Lévy 噪声驱动的随机微分方程的分部积分公式与应用

王风雨

北京师范大学数学科学学院, 北京 100875
E-mail: wangfy@bnu.edu.cn

收稿日期: 2015-01-19; 接受日期: 2015-03-02
国家自然科学基金 (批准号: 11131003 和 11431014) 和 “数学与复杂系统” 教育部重点实验室资助项目

摘要 本文使用 Malliavin 分析与有限跳逼近方法, 对于一类由从属 Brown 运动驱动的随机微分方程的半群建立 Driver 型分部积分公式. 作为该公式的应用, 本文得到半群的推移 Harnack 不等式以及热核估计. 主要结果应用于由 α 稳定型过程驱动的随机微分方程.

关键词 分部积分公式 推移 Harnack 不等式 随机微分方程

MSC (2010) 主题分类 60J75, 47G20

1 引言与主要结果

Malliavin 分析的一个重要应用是使用分部积分公式刻画 Wiener 泛函的分布性质, 如密度的存在性和光滑性等. Driver^[1] 在 1997 年对于紧 Riemann 流形 M 上的热半群建立了如下的分部积分公式:

$$P_t(\nabla_Z f) = \mathbb{E}\{f(X_t)N_t\}, \quad f \in C^1(M), \quad Z \in \mathcal{X},$$

其中 $\mathcal{X}$ 为 M 上所有光滑向量场之集, N_t 为仅依赖 Z 与曲率算子的随机变量. 如同文献 [2] 所示, 该公式定量地刻画了热核 $p_t(x, y)$ 关于变量 y 的导数. 文献 [2] 所发展的反向耦合方法已经被 Fan^[3] 和 Zhang^[4] 分别应用于分形 Brown 运动所驱动的随机微分方程和 Wiener 过程所驱动的随机偏微分方程的研究. 本文的目的是, 对于由纯跳 Lévy 过程驱动的随机微分方程建立显式的分部积分公式, 并由此估计热核及其导数.

考虑 $\mathbb{R}^d$ 上如下的随机方程:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s(X_s)ds + \int_0^t \sigma_s dW_{S(s)} + V_t, \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

其中

$$\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d, \quad b : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

可测且局部有界, $W := (W_t)_{t \geq 0}$, $S := (S(t))_{t \geq 0}$ 和 $V := (V_t)_{t \geq 0}$ 是独立的随机过程, 满足如下条件:

(1) W 为 $\mathbb{R}^d$ 上的 Brown 运动, $W_0 = 0$;

英文引用格式: Wang F Y. Integration by parts formula and applications for SDEs with Lévy noise (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 461–470, doi: 10.1360/N012015-00029

(2) V 为 $\mathbb{R}^d$ 上的右连左极过程, $V_0 = 0$;

(3) S 为 Bernstein 函数 B 所产生的从属子, 即 S 为 1 维 Lévy 增过程, 其 Laplace 变换为

$$\mathbb{E}e^{-rS(t)} = e^{-tB(r)}, \quad t, r \geq 0,$$

则 $(W_{S(t)})_{t \geq 0}$ 是一个 d 维 Lévy 过程, 称为以 S 为从属子的从属 Brown 运动.

通过对从属子 S 进行正则化逼近, 文献 [5, 6] 分别就该方程的半群建立了导数公式^[7] 和 Harnack 不等式^[8], 本文研究相应的分部积分公式和推移 Harnack 不等式. 为此, 我们作如下的假设:

(H1) $b_t \in C^2(\mathbb{R}^d)$, 且存在 $K_1, K_2 \in C([0, \infty))$ 使得

$$\|\nabla b_t\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|\nabla b_t(x)\| \leq K_1(t), \quad \|\nabla^2 b_t\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|\nabla^2 b_t(x)\| \leq K_2(t), \quad t \geq 0,$$

其中 $\|\cdot\|$ 为算子范数;

(H2) σ_t 可逆且存在增函数 $\lambda_1, \lambda_2 \in C([0, \infty))$ 使得

$$\|\sigma_t\| \leq \lambda_1(t), \quad \|\sigma_t^{-1}\| \leq \lambda_2(t), \quad t \geq 0.$$

由 (H1) 和 (H2), 任给 $x \in \mathbb{R}^d$, 方程 (1.1) 存在唯一的从 x 出发的解, 记为 $X_t(x)$. 我们研究如下定义的 Markov 算子 P_t :

$$P_t f(x) := \mathbb{E}f(X_t(x)), \quad f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

