倒向随机 Volterra 积分方程适应解的表示

献给李大潜教授 80 华诞

雍炯敏^{1,2}

1. 复旦大学数学科学学院, 上海 200433;

2. Department of Mathematics, University of Central Florida, Orlando, FL 32816, USA

E-mail: jiongmin.yong@ucf.edu

收稿日期: 2016-02-16; 接受日期: 2016-07-29; 网络出版日期: 2016-12-12

美国国家科学基金 (批准号: DMS-1406776) 资助项目

摘要 倒向随机 Volterra 积分方程可以看作 (确定性) Volterra 积分方程和倒向随机微分方程的推广, 在随机最优控制理论和数学金融学中有诸多应用. 本文利用正倒向随机微分方程适应解表示的思想, 得到所研究的一类倒向随机 Volterra 积分方程适应解的表示. 这样的结果对研究适应解的正则性以及数值计算有重要的意义.

关键词 倒向随机 Volterra 积分方程 适应解 正倒向随机微分方程

MSC (2010) 主题分类 60H20, 60H10, 45D05

1 引言

考虑一个带流的完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 和在此空间上定义的一个标准的一维 Brown 运动 $W(\cdot)$. 假定 $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 就是 $W(\cdot)$ 的自然 σ -域流的完备化. 考虑下述积分方程:

$$Y(t) = \psi(t) + \int_t^T g(t, s, Y(s), Z(t, s), Z(s, t)) ds - \int_t^T Z(t, s) dW(s), \quad t \in [0, T]. \quad (1.1)$$

我们称如上的方程为倒向随机 Volterra 积分方程 (简称 BSVIE), 其中 g 是一个给定的随机函数, 称为该方程的系数 (也称生成子 (generator)), ψ 是一个 $\mathcal{F}_T$ -可测的随机过程 (未必 $\mathbb{F}$ -适应), 称为自由项. 与 (1.1) 有密切关系的是如下方程:

$$Y(t) = \xi + \int_t^T g(s, Y(s), Z(s)) ds - \int_t^T Z(s) dW(s), \quad t \in [0, T]. \quad (1.2)$$

这样的方程称为倒向随机微分方程 (简称 BSDE). 其实, (1.2) 是 BSDE 的积分形式. 易见, (1.1) 是 (1.2) 的一个自然推广. 线性 BSDE 是 Bismut^[1] 在 1973 年研究随机线性二次最优控制时首次引入的. 1990 年, Pardoux 和 Peng^[2] 开始了一般 (非线性) BSDE 的研究. 部分后续的工作可以参见文献 [3–9].

英文引用格式: Yong J M. Representation of adapted solutions to backward stochastic Volterra integral equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1355–1366, doi: 10.1360/N012016-00034

2002 年, 作为 BSDE 的推广, Lin^[10] 首次研究了比 (1.1) 更为特殊的一类 BSVIE. 以 (正向) 随机 Volterra 积分方程最优控制的最大值原理和资产组合过程动态风险作为背景, Yong^[11-13] 首次研究了形如 (1.1) 的 BSVIE. 根据文献 [13], 在适当的条件下, 方程 (1.1) 存在唯一的 M -适应解 $(Y(\cdot), Z(\cdot, \cdot))$, 即对任何的 $t \in [0, T]$, 映照 $s \mapsto (Y(s), Z(t, s))$ 在 $[t, T]$ 上是 $\mathbb{F}$ -适应的, 方程 (1.1) 在普通的 Itô 意义下得以满足, 且有下列表示等式:

$$Y(t) = \mathbb{E}[Y(T)] + \int_0^t Z(t, s) dW(s), \quad t \in [0, T].$$

有关 BSVIE 的某些正则性的研究和比较定理的建立可参见文献 [13, 14]. 其他相关的研究可以参见文献 [15, 16].

我们注意到, 在文献 [13] 中, 为了获得若干正则性的结果, 对系数 g 和自由项 ψ 施加了一些涉及 Malliavin 可导性的条件. 在实际应用中, 人们可能不希望有那样的条件限制. 同时, 在文献 [13] 中出现的需要 Malliavin 可导性条件才能保证的正则性结果在数学上的表述也欠漂亮. 受有关正倒向随机微分方程 (简称 FBSDE) 适应解表示 (参见文献 [4, 5]) 的启示, 我们期望对某些 BSVIE, 得到其适应解的某种表示, 以方便得到相关的正则性, 并对 BSVIE 的解的数值计算提供方便. 本文是第一次对 BSVIE 作这样的尝试, 故我们的结果还不十分理想.

我们引入下述正向随机微分方程 (简称 FSDE):

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), & t \in [0, T], \\ X(0) = x, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 $b, \sigma: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是两个给定的函数, 而 $x \in \mathbb{R}$. 我们考虑如下一类特殊的 BSVIE:

$$Y(t) = \psi(t, X(T)) + \int_t^T g(t, s, X(s), Y(s), Z(t, s))ds - \int_t^T Z(t, s)dW(s), \quad t \in [0, T], \quad (1.4)$$

其中 $g: \Delta \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为两个确定性函数, 而

$$\Delta = \{(t, s) \mid 0 \leq t \leq s \leq T\}.$$

易见, BSVIE (1.4) 中系数和自由项的随机性全部来自于 FSDE (1.3) 的解 $X(\cdot)$. 在应用中, 人们通常用形如 (1.3) 的 (正向) 随机微分方程来描述经济因子 (economic factors)、资产价格过程和财富过程等. 而 BSVIE (1.4) 可以用来描述动态风险和动态/递归效用等. 因此, 如上形式的 BSVIE 中出现的随机性在许多应用中已经足够了. 本文的主要结果是下面的表示定理.

