the boundaries of the computational domain. In addition, higher accuracy and faster convergence are obtained due to the higher continuity of the shape functions in the circumferential direction. The IEFG-SBM does not need the fundamental solution and thus no singular integrations are involved. The shape function of the IIMLS method satisfies the Kronecker delta function property and thus the essential boundary conditions can be imposed directly as in the traditional finite element method. In comparison with the interpolating moving least-squares (IMLS) method proposed by Lancaster and Salkauskas, the key advantage of the IIMLS method is that it does not require singular weight function and thus any weight function used in the MLS approximation can also be applied in the IIMLS method. In addition, there are less unknown coefficients in the IIMLS method than in the conventional moving least-squares (MLS) approximation. Thus fewer nodes are required in the local influence domain and a higher computational accuracy can be reached in the IIMLS-based meshless method. At last, several numerical examples are presented to verify the effectiveness and accuracy of the developed method for the elasticity problem.

semi-analytical, scaled boundary method, element-free Galerkin method, improved interpolating moving least-squares method, elasticity

PACS: 02.60.Ed, 02.70.-c, 02.70.Pt, 46.15.-x

doi: [10.1360/SSPMA2016-00362](https://doi.org/10.1360/SSPMA2016-00362)