文献 [2] 已经解释了建立分部积分公式通常要难于建立 Bismut 公式. 事实上, 对于目前的模型, 文献 [5] 中所使用的正则化逼近方法不再适用于分部积分公式. 为说明这一点, 本文考虑一个简单情形: $V_t = 0$, $b_t = b$, $\sigma_t = \sigma$. 根据文献 [5], 给定 $\varepsilon > 0$, 令

$$S_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} S(s) ds + \varepsilon t, \quad t \geq 0,$$

则 $S_\varepsilon(\cdot)$ 可微且当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时收敛到 S . 考虑方程

$$dX_t^\varepsilon = b(X_t^\varepsilon)dt + \sigma dW_{S_\varepsilon(t)}, \quad X_0^\varepsilon = X_0.$$

为使用已有的关于 Brown 运动驱动的随机微分方程的有关结果, 令 $Y_t^\varepsilon = X_{S_\varepsilon^{-1}(t)}^\varepsilon$, 使得该方程转化为

$$dY_t^\varepsilon = b(Y_t^\varepsilon)(S_\varepsilon^{-1})'(t)dt + \sigma dW_t, \quad Y_0^\varepsilon = X_0.$$

文献 [5] 通过使用已有的关于 Y_t^ε 的 Bismut 公式并令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得到了关于 X_t 的相应公式. 该方法的要点是, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, Y_t^ε 的 Bismut 公式是收敛的. 然而 Y_t^ε 的分部积分公式 (参见文献 [2, 定理 5.1] 中 $\mathbb{H} = \mathbb{R}^d$, $A = 0$ 的情形) 并不具有这样的收敛性. 因此, 本文将使用另一种逼近方法, 即新近在文献 [9] 中所使用的有限跳逼近.

为叙述主要定理, 先引入 $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ 上的随机过程 J_t , 它是下面带随机系数的常微分方程的解:

$$\frac{d}{dt} J_t = (\nabla b_t)(X_t) J_t, \quad J_0 = I, \quad (1.2)$$

其中对于 $t \geq 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$, $(\nabla b_t)(x) \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ 由下式确定:

$$(\nabla b_t)(x)v = (\nabla_v b_t)(x), \quad v \in \mathbb{R}^d.$$

由 (H1),

$$\|(J_t)^{-1}\| \vee \|J_t\| \leq e^{\int_0^t K_1(s) ds}, \quad t \geq 0. \quad (1.3)$$

定理 1.1 假设 (H1) 和 (H2) 成立. 给定 $T > 0$, 如果

$$\mathbb{E}S(T)^{-\frac{1}{2}} < \infty, \quad (1.4)$$

则

$$P_T(\nabla_v f) = \mathbb{E} \left\{ f(X_T) \frac{M_T^v}{S(T)} \right\}, \quad v \in \mathbb{R}^d, \quad f \in C_b^1(\mathbb{R}^d), \quad (1.5)$$

其中

$$M_T^v := \left\langle \int_0^T (\sigma_t^{-1} J_t)^* dW_{S(t)}, J_T^{-1} v \right\rangle + \int_0^T dS(t) \int_t^T \text{Tr} \{ \sigma_t^{-1} J_t J_s^{-1} (\nabla \nabla_{J_s J_T^{-1} v} b_s)(X_s) J_s J_t^{-1} \sigma_t \} ds$$

属于 $L^1(S(T)^{-1} d\mathbb{P})$. 从而, P_T 关于 Lebesgue 测度具有密度 $p_T(x, y)$, 它关于变量 y 可微, 且微分满足:

$$\nabla_v \log p_T(x, \cdot)(y) = -\mathbb{E} \left(\frac{M_T^v}{S(T)} \mid X_T(x) = y \right), \quad v, x \in \mathbb{R}^d.$$

作为该定理的应用, 我们有如下的导数估计和推移 Harnack 不等式. 给定非负函数 $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ 以及常数 $T > 0$,

$$\text{Ent}_{P_T}(f) := P_T(f \log f) - (P_T f) \log P_T f$$

称为 f 关于 P_T 的相对熵.