定理 1.1 在适当的条件下, BSVIE (1.4) 的适应解 $(Y(\cdot), Z(\cdot, \cdot))$ 具有如下的表现形式:

$$\begin{cases} Y(s) = \Theta(s, s, X(s)), \\ Z(t, s) = \sigma(s, X(s))\Theta_x(t, s, X(s)), \end{cases} \quad (t, s) \in \Delta, \quad (1.5)$$

其中 $X(\cdot)$ 是 (1.3) 的解, $(s, x) \mapsto \Theta(t, s, x)$ 满足如下的带参数 t 的偏微分方程:

$$\begin{cases} \Theta_s(t, s, x) + \frac{1}{2}\sigma(s, x)^2\Theta_{xx}(t, s, x) + b(s, x)\Theta_x(t, s, x) \\ \quad + g(t, s, x, \Theta(s, s, x), \Theta_x(t, s, x)\sigma(s, x)) = 0, & (t, s, x) \in \Delta \times \mathbb{R}, \\ \Theta(t, T, x) = \psi(t, x), & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.6)$$

我们知道, 直接从 BSVIE 出发很难得到其适应解的正则性, 尤其是映照 $s \mapsto Z(t, s)$ 的正则性. 而从表示式 (1.5), 人们可以清楚地看到 $(Y(\cdot), Z(\cdot, \cdot))$ 的正则性. 形如 (1.5) 的表示式为 BSVIE 的数值计算也提供了便利. 可以预见, 我们的结果对有关时间不一致随机最优控制、动态风险度和 BSVIE 的数值计算等方面的研究将具有重要意义. 我们会在将来的工作中加以展开.

为了表述方便起见 (及限于篇幅), 本文主要讨论空间维数为 1、Brown 运动的维数也为 1 的情形. 高维空间和多维 Brown 运动的情形将只作简单叙述. 我们将着重阐述思想方法, 将略去有些冗长的证明. 详尽的和更一般的讨论, 我们将在另文中给出. 我们还应注意到, 与 BSVIE (1.1) 相比, BSVIE (1.4) 中不含 $Z(s, t)$ 项. 因此, 一个自然的问题是, 假如 $Z(s, t)$ 也出现在 (1.4) 中, 我们是否有同样或类似的结果? 关于此点, 我们期望在将来的研究中再行讨论.

本文余下部分是这样安排的: 第 2 节将讨论 BSVIE 的逼近; 第 3 节将导出 BSVIE 适应解的表示; 最后将简略讨论若干可能的推广情形.

2 倒向随机 Volterra 积分方程的逼近

本节将建立 BSVIE 的逼近定理. 首先, 让我们先引入有关的假设条件.

(H1) 函数 $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续的, 且存在常数 $L, \sigma_0 > 0$ 使得

$$|b(t, x_1) - b(t, x_2)| + |\sigma(t, x_1) - \sigma(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall t \in [0, T], \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

$$\sigma(t, x) \geq \sigma_0, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}.$$

(H2) 函数 $g : \Delta \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $\psi : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续的, 且存在常数 $L > 0$ 使得

$$|g(t_1, s, x, y_1, z_1) - g(t_2, s, x, y_2, z_2)| \leq L(|t_1 - t_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|),$$

$$\forall (t_1, s), (t_2, s) \in \Delta, \quad x, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R},$$

$$|\psi(t_1, x) - \psi(t_2, x)| \leq L|t_1 - t_2|, \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}.$$

我们知道, 当 (H1) 成立时, FSDE (1.3) 存在唯一的强解 $X(\cdot)$; 当 (H2) 成立时, BSVIE (1.4) 存在唯一的适应解 $(Y(\cdot), Z(\cdot, \cdot))$. 值得指出, 由于在 BSVIE (1.4) 的漂移项中, $Z(s, t)$ 不出现, 因此, 所谓的 M -适应解的概念在这里是没有必要的. 我们只需 $Z(t, s)$ 对于 $0 \leq t \leq s \leq T$ 有定义即可.

记 $\mathcal{P}[0, T]$ 为所有形如下述的 $[0, T]$ 的分割全体:

$$\Pi: 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T. \quad (2.1)$$

并记

$$\|\Pi\| = \max_{0 \leq k \leq N-1} (t_{k+1} - t_k), \quad \forall \Pi \in \mathcal{P}[0, T],$$

称之为分割 Π 的长度. 最简单的分割是等长度的分割, 即

$$t_k = \frac{kT}{N}, \quad 0 \leq k \leq N.$$

此时,

$$\|\Pi\| = \frac{T}{N} = t_{k+1} - t_k, \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

一般而言, 我们并不要求这一点. 不过, 我们可以要求存在一个 $\delta > 0$ 使得

$$\min_{0 \leq k \leq N-1} (t_{k+1} - t_k) \geq \delta \|\Pi\|. \quad (2.2)$$

现设 $\Pi \in \mathcal{P}[0, T]$ 是一个形如 (2.1) 的 $[0, T]$ 的分割. 在下面的讨论中, 我们假设 (H1) 和 (H2) 成立. 我们希望构造一个过程 $(Y^\Pi(\cdot), Z^\Pi(\cdot, \cdot))$, 在某种意义下逼近 $(Y(\cdot), Z(\cdot, \cdot))$, 且 $(Y^\Pi(\cdot), Z^\Pi(\cdot))$ 可用倒向随机微分方程 (简称 BSDE) 来描述.

首先, 在 $[t_{N-1}, T]$ 上引入 BSDE:

$$\begin{cases} dY^{N-1}(s) = -g(t_{N-1}, s, X(s), Y^{N-1}(s), Z^{N-1}(s))ds + Z^{N-1}(s)dW(s), & s \in [t_{N-1}, T], \\ Y^{N-1}(T) = \psi(t_{N-1}, X(T)), \end{cases} \quad (2.3)$$

在 (H2) 的条件下, 上述方程存在唯一的适应解 $(Y^{N-1}(\cdot), Z^{N-1}(\cdot))$. 然后在 $[t_{N-2}, T]$ 上 (而不是在 $[t_{N-2}, t_{N-1}]$ 上) 引入一个特别的 BSDE:

$$\begin{cases} dY^{N-2}(s) = -g(t_{N-2}, s, X(s), Y^{N-1}(s), Z^{N-2}(s))ds + Z^{N-2}(s)dW(s), & s \in (t_{N-1}, T], \\ dY^{N-2}(s) = -g(t_{N-2}, s, X(s), Y^{N-2}(s), Z^{N-2}(s))ds + Z^{N-2}(s)dW(s), & s \in [t_{N-2}, t_{N-1}], \\ Y^{N-2}(T) = \psi(t_{N-2}, X(T)), \quad Y^{N-2}(t_{N-1}) = Y^{N-2}(t_{N-1} + 0). \end{cases} \quad (2.4)$$

注意, 上述方程中, 在 $(t_{N-1}, T]$ 上, $Y^{N-1}(s)$ 已经由 (2.3) 确定, 不可更改. 但是, 由于 g 中出现的是 t_{N-2} , 而不是 t_{N-1} , 故在 $(t_{N-1}, T]$ 上, $(Y^{N-2}(\cdot), Z^{N-2}(\cdot))$ 和 $(Y^{N-1}(\cdot), Z^{N-1}(\cdot))$ 满足的方程不同. 从而, 即便 $Y^{N-1}(s)$ 出现在方程的漂移项中, 相应的 $Z^{N-2}(\cdot)$ 多半也是与 $Z^{N-1}(\cdot)$ 不同的. 在我们的假设条件下, 上述 BSDE 在 $[t_{N-2}, T]$ 存在唯一的适应解 $(Y^{N-2}(\cdot), Z^{N-2}(\cdot))$.

一般地, 我们在 $[t_k, T]$ 上引入下述 BSDE:

$$\begin{cases} dY^k(s) = -g(t_k, s, X(s), Y^\ell(s), Z^k(s))ds + Z^k(s)dW(s), & s \in (t_\ell, t_{\ell+1}], \quad k+1 \leq \ell \leq N-1, \\ dY^k(s) = -g(t_k, s, X(s), Y^k(s), Z^k(s))ds + Z^k(s)dW(s), & s \in [t_k, t_{k+1}], \\ Y^k(T) = \psi(t_k, X(T)), \quad Y^k(t_\ell) = Y^k(t_\ell + 0), & k+1 \leq \ell \leq N-1. \end{cases} \quad (2.5)$$

类似于上述 (2.4), 对于每个 $\ell \geq k+1$, 在 $(t_\ell, t_{\ell+1}]$ 上, 方程漂移项中出现的是 $Y^\ell(\cdot)$, 而不是 $Y^k(\cdot)$. 在假设 (H1) 和 (H2) 下, 上述 BSDE 存在唯一的适应解. 我们定义

$$\begin{cases} Y^\Pi(s) = Y^0(s)I_{[0, t_1]}(s) + \sum_{k=1}^{N-1} Y^k(s)I_{(t_k, t_{k+1}]}(s), & s \in [0, T], \\ Z^\Pi(t, s) = Z^0(s)I_{[0, t_1]}(t) + \sum_{k=1}^{N-1} Z^k(s)I_{(t_k, t_{k+1}]}(t), & 0 \leq t \leq s \leq T, \end{cases}$$

按上述方式定义的 $Y^\Pi(\cdot)$ 在 $t_{N-1}, t_{N-2}, \dots, t_1$ 处有可能间断. 令

$$\tau^\Pi(t) = t_k I_{[t_k, t_{k+1}]}(t) + \sum_{\ell=k+1}^{N-1} t_\ell I_{(t_\ell, t_{\ell+1}]}(t), \quad t \in [0, T],$$

则有

$$0 \leq t - \tau^\Pi(t) \leq \|\Pi\|, \quad t \in [0, T],$$

并且 (2.5) 可写成

$$\begin{cases} dY^k(s) = -g(t_k, s, X(s), Y^\Pi(s), Z^k(s))ds + Z^k(s)dW(s), & s \in [t_k, T], \\ Y^k(T) = \psi(t_k, X(T)). \end{cases} \quad (2.6)$$

同时, 对于任何 $t \in (0, T]$, 设 $t \in (t_k, t_{k+1}]$, 有下述结果:

$$\begin{aligned} Y^\Pi(t) &= Y^k(t) \\ &= \psi(t_k, X(T)) + \int_t^{t_{k+1}} g(t_k, s, X(s), Y^k(s), Z^k(s))ds \\ &\quad + \sum_{\ell=k+1}^{N-1} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} g(t_k, s, X(s), Y^\ell(s), Z^k(s))ds - \int_t^T Z^k(s)dW(s) \\ &= \psi(\tau^\Pi(t), X(T)) + \int_t^T g(\tau^\Pi(t), s, X(s), Y^\Pi(s), Z^\Pi(t, s))ds - \int_t^T Z^\Pi(t, s)dW(s). \end{aligned}$$

所以, $(Y^\Pi(\cdot), Z^\Pi(\cdot))$ 在每个 (t_k, t_{k+1}) 区间上满足一个 BSDE, 而在 $[0, T]$ 上又满足一个 BSVIE. 对于上面构造的 $(Y^\Pi(\cdot), Z^\Pi(\cdot, \cdot))$, 我们有下述定理.