推论 1.2 假设 (H1) 和 (H2) 以及 (1.4) 成立. 令

$$\beta(T) = dT\lambda_1(T)\lambda_2(T)K_2(T)e^{3TK_1(T)}, \quad T > 0.$$

(1) 任给 $T > 0$ 和 $v \in \mathbb{R}^d$, 有

$$\begin{aligned} \|P_T(\nabla_v f)\|_\infty &\leq |v| \cdot \|f\|_\infty (\lambda_2(T)e^{TK_1(T)}\mathbb{E}S(T)^{-\frac{1}{2}} + \beta(T)), \quad f \in C_b^1(\mathbb{R}^d), \\ \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_v p_T(x, \cdot)|(y) dy &\leq |v| (\lambda_2(T)e^{TK_1(T)}\mathbb{E}S(T)^{-\frac{1}{2}} + \beta(T)), \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

(2) 任给 $p > 1$, 存在常数 $C(p) \geq 1$ 使得对于所有的 $T > 0$, 有

$$\begin{aligned} |P_T(\nabla f)| &\leq C(p)(P_T|f|^p)^{\frac{1}{p}} (\lambda_2(T)e^{TK_1(T)}(\mathbb{E}S(T)^{-\frac{p}{2(p-1)}})^{\frac{p-1}{p}} + \beta(T)), \quad f \in C_b^1(\mathbb{R}^d), \\ \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \log p_T(x, \cdot)|^{\frac{p}{p-1}}(y) p_T(x, y) dy &\leq C(p)(\lambda_2(T)e^{TK_1(T)}(\mathbb{E}S(T)^{-\frac{p}{2(p-1)}})^{\frac{p-1}{p}} + \beta(T)), \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

(3) 任给 $\delta > 0$, $v, x \in \mathbb{R}^d$ 以及正函数 $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$, 有

$$\begin{aligned} |P_T(\nabla_v f)| &\leq \delta \text{Ent}_{P_T}(f) + (P_T f) \left(\beta(T)|v| + \delta \log \mathbb{E} \exp \left[\frac{\lambda_2(T)^2 |v|^2 e^{2TK_1(T)}}{2\delta^2 S(T)} \right] \right), \\ \int_{\mathbb{R}^d} \exp \left[\frac{|\nabla_v \log p_T(x, \cdot)|(y)}{\delta} \right] p_T(x, y) dy &\leq \mathbb{E} \exp \left[\frac{\beta(T)|v|}{\delta} + \frac{\lambda_2(T)^2 |v|^2 e^{2TK_1(T)}}{2\delta^2 S(T)} \right]. \end{aligned}$$

推论 1.3 假设 (H1) 和 (H2) 成立. 给定 $p > 1$, $T > 0$. 如果

$$\Gamma_{T,p}(r) := \mathbb{E} \exp \left[\frac{p^2 \lambda_2(T)^2 e^{2TK_1(T)} r^2}{2(p-1)^2 S(T)} \right] < \infty, \quad r \geq 0,$$

则推移 Harnack 不等式

$$(P_T f)^p(x) \leq \exp \left[\frac{p(\log p)\beta(T)|v|}{p-1} + \frac{p-1}{p} \log \Gamma_{T,p}(|v|) \right] P_T(f^p(v + \cdot))(x) \quad (1.6)$$

对于所有的 $v, x \in \mathbb{R}^d$ 和正函数 $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ 成立. 从而,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} p_T(x, y)^{\frac{p}{p-1}} dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \exp \left[-\frac{p(\log p)\beta(T)|v|}{p-1} - \frac{p-1}{p} \log \Gamma_{T,p}(|v|) \right] dv \right)^{\frac{-1}{p-1}}.$$

作为特例, 下面考虑由 α 稳定型过程驱动的随机微分方程.

推论 1.4 假设 (H1) 和 (H2) 成立. 令 $B(r) \geq cr^{\frac{\alpha}{2}}$ 对于 $r \geq r_0$ 成立, 其中 $\alpha \in (0, 2)$ 和 $c, r_0 > 0$ 为常数.

(1) 任给 $p > 1$, 存在常数 $C(p) > 0$ 使得

$$|P_T(\nabla f)| \leq \frac{C(p)(P_T|f|^p)^{\frac{1}{p}}}{1 \wedge T^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad T > 0, \quad f \in C_b^1(\mathbb{R}^d),$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \log p_T(x, \cdot)|^{\frac{p}{p-1}}(y) p_T(x, y) dy \leq \frac{C(p)}{1 \wedge T^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad T > 0.$$

(2) 当 $\alpha \in (1, 2)$ 时, 存在常数 $C > 0$ 使得对所有的 $p > 1, \delta > 0, v \in \mathbb{R}^d$ 以及 $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$, 有

$$|P_T(\nabla_v f)| \leq \delta \text{Ent}_{P_T}(f) + (P_T f) \left(\beta(T)|v| + \frac{C|v|^2}{\delta^2(1 \wedge T)^{\frac{2}{\alpha}}} + \frac{C|v|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\{\delta^\alpha(1 \wedge T)\}^{\frac{1}{\alpha-1}}} \right),$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp \left[\frac{|\nabla_v \log p_T(x, \cdot)(y)|}{\delta} \right] p_T(x, y) dy \leq \exp \left[\beta(T)|v| + \frac{C|v|^2}{\delta^2(1 \wedge T)^{\frac{2}{\alpha}}} + \frac{C|v|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\{\delta^\alpha(1 \wedge T)\}^{\frac{1}{\alpha-1}}} \right].$$

(3) 当 $\alpha \in (1, 2)$ 时, 存在常数 $C > 0$ 使得对所有的 $p > 1, T > 0, v \in \mathbb{R}^d$ 和正函数 $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$, 有

$$(P_T f)^p \leq \exp \left[\frac{C(p \log p)|v|}{p-1} + \frac{Cp|v|^2}{(p-1)(1 \wedge T)^{\frac{2}{\alpha}}} + \frac{Cp^{\frac{1}{\alpha-1}}|v|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{[(p-1)(1 \wedge T)]^{\frac{1}{\alpha-1}}} \right] P_T(f^p(v + \cdot)),$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} p_T(x, y)^{\frac{p}{p-1}} dy \leq \frac{1}{(1 \wedge T)^{\frac{d}{\alpha(p-1)}}} \exp \left[\frac{Cp \log p}{(p-1)^2} + \frac{Cp^{\frac{1}{\alpha-1}}}{(p-1)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} \right].$$

第 2 节考虑具有有限跳时间变换的随机微分方程, 并建立分部积分公式; 第 3 节证明当限跳时间变换收敛到从属子 S 时, 所建立的公式收敛, 进而证明上述结果.

2 带有限跳的随机微分方程的分部积分公式

设 $T > 0, \ell : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ 为右连左极的增函数使得 $\ell(0) = 0$ 且 $\{t \in [0, T] : \Delta \ell(t) := \ell(t) - \ell(t-) > 0\}$ 为非空有限集合, 则称 ℓ 是 S 在时间段 $[0, T]$ 上的一条具有有限跳的样本轨道. 令 X_t^ℓ 为如下方程的解:

$$X_t^\ell = X_0^\ell + \int_0^t b_s(X_s^\ell) ds + \int_0^t \sigma_s dW_{\ell(s)} + V_t, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

并令 P_t^ℓ 为相应的 Markov 算子, 即 $P_t^\ell f(x) := \mathbb{E}f(X_t^\ell(x))$, 其中 $X_t^\ell(x)$ 为方程 (2.1) 初值为 $X_0^\ell = x$ 的解. 此外, 令 J_t^ℓ 是如下具随机系数的常微分方程的解:

$$\frac{d}{dt} J_t^\ell = (\nabla b_t)(X_t^\ell) J_t^\ell, \quad J_0^\ell = I. \quad (2.2)$$

由 (H1), 我们有

$$\|(J_t^\ell)^{-1}\| \vee \|J_t^\ell\| \leq e^{\int_0^t K_1(s) ds}, \quad t \geq 0. \quad (2.3)$$

定理 2.1 设 ℓ 是 S 在时间段 $[0, T]$ 上的一条具有有限跳的样本轨道, 则

$$P_T^\ell(\nabla_v f) = \frac{1}{\ell(T)} \mathbb{E}\{f(X_T^\ell) M_T^{\ell, v}\}, \quad v \in \mathbb{R}^d, \quad f \in C_b^1(\mathbb{R}^d),$$

其中

$$\begin{aligned} M_T^{\ell, v} := & \left\langle \int_0^T (\sigma_t^{-1} J_t^\ell)^* dW_{\ell(t)}, (J_T^\ell)^{-1} v \right\rangle \\ & + \int_0^T d\ell(t) \int_t^T \text{Tr}\{\sigma_t^{-1} J_t^\ell (J_s^\ell)^{-1} (\nabla \nabla_{J_s^\ell (J_t^\ell)^{-1} v} b_s)(X_s^\ell) J_s^\ell (J_t^\ell)^{-1} \sigma_t\} ds. \end{aligned}$$

证明 对于 Brown 运动 $(W_t)_{t \in [0, \ell(T)]}$, 令 $(D, \mathcal{D}(D))$ 为 Malliavin 梯度, $(D^*, \mathcal{D}(D^*))$ 为其伴随算子 (也称 Malliavin 散度算子). 令

$$h(t) = \sum_{i=1}^t (t \wedge \ell(t_i) - \ell(t_{i-1}))^+ \sigma_{t_i}^{-1} J_{t_i}^\ell (J_T^\ell)^{-1} v, \quad t \in [0, \ell(T)].$$