定理 2.1 假定 (H1) 和 (H2) 成立, $(Y^\Pi(\cdot), Z^\Pi(\cdot, \cdot))$ 由上构造, 则

$$\mathbb{E} \int_0^T |Y^\Pi(t) - Y(t)|^2 dt + \mathbb{E} \int_0^T \int_t^T |Z^\Pi(t, s) - Z(t, s)|^2 ds dt \leq K \|\Pi\|^2. \quad (2.7)$$

证明 利用文献 [13] 中的结果, 综合 (H2), 我们有

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \int_0^T |Y^\Pi(t) - Y(t)|^2 dt + \mathbb{E} \int_0^T \int_t^T |Z^\Pi(t, s) - Z(t, s)|^2 ds dt \\ &\leq K \mathbb{E} \left(|\psi(\tau^\Pi(t), X(T)) - \psi(t, X(T))|^2 + \int_0^T \int_t^T |g(\tau^\Pi(t), s, X(s), Y(s), Z(t, s)) \right. \\ &\quad \left. - g(t, s, X(s), Y(s), Z(t, s))|^2 ds dt \right) \\ &\leq K \|\Pi\|^2. \end{aligned}$$

这就给出了 BSVIE 的适应解被一族 BSDE 的适应解逼近. $\square$

3 适应解的表示

本节将导出 BSVIE (1.4) 适应解的表示. 为此, 我们先在 $[t_{N-1}, T]$ 上考虑下述解耦的 FBSDE:

$$\begin{cases} dX(s) = b(s, X(s))ds + \sigma(s, X(s))dW(s), \\ d\bar{Y}^{N-1}(s) = -g(t_{N-1}, s, X(s), \bar{Y}^{N-1}(s), \bar{Z}^{N-1}(s))ds + \bar{Z}^{N-1}(s)dW(s), \\ \bar{Y}^{N-1}(T) = \psi(t_{N-1}, X(T)). \end{cases} \quad (3.1)$$

比较 (2.3) 可知,

$$(\bar{Y}^{N-1}(s), \bar{Z}^{N-1}(s)) = (Y^{N-1}(s), Z^{N-1}(s)), \quad s \in (t_{N-1}, T].$$

由文献 [4, 5] 知, 在 (H1) 和 (H2) 条件假设下, 下述表示成立:

$$\begin{cases} Y^{N-1}(s) = \bar{Y}^{N-1}(s) = \Theta^{N-1}(s, X(s)), \\ Z^{N-1}(s) = \bar{Z}^{N-1}(s) = \sigma(s, X(s))\Theta_x^{N-1}(s, X(s)), \end{cases} \quad s \in [t_{N-1}, T], \quad (3.2)$$

其中 $\Theta^{N-1}(\cdot, \cdot)$ 是下述抛物型偏微分方程的解:

$$\begin{cases} \Theta_s^{N-1}(s, x) + \frac{1}{2}\sigma(s, x)^2\Theta_{xx}^{N-1}(s, x) + b(s, x)\Theta_x^{N-1}(s, x) \\ + g(t_{N-1}, s, x, \Theta^{N-1}(s, x), \sigma(s, x)\Theta_x^{N-1}(s, x)) = 0, & (s, x) \in [t_{N-1}, T] \times \mathbb{R}, \\ \Theta^{N-1}(T, x) = \psi(t_{N-1}, x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.3)$$

接着, 在 $[t_{N-2}, T]$ 上, 我们考虑 FBSDE

$$\begin{cases} dX(s) = b(s, X(s))ds + \sigma(s, X(s))dW(s), & s \in [t_{N-2}, T], \\ d\bar{Y}^{N-2}(s) = -g(t_{N-2}, s, X(s), \Theta^{N-1}(s, X(s)), \bar{Z}^{N-2}(s))ds + \bar{Z}^{N-2}(s)dW(s), & s \in (t_{N-1}, T], \\ d\bar{Y}^{N-2}(s) = -g(t_{N-2}, s, X(s), \bar{Y}^{N-2}(s), \bar{Z}^{N-2}(s))ds + \bar{Z}^{N-2}(s)dW(s), & s \in [t_{N-2}, t_{N-1}], \\ \bar{Y}^{N-2}(T) = \psi(t_{N-2}, X(T)), \quad \bar{Y}^{N-2}(t_{N-1}) = \Theta^{N-1}(t_{N-1}, X(t_{N-1})). \end{cases} \quad (3.4)$$

此处, 我们用到了 $\bar{Y}^{N-1}(\cdot)$ 在 $[t_{N-1}, T]$ 上的表示 (见 (3.2)). 于是, 比较 (2.4) 和 (3.4), 我们得到

$$(\bar{Y}^{N-2}(s), \bar{Z}^{N-2}(s)) = (Y^{N-2}(s), Z^{N-2}(s)), \quad s \in [t_{N-2}, T].$$

令

$$\bar{Y}^{N-2}(s) = \Theta^{N-2}(s, X(s)), \quad s \in [t_{N-2}, T],$$

则在 $(t_{N-1}, T]$ 上, 我们有

$$\begin{aligned} & -g(t_{N-2}, s, X(s), \Theta^{N-1}(s, X(s)), \bar{Z}^{N-2}(s))ds + \bar{Z}^{N-2}(s)dW(s) = d\bar{Y}^{N-2}(s) \\ & = \left[\Theta_s^{N-2}(s, X(s)) + \frac{1}{2}\sigma(s, X(s))^2\Theta_{xx}^{N-2}(s, X(s)) + b(s, X(s))\Theta_x^{N-2}(s, X(s)) \right] ds \\ & \quad + \sigma(s, X(s))\Theta_x^{N-2}(s, X(s))dW(s). \end{aligned}$$

因此,

$$\bar{Z}^{N-2}(s) = \sigma(s, X(s))\Theta_x^{N-2}(s, X(s)), \quad s \in (t_{N-1}, T],$$

同时,

$$\begin{aligned} & \Theta_s^{N-2}(s, X(s)) + \frac{1}{2}\sigma(s, X(s))^2\Theta_{xx}^{N-2}(s, X(s)) + b(s, X(s))\Theta_x^{N-2}(s, X(s)) \\ & + g(t_{N-2}, s, X(s), \Theta^{N-1}(s, X(s)), \sigma(s, X(s))\Theta_x^{N-2}(s, X(s))) = 0, \quad s \in (t_{N-1}, T], \end{aligned}$$

并且, 我们施加终值条件

$$\Theta^{N-2}(T, X(T)) = \psi(t_{N-2}, X(T)).$$

而在 $[t_{N-2}, t_{N-1}]$ 上, 我们有

$$\begin{aligned} & -g(t_{N-2}, s, X(s), \bar{Y}^{N-2}(s), \bar{Z}^{N-2}(s))ds + \bar{Z}^{N-2}(s)dW(s) \\ & = d\bar{Y}^{N-2}(s) \\ & = \left[\Theta_s^{N-2}(s, X(s)) + \frac{1}{2}\sigma(s, X(s))^2\Theta_{xx}^{N-2}(s, X(s)) + b(s, X(s))\Theta_x^{N-2}(s, X(s)) \right] ds \\ & \quad + \sigma(s, X(s))\Theta_x^{N-2}(s, X(s))dW(s). \end{aligned}$$

因此,

$$\bar{Z}^{N-2}(s) = \sigma(s, X(s))\Theta_x^{N-2}(s, X(s)), \quad s \in [t_{N-2}, t_{N-1}],$$

同时,

$$\begin{aligned} & \Theta_s^{N-2}(s, X(s)) + \frac{1}{2}\sigma(s, X(s))^2\Theta_{xx}^{N-2}(s, X(s)) + b(s, X(s))\Theta_x^{N-2}(s, X(s)) \\ & \quad + g(t_{N-2}, s, X(s), \Theta^{N-2}(s, X(s)), \sigma(s, X(s))\Theta_x^{N-2}(s, X(s))) = 0, \end{aligned}$$

并且, 在 t_{N-1} 处施加自然的终值条件

$$\Theta^{N-2}(t_{N-1}, X(t_{N-1})) = \Theta^{N-2}(t_{N-1} + 0, X(t_{N-1})).$$

因此, 我们得到

$$\left\{ \begin{aligned} & \Theta_s^{N-2}(s, x) + \frac{1}{2}\sigma(s, x)^2\Theta_{xx}^{N-2}(s, x) + b(s, x)\Theta_x^{N-2}(s, x) \\ & \quad + g(t_{N-2}, s, x, \Theta^{N-1}(s, x), \sigma(s, x)\Theta_x^{N-2}(s, x)) = 0, \quad (s, x) \in (t_{N-1}, T], \\ & \Theta_s^{N-2}(s, x) + \frac{1}{2}\sigma(s, x)^2\Theta_{xx}^{N-2}(s, x) + b(s, x)\Theta_x^{N-2}(s, x) \\ & \quad + g(t_{N-2}, s, x, \Theta^{N-2}(s, x), \sigma(s, x)\Theta_x^{N-2}(s, x)) = 0, \quad (s, x) \in [t_{N-2}, t_{N-1}] \times \mathbb{R}, \\ & \Theta^{N-2}(T, x) = \psi(t_{N-2}, x), \quad \Theta^{N-2}(t_{N-1}, x) = \Theta^{N-2}(t_{N-1} + 0, x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \right. \quad (3.5)$$

当上述偏微分方程存在经典解时, $(\bar{Y}^{N-1}(\cdot), \bar{Z}^{N-1}(\cdot))$ 具有如下表示:

$$\left\{ \begin{aligned} & Y^{N-2}(s) = \bar{Y}^{N-2}(s) = \Theta^{N-2}(s, X(s)), \\ & Z^{N-2}(s) = \bar{Z}^{N-2}(s) = \sigma(s, X(s))\Theta_x^{N-2}(s, X(s)), \end{aligned} \quad s \in [t_{N-2}, T]. \right. \quad (3.6)$$

归纳地, 在 $[t_k, T]$ 上, 我们考虑下述 FBSDE:

$$\left\{ \begin{aligned} & dX(s) = b(s, X(s))ds + \sigma(s, X(s))dW(s), \quad s \in [t_k, T], \\ & d\bar{Y}^k(s) = -g(t_k, s, X(s), \Theta^\ell(s, X(s)), \bar{Z}^k(s))ds + \bar{Z}^k(s)dW(s), \\ & \quad s \in (t_\ell, t_{\ell+1}], \quad k+1 \leq \ell \leq N-1, \\ & d\bar{Y}^k(s) = -g(t_k, s, X(s), \bar{Y}^k(s), \bar{Z}^k(s))ds + \bar{Z}^k(s)dW(s), \quad s \in [t_k, t_{k+1}], \\ & \bar{Y}^k(T) = \psi(t_k, X(T)). \end{aligned} \right. \quad (3.7)$$