由 (H1) 知, 对于所有的 $t \in [0, T]$, J_t^ℓ 和 $(J_t^\ell)^{-1}$ 是 Malliavin 可微的, 且 $h \in \mathcal{D}(D^*)$. 由于 $(V_t)_{t \geq 0}$ 与 $(W_t)_{t \geq 0}$ 独立, 我们有 $D_h V_t = 0$, 从而, (2.1) 蕴含

$$dD_h X_t^\ell = (\nabla_{D_h X_t^\ell} b_t)(X_t^\ell) dt + \sigma_t dh_{\ell(t)}, \quad D_h X_0^\ell = 0. \quad (2.4)$$

所以,

$$D_h X_T^\ell = J_T^\ell \int_0^T (J_t^\ell)^{-1} \sigma_t dh_{\ell(t)} = J_T^\ell \sum_{i=1}^n (J_{t_i}^\ell)^{-1} \sigma_{t_i}^{-1} J_{t_i}^\ell (J_T^\ell)^{-1} \Delta \ell(t_i) = \ell(T) v.$$

因而,

$$P_T^\ell(\nabla_v f) = \mathbb{E}(\nabla_v f)(X_T^\ell) = \frac{1}{\ell(T)} \mathbb{E}(\nabla_{D_h X_T^\ell} f)(X_T^\ell) = \frac{1}{\ell(T)} \mathbb{E}\{D_h f(X_T^\ell)\} = \frac{1}{\ell(T)} \mathbb{E}\{f(X_T^\ell) D^*(h)\}. \quad (2.5)$$

为计算 $D^*(h)$, 对于 $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq d$, $t \in [0, \ell(T)]$, 令

$$h_{ik}(t) = (t \wedge \ell(t_i) - \ell(t_{i-1}))^+ e_k, \quad F_{ik} = \langle \sigma_{t_i}^{-1} J_{t_i}^\ell (J_T^\ell)^{-1} v, e_k \rangle,$$

其中 $\{e_k\}_{k=1}^d$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的标准正交基, 则 $h(t) = \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n F_{ik} h_{ik}(t)$, $t \in [0, \ell(T)]$. 留意 h_{ik} 是非随机的且 $\int_0^{\ell(T)} |h'_{ik}(t)|^2 dt < \infty$, 我们有

$$D^*(h_{ik}) = \int_0^{\ell(T)} \langle h'_{ik}(t), dW_t \rangle = \langle e_k, W_{\ell(t_i)} - W_{\ell(t_{i-1})} \rangle.$$

从而, 由公式 $D^*(F_{ik} h_{ik}) = F_{ik} D^*(h_{ik}) - D_{h_{ik}} F_{ik}$, 我们得到

$$\begin{aligned} D^*(h) &= \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \{F_{ik} D^*(h_{ik}) - D_{h_{ik}} F_{ik}\} \\ &= \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \{F_{ik} \langle e_k, W_{\ell(t_i)} - W_{\ell(t_{i-1})} \rangle - \langle \sigma_{t_i}^{-1} D_{h_{ik}} (J_{t_i}^\ell (J_T^\ell)^{-1} v), e_k \rangle\} \end{aligned}$$

$$= \left\langle \int_0^T (\sigma_t^{-1} J_t^\ell)^* dW_{\ell(t)}, (J_T^\ell)^{-1} v \right\rangle - \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \langle \sigma_{t_i}^{-1} D_{h_{ik}}(J_{t_i}^\ell (J_T^\ell)^{-1}) v, e_k \rangle. \quad (2.6)$$

鉴于 $dh_{ik}(t)$ 支撑在集合 $(\ell(t_{i-1}), \ell(t_i))$ 上, 而 $J_{t_i}^\ell$ 关于 $\mathcal{F}_{\ell(t_{i-1})} := \sigma\{W_t : t \leq \ell(t_{i-1})\}$ 可测, 我们有 $D_{h_{ik}} J_{t_i}^\ell = 0$. 所以,

$$D_{h_{ik}}(J_{t_i}^\ell (J_T^\ell)^{-1}) = J_{t_i}^\ell D_{h_{ik}}(J_T^\ell)^{-1} = -J_{t_i}^\ell (J_T^\ell)^{-1} (D_{h_{ik}} J_T^\ell) (J_T^\ell)^{-1}. \quad (2.7)$$