在上面方程中, $\Theta^\ell(\cdot, \cdot)$ 在 $[t_\ell, T]$ 上满足一个偏微分方程, 且使得

$$\begin{cases} Y^\ell(s) = \bar{Y}^\ell(s) = \Theta^\ell(s, X(s)), \\ Z^\ell(s) = \bar{Z}^\ell(s) = \sigma(s, X(s))\Theta^\ell(s, X(s)), \end{cases} \quad s \in [t_\ell, T]. \quad (3.8)$$

于是, $(\bar{Y}^k(\cdot), \bar{Z}^k(\cdot))$ 和 $(Y^k(\cdot), Z^k(\cdot))$ 满足同样的 BSDE. 故由唯一性, 必有

$$(\bar{Y}^k(s), \bar{Z}^k(s)) = (Y^k(s), Z^k(s)), \quad s \in [t_k, T].$$

利用上述同样的方法, 我们可得

$$\begin{cases} Y^k(s) = \bar{Y}^k(s) = \Theta^k(s, X(s)), \\ Z^k(s) = \bar{Z}^k(s) = \sigma(s, X(s))\Theta^k(s, X(s)), \end{cases} \quad s \in [t_k, T], \quad (3.9)$$

其中 $\Theta^k(\cdot, \cdot)$ 满足下述方程:

$$\begin{cases} \Theta_s^k(s, x) + \frac{1}{2}\sigma(s, x)^2\Theta_{xx}^k(s, x) + b(s, x)\Theta_x^k(s, x) \\ + g(t_k, s, x, \Theta^\ell(s, x), \sigma(s, x)\Theta_x^k(s, x)) = 0, & (s, x) \in (t_\ell, t_{\ell+1}], \quad k \leq \ell \leq N-1, \\ \Theta^k(T, x) = \psi(t_k, x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.10)$$

假如令

$$\Theta^\Pi(t, s, x) = \sum_{k=0}^{N-1} \Theta^k(s, x)I_{(t_k, t_{k+1}]}(t), \quad (t, s, x) \in \Delta \times \mathbb{R},$$

则有

$$\begin{aligned} Y^\Pi(s) &= Y^0(s)I_{[0, t_1]}(s) + \sum_{k=0}^{N-1} Y^k(s)I_{(t_k, t_{k+1}]}(s) \\ &= \Theta^0(s, X(s))I_{[0, t_1]}(s) + \sum_{k=0}^{N-1} \Theta^k(s, X(s))I_{(t_k, t_{k+1}]}(s) \\ &= \Theta^\Pi(s, s, X(s)), \quad s \in [0, T], \end{aligned}$$

同时也有

$$\begin{aligned} Z^\Pi(t, s) &= Z^0(s)I_{[0, t_1]}(t) + \sum_{k=0}^{N-1} Z^k(s)I_{(t_k, t_{k+1}]}(t) \\ &= \sigma(s, X(s))\Theta_x^0(s, X(s))I_{[0, t_1]}(t) + \sum_{k=0}^{N-1} \sigma(s, X(s))\Theta_x^k(s, X(s))I_{(t_k, t_{k+1}]}(t) \\ &= \sigma(s, X(s))\Theta_x^\Pi(t, s, X(s)), \quad (t, s) \in \Delta, \end{aligned}$$

而对于任何 $t \in [0, T)$, 设 $t \in [t_k, t_{k+1})$, 我们有

$$\begin{aligned} \Theta_s^\Pi(t, s, x) + \frac{1}{2}\sigma(s, x)^2\Theta_{xx}^\Pi(t, s, x) + b(s, x)\Theta_x^\Pi(t, s, x) \\ + g(\tau^\Pi(t), s, x, \Theta^\Pi(s, s, x), \sigma(s, x)\Theta_x^\Pi(t, s, x)) = 0. \end{aligned}$$

可以期望

$$\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \Theta^\Pi(t, s, x) = \Theta(t, s, x),$$

而 $\Theta(t, s, x)$ 应该满足 (1.6), 并且 BSVIE (1.4) 的适应解 $(Y(\cdot), Z(\cdot, \cdot))$ 应具有表示 (1.5). 事实上, 我们能够证明如下定理 (这是定理 1.1 的一个较为细致的复述).

定理 3.1 假定 (H1) 和 (H2) 成立, 则 BSVIE (1.4) 存在一个唯一的适应解 $(Y(\cdot), Z(\cdot, \cdot))$, 偏微分方程 (1.6) 存在唯一的经典解 $\Theta(t, s, x)$. 进一步, 表示式 (1.5) 成立, 其中 $X(\cdot)$ 为 FSDE (1.3) 的唯一解.

证明思路 在条件 (H1) 和 (H2) 下, 我们首先证明 (1.6) 存在唯一的经典解 $\Theta(\cdot, \cdot, \cdot)$. 为此, 我们任取一个函数 $\theta: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 考虑下述方程:

$$\begin{cases} \Theta_s(t, s, x) + \frac{1}{2}\sigma(s, x)^2\Theta_{xx}(t, s, x) + b(s, x)\Theta_x(t, s, x) \\ \quad + g(t, s, x, \theta(s, x), \Theta_x(t, s, x)\sigma(s, x)) = 0, & (t, s, x) \in \Delta \times \mathbb{R}, \\ \Theta(t, T, x) = \psi(t, x), & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.11)$$

这个方程存在唯一的经典解. 于是我们定义了一个映照 $\theta(s, x) \mapsto \Theta(s, s, x)$. 可以证明这个映照具有唯一的不动点. 从而得到方程 (1.6) 存在唯一的经典解, 并且它是关于系数具有连续依赖性. 从而, 可以得到 $\Theta^\Pi(\cdot, \cdot, \cdot)$ 收敛于 $\Theta(\cdot, \cdot, \cdot)$. 于是, 再用 $(Y^\Pi(\cdot), Z^\Pi(\cdot, \cdot))$ 的表示和定理 2.1, 我们最后得到 (1.5). $\square$

从表示式 (1.5), 我们可见当 (H1) 和 (H2) 成立时, $(t, s) \mapsto Z(t, s)$ 是连续的. 特别地, $s \mapsto Z(t, s)$ 是连续的. 这样的结果不借助于上述的表示式似乎是无法得到的.