由于 (2.2) 蕴含

$$dD_{h_{ik}} J_t^\ell = (\nabla_{D_{h_{ik}} X_t^\ell} \nabla b_t)(X_t^\ell) J_t^\ell dt + (\nabla b_t)(X_t^\ell) D_{h_{ik}} J_t^\ell dt, \quad D_{h_{ik}} J_0^\ell = 0,$$

我们得到

$$D_{h_{ik}} J_T^\ell = J_T^\ell \int_0^T (J_t^\ell)^{-1} (\nabla_{D_{h_{ik}} X_t^\ell} \nabla b_t)(X_t^\ell) J_t^\ell dt. \quad (2.8)$$

此外, (2.4) 蕴含

$$D_{h_{ik}} X_t^\ell = J_t^\ell \int_0^t (J_s^\ell)^{-1} \sigma_s dh_{\ell(s)} = 1_{\{t_i \leq t\}} (\ell(t_i) - \ell(t_{i-1})) J_t^\ell (J_{t_i}^\ell)^{-1} \sigma_{t_i} e_k.$$

结合 (2.8), 我们有

$$D_{h_{ik}} J_T^\ell = (\Delta \ell(t_i)) J_T^\ell \int_{t_i}^T (J_s^\ell)^{-1} (\nabla_{J_s^\ell (J_{t_i}^\ell)^{-1} \sigma_{t_i} e_k} \nabla b_s)(X_s^\ell) J_s^\ell ds.$$

代入 (2.7) 得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n \langle \sigma_{t_i}^{-1} D_{h_{ik}}(J_{t_i}^\ell (J_T^\ell)^{-1}) v, e_k \rangle \\ &= - \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^n (\Delta \ell(t_i)) \sigma_{t_i}^{-1} J_{t_i}^\ell \int_{t_i}^T \langle (J_s^\ell)^{-1} (\nabla_{J_s^\ell (J_{t_i}^\ell)^{-1} \sigma_{t_i} e_k} \nabla b_s)(X_s^\ell) J_s^\ell (J_T^\ell)^{-1} v, e_k \rangle ds \\ &= - \sum_{k=1}^d \int_0^T d\ell(t) \int_t^T \langle \sigma_t^{-1} J_t^\ell (J_s^\ell)^{-1} (\nabla_{J_s^\ell (J_t^\ell)^{-1} \sigma_t e_k} \nabla_{J_s^\ell (J_T^\ell)^{-1} v} b_s)(X_s^\ell), e_k \rangle ds \\ &= - \int_0^T d\ell(t) \int_t^T \sum_{k=1}^d \langle \sigma_t^{-1} J_t^\ell (J_s^\ell)^{-1} (\nabla \nabla_{J_s^\ell (J_t^\ell)^{-1} v} b_s)(X_s^\ell) J_s^\ell (J_t^\ell)^{-1} \sigma_t e_k, e_k \rangle ds \\ &= - \int_0^T d\ell(t) \int_t^T \text{Tr}\{\sigma_t^{-1} J_t^\ell (J_s^\ell)^{-1} (\nabla \nabla_{J_s^\ell (J_t^\ell)^{-1} v} b_s)(X_s^\ell) J_s^\ell (J_t^\ell)^{-1} \sigma_t\} ds. \end{aligned}$$

因而, 我们从 (2.6) 导出 $D^*(h) = M_T^{\ell, v}$, 将其代入 (2.5) 完成证明. □

注 2.2 张希承教授向作者指出, 该结果也可以由文献 [10, 注 2.1] 所建议的方法得到:

$$P_T^\ell(\nabla_v f) = \mathbb{E}(f(X_T^\ell) \sum_{i,k=1}^d [D^*(h_k) \{(\nabla X_T^\ell)^{-1}\}_{ki} - D_{h_k} \{(\nabla X_T^\ell)^{-1}\}_{ki}] v_i),$$

其中 $h_k \in \mathcal{D}(D^*)$ 满足

$$D_{h_k} X_T^\ell = \nabla_{e_k} X_T^\ell.$$

由于 $\nabla X_T^\ell = J_T^\ell$, 上面定理可以由此通过计算 $D^*(h_k)$ 和 $D_{h_k} T_t^\ell$ 得证.