4 推广情形

本节将简单叙述若干推广情形.

(1) 扩散退化情形: 假定在 (H1) 中, $\sigma_0 = 0$, 则我们面临 FSDE 扩散系数退化的情形. 由于我们考虑的是一维情形, 因此, 黏性解的理论在此可以发挥作用. 具体地, 我们任取 $\varepsilon > 0$, 引入下述 FSDE:

$$\begin{cases} dX^\varepsilon(s) = b(s, X^\varepsilon(s))ds + [\sigma(s, X^\varepsilon(s)) + \varepsilon]dW(s), & s \in [0, T], \\ X^\varepsilon(0) = x. \end{cases} \quad (4.1)$$

在 (H1) 条件假设下, 上述 FSDE 存在唯一解 $X^\varepsilon(\cdot)$, 并且

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, T]} |X^\varepsilon(s) - X(s)|^2 \right] \leq K\sqrt{\varepsilon},$$

其中 $X(\cdot)$ 是 FSDE (1.3) 的解. 然后, 我们引入下述 BSVIE:

$$Y^\varepsilon(t) = \psi(t, X^\varepsilon(T)) + \int_t^T g(t, s, X^\varepsilon(s), Y^\varepsilon(s), Z^\varepsilon(t, s))ds - \int_t^T Z^\varepsilon(t, s)dW(s), \quad s \in [0, T]. \quad (4.2)$$

易知,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\int_0^T |Y^\varepsilon(t) - Y(t)|^2 dt + \int_0^T \int_t^T |Z^\varepsilon(t, s) - Z(t, s)|^2 ds dt \right) \\ & \leq K \mathbb{E} \left(|\psi(t, X^\varepsilon(T)) - \psi(t, X(T))|^2 + \int_0^T \int_t^T |g(t, s, X^\varepsilon(s), Y(s), Z(t, s)) \right. \\ & \quad \left. - g(t, s, X(s), Y(s), Z(t, s))|^2 ds dt \right) \\ & \leq K \mathbb{E} \left(|X^\varepsilon(T) - X(T)|^2 + \int_t^T \int_t^T |X^\varepsilon(s) - X(s)|^2 ds dt \right) \leq K\varepsilon. \end{aligned}$$

于是, 利用定理 3.1, 我们可得如下表示:

$$\begin{cases} Y^\varepsilon(s) = \Theta^\varepsilon(s, s, X^\varepsilon(s)), \\ Z^\varepsilon(t, s) = [\sigma(s, X^\varepsilon(s)) + \varepsilon] \Theta_x^\varepsilon(t, s, X^\varepsilon(s)), \end{cases} \quad s \in [0, T], \quad (4.3)$$

其中 $(s, x) \mapsto \Theta^\varepsilon(t, s, x)$ 满足下述方程:

$$\begin{cases} \Theta_s^\varepsilon(t, s, x) + \frac{1}{2} [\sigma(s, x) + \varepsilon]^2 \Theta_{xx}^\varepsilon(t, s, x) + b(s, x) \Theta_x^\varepsilon(t, s, x) \\ \quad + g(t, s, x, \Theta^\varepsilon(s, s, x), \Theta_x^\varepsilon(t, s, x) (\sigma(s, x) + \varepsilon)) = 0, & (t, s, x) \in \Delta \times \mathbb{R}, \\ \Theta^\varepsilon(t, T, x) = \psi(t, x), & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.4)$$

最后, 我们令 $\varepsilon \rightarrow 0$. 此时, $\Theta^\varepsilon(\cdot, \cdot, \cdot) \rightarrow \Theta(\cdot, \cdot, \cdot)$, 而 $(s, x) \mapsto \Theta(t, s, x)$ 是方程 (1.6) 唯一的黏性解. 值得注意, 由于 FSDE (1.3) 的扩散项可能退化, 于是 (1.6) 可能没有经典解. 因此, 很自然地, 我们会想到利用黏性解的理论. 不过, 需要指出的是, 我们的方程 (1.6) 中, 除了 $\Theta(t, s, x)$ 、 $\Theta_x(t, s, x)$ 和 $\Theta_{xx}(t, s, x)$ 外, 只出现 $\Theta(s, s, x)$, 而 $\Theta_x(s, s, x)$ 和 $\Theta_{xx}(s, s, x)$ 并不出现. 因此, 将 t 看作参数, 整套的黏性解理论可以照搬. 假如 $\Theta_x(s, s, x)$ 或 $\Theta_{xx}(s, s, x)$ 也同时出现, 则我们暂时不知是否可以建立相应的黏性解理论. 有关黏性解的理论, 限于篇幅, 我们在这里就不展开了, 读者可以参见文献 [17, 18].