3 结果的证明

定理 1.1 的证明 由文献 [2, 定理 2.4(1)], 第 2 个论断可由第 1 个推出. 所以仅证明所求的分部积分公式. 设 ℓ 为 S 的在 $[0, T]$ 上一条样本轨道, $\ell(T) > 0$. 任给 $\varepsilon > 0$, 令

$$\ell_\varepsilon(t) = \sum_{s \leq t} \Delta \ell(s) 1_{\{\Delta \ell(s) \geq \varepsilon\}}, \quad t \geq 0,$$

则 ℓ_ε 在 $[0, T]$ 上具有有限跳, 且当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时 $[0, T]$ 上的测度 $d\ell_\varepsilon(t)$ 强收敛到 $d\ell(t)$. 由 (2.3) 和 (H1) 以及 (H2) 知,

$$\|\sigma_t^{-1} J_t^{\ell_\varepsilon} (J_t^{\ell_\varepsilon})^{-1}\| + \int_t^T \|\sigma_t^{-1} J_t^{\ell_\varepsilon} (J_s^{\ell_\varepsilon})^{-1} (\nabla_{J_s^{\ell_\varepsilon} (J_t^{\ell_\varepsilon})^{-1} \sigma_{te_k}} \nabla b_s) (X_s^{\ell_\varepsilon}) J_s^{\ell_\varepsilon} (J_t^{\ell_\varepsilon})^{-1}\| ds$$

对于 $(t, \varepsilon) \in [0, T] \times [0, 1]$ 有界. 此外, 根据文献 [10, 引理 3.1], $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} |X_t^{\ell_\varepsilon} - X_t^\ell|^2 = 0$, 由此结合 (H1) 得到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} (\|J_t^{\ell_\varepsilon} - J_t^\ell\|^2 + \|(J_t^{\ell_\varepsilon})^{-1} - (J_t^\ell)^{-1}\|^2) = 0.$$

该式与 (2.3)、(H1) 和 (H2) 以及 $d\ell_\varepsilon$ 的强收敛一起蕴含

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_T^{\ell_\varepsilon}(\nabla_v f) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}(\nabla_v f)(X_T^{\ell_\varepsilon}) = P_T^\ell(\nabla_v f), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}\{f(X_T^{\ell_\varepsilon}) M_T^{\ell_\varepsilon, v}\} &= \mathbb{E}\{f(X_T^\ell) M_T^{\ell, v}\}, \quad f \in C_b^1(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

从而, 先将定理 2.1 应用于 ℓ_ε , 再令 $\varepsilon \downarrow 0$, 我们得到 $P_T^\ell(\nabla_v f) = \frac{1}{\ell(T)} \mathbb{E}\{f(X_T^\ell) M_T^{\ell, v}\}$. 由于 $\mathbb{E}S(T)^{-\frac{1}{2}} < \infty$ 蕴含 $S(T) > 0$, 并且 $X_T = X_T^S$, $M_T^v = M_T^{S, v}$, 该公式蕴含

$$P_T^S(\nabla_v f) = \frac{1}{S(T)} \mathbb{E}^S\{f(X_T) M_T^v\}, \quad (3.1)$$

其中 $\mathbb{E}^S$ 是给定 S 之下的条件期望. 此外, 由 (2.3)、(H1) 和 (H2) 以及 $\mathbb{E}S(T)^{-\frac{1}{2}} < \infty$ 知,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \frac{M_T^v}{S(T)} \right| &= \mathbb{E} \left| \frac{1}{S(T)} \mathbb{E}^S M_T^v \right| \\ &\leq \mathbb{E} \left[\frac{1}{S(T)} \left(E^S \int_0^T |\sigma_t^{-1} J_t(J_T)^{-1} v|^2 dS(t) \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^d \frac{1}{S(T)} \int_0^T dS(t) \int_t^T \|\sigma_t^{-1} J_t J_s^{-1}\| \cdot |(\nabla_{J_s J_t^{-1} \sigma_{te_k}} \nabla_{J_s J_t^{-1} v} b_s)(X_s)| ds \right] \\ &\leq |v| (\lambda_2(T) e^{TK_1(T)} \mathbb{E}S(T)^{-\frac{1}{2}} + dT \lambda_1(T) \lambda_2(T) K_2(T) e^{3TK_1(T)}) < \infty, \end{aligned} \quad (3.2)$$

则 $M_T^v \in L^1(S(T)^{-1} d\mathbb{P})$ 和 (3.1) 蕴含 $P_T(\nabla_v f) = \mathbb{E}P_T^S(\nabla_v f) = \mathbb{E}(\frac{1}{S(T)} f(X_T) M_T^v)$. 证毕. $\square$