(2) 高维情形: 对于高维情形, 我们来简单看一下相关结论的表述. 此时, 我们假定 Brown 运动 $W(\cdot)$ 是 d 维的, $X(\cdot)$ 取值于 $\mathbb{R}^n$, $Y(\cdot)$ 取值于 $\mathbb{R}^m$, $Z(\cdot, \cdot)$ 取值于 $\mathbb{R}^{m \times d}$. 相应地, 我们有

$$\begin{aligned} b &: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \sigma: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}, \\ g &: \Delta \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \psi: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

(H1) 和 (H2) 中的条件也需作相应调整, 例如, 我们需要假定

$$\sigma(t, x) \sigma(t, x)^T \geq \sigma_0 I, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n. \quad (4.5)$$

对于高维情形, 我们尚不知如何处理退化情形. 因此, 上面条件中, 我们需要 $\sigma_0 > 0$. 这样, 必须假定 $d \geq n$. 此时, 对应的偏微分方程 (1.6) 将变成如下的偏微分方程组:

$$\begin{cases} \Theta_s(t, s, x) + \frac{1}{2} \sigma(s, x)^T \Theta_{xx}(t, s, x) \sigma(s, x) + \Theta_x(t, s, x) b(s, x) \\ \quad + g(t, s, x, \Theta(s, s, x), \Theta_x(t, s, x) \sigma(s, x)) = 0, & (t, s, x) \in \Delta \times \mathbb{R}^n, \\ \Theta(t, T, x) = \psi(t, x), & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.6)$$

其中

$$\sigma(s, x)^T \Theta_{xx}(t, s, x) \sigma(s, x) = \sum_{k=1}^d \begin{pmatrix} \sigma_k(s, x)^T \Theta_{xx}^1(t, s, x) \sigma_k(s, x) \\ \sigma_k(s, x)^T \Theta_{xx}^2(t, s, x) \sigma_k(s, x) \\ \vdots \\ \sigma_k(s, x)^T \Theta_{xx}^m(t, s, x) \sigma_k(s, x) \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

并且

$$\sigma(s, x) = (\sigma_1(s, x), \sigma_2(s, x), \dots, \sigma_d(s, x)), \quad \Theta(t, s, x) = \begin{pmatrix} \Theta^1(t, s, x) \\ \Theta^2(t, s, x) \\ \vdots \\ \Theta^m(t, s, x) \end{pmatrix}.$$

此时, 相应的 BSVIE 的适应解 $(Y(\cdot), Z(\cdot, \cdot))$ 的表示应写成如下形式:

$$\begin{cases} Y(s) = \Theta(s, s, X(s)), & s \in [0, T], \\ Z(t, s) = \Theta_x(t, s, X(s)) \sigma(s, X(s)), & (t, s) \in \Delta, \end{cases} \quad (4.8)$$

其中 $\Theta(t, s, x)$ 和 $\Theta_x(t, s, x)$ 分别取值于 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^{m \times n}$.

参考文献

- 1 Bismut J M. Théorie Probabiliste du Contrôle des Diffusions. Mem Amer Math Soc, vol. 176. Providence: Amer Math Soc, 1973
- 2 Pardoux E, Peng S. Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems Control Lett, 1990, 14: 55–61
- 3 El Karoui N, Peng S, Quenez M C. Backward stochastic differential equation in finance. Math Finance, 1997, 7: 1–71
- 4 Ma J, Protter P, Yong J. Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly—A four step scheme. Probab Theory Related Fields, 1994, 98: 339–359
- 5 Ma J, Yong J. Forward-backward stochastic differential equations and their applications. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1702. Berlin: Springer-Verlag, 1999
- 6 Ma J, Zhang J. Representation theorems for backward stochastic differential equations. Ann Appl Probab, 2002, 12: 1390–1418
- 7 Zhang J. A numerical scheme for BSDEs. Ann Appl Probab, 2004, 14: 459–488
- 8 Ma J, Yong J, Zhao Y. Four step scheme for general Markovian forward-backward SDEs. J Syst Sci Complex, 2010, 23: 546–571
- 9 Peng S. Backward stochastic differential equation, nonlinear expectation and their applications. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vol. I. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010, 393–432
- 10 Lin J. Adapted solution of a backward stochastic nonlinear Volterra integral equation. Stoch Anal Appl, 2002, 20: 165–183
- 11 Yong J. Backward stochastic Volterra integral equations and some related problems. Stochastic Process Appl, 2006, 116: 779–795
- 12 Yong J. Continuous-time dynamic risk measures by backward stochastic Volterra integral equations. Appl Anal, 2007, 86: 1429–1442
- 13 Yong J. Well-posedness and regularity of backward stochastic Volterra integral equations. Probab Theory Related Fields, 2008, 142: 21–77
- 14 Wang T, Yong J. Comparison theorems for backward stochastic integral equations. Stochastic Process Appl, 2015, 125: 1756–1798

- 15 Shi Y, Wang T, Yong J. Mean-field backward stochastic Volterra integral equations. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2013, 18: 1929–1967
- 16 Shi Y, Wang T, Yong J. Optimal control problems of forward-backward stochastic Volterra integral equations. *Math Control Rel Fields*, 2015, 5: 613–649
- 17 Crandall M G, Ishii H, Lions P L. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 1992, 27: 1–67
- 18 Yong J, Zhou X Y. *Stochastic Control: Hamiltonian Systems and HJB Equations*. New York: Springer-Verlag, 1999

Representation of adapted solutions to backward stochastic Volterra integral equations

YONG JiongMin

Abstract In this paper, we establish a representation for the backward components of the adapted solution of a backward stochastic Volterra integral equation, in terms of the solutions to a partial differential equation and a forward stochastic differential equation.

Keywords backward stochastic Volterra integral equation, adapted solution, representation

MSC(2010) 60H20, 60H10, 45H05

doi: 10.1360/N012016-00034