推论 1.2 的证明 论断 (1) 由 (3.2)、定理 1.1 和文献 [2, 定理 2.4(1)] 对于 $H(r) = r$ 导出. 此外, 由 (1.3)、(H1) 和 (H2) 以及 Burkholder 不等式 (参见文献 [5, 定理 2.3] 或 [10, 引理 2.1]), 任给 $p > 1$, 存在常数 $C(p) \geq 1$ 使得

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{E} \left| \frac{M_T^v}{S(T)} \right|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} &\leq \beta(T) |v| + C(p) \left(\frac{\mathbb{E} \left(\int_0^T |\sigma_t^{-1} J_t(J_T)^{-1} v|^2 dS(t) \right)^{\frac{p}{2(p-1)}}}{S(T)^{\frac{p}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \beta(T) |v| + C(p) |v| \lambda_2(T) e^{TK_1(T)} (\mathbb{E}S(T)^{-\frac{p}{2(p-1)}})^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

从而, 由文献 [2, 定理 2.4(1)] 取 $H(r) = r^{\frac{p}{p-1}}$ 以及

$$|P_T(\nabla_v f)| = \left| \mathbb{E} \left\{ f(X_T^\ell) \frac{M_T^v}{S(T)} \right\} \right| \leq (P_T |f|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E} \frac{|M_T^v|^{\frac{p}{p-1}}}{S(T)^{\frac{p}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}}, \quad v \in \mathbb{R}^d$$

得到论断 (2).

最后, 由定理 1.1 和 Young 不等式 (参见文献 [11, 引理 2.4]), 对于非负函数 $f \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$, 有

$$|P_T(\nabla_v f)| = \left| \mathbb{E} \left\{ f(X_T^\ell) \frac{M_T^v}{S(T)} \right\} \right| \leq \delta \text{Ent}_{P_T}(f) + \delta(P_T f) \log \mathbb{E} \exp \left[\frac{M_T^v}{\delta S(T)} \right], \quad \delta > 0. \quad (3.3)$$

显然, 由 (1.3)、(H1) 和 (H2) 知,

$$\begin{aligned} \frac{M_T^v}{S(T)} &\leq \beta(T)|v| + \frac{1}{S(T)} \int_0^T \langle \sigma_t^{-1} J_t J_T^{-1} v, dW_{S(t)} \rangle, \\ \mathbb{E}^S \exp \left[\frac{1}{\delta S(T)} \int_0^T \langle \sigma_t^{-1} J_t J_T^{-1} v, dW_{S(t)} \rangle \right] &\leq \exp \left[\frac{\lambda_2(T)^2 |v|^2 e^{2TK_1(T)}}{2\delta^2 S(T)} \right], \quad \delta > 0, \end{aligned}$$

则

$$\log \mathbb{E} \exp \left[\frac{M_T^v}{\delta S(T)} \right] \leq \frac{\beta(T)|v|}{\delta} + \log \mathbb{E} \exp \left[\frac{\lambda_2(T)^2 |v|^2 e^{2TK_1(T)}}{2\delta^2 S(T)} \right], \quad \delta > 0.$$

由此结合 (3.3) 并对于文献 [2, 定理 2.4(1)] 取 $H(r) = e^{r/\delta}$, 我们证明论断 (3). $\square$

推论 1.3 的证明 由文献 [2, 定理 2.5(2)] 知, 第 1 个论断蕴含第 2 个. 故我们仅对 $v \neq 0$ 证明所求的推移 Harnack 不等式 (1.6). 由推论 1.2(3), 我们有

$$|P_T(\nabla_v f)| \leq \delta \text{Ent}_{P_T}(f) + (P_T f) \left(\beta(T)|v| + \delta \log \mathbb{E} \exp \left[\frac{\lambda_2(T)^2 |v|^2}{2\delta^2 S(T)} e^{\int_0^T K_1(t) dt} \right] \right), \quad \delta > 0.$$

所以, 令 $\beta_v(\delta) = \beta(T)|v| + \delta \log \mathbb{E} \exp \left[\frac{\lambda_2(T)^2 |v|^2 e^{2TK_1(T)}}{2\delta^2 S(T)} \right]$, $\delta > 0$, 我们从文献 [2, 命题 2.3] 得到

$$(P_T f)^p \leq (P_T f^p(v + \cdot)) \exp \left[\int_0^1 \frac{p}{1 + (p-1)s} \beta_v \left(\frac{p-1}{1 + (p-1)s} \right) ds \right]. \quad (3.4)$$

由 Jensen 不等式, 对于 $\delta = \frac{p-1}{1+(p-1)s}$, 我们有

$$\mathbb{E} \exp \left[\frac{\lambda_2(T)^2 |v|^2 e^{2TK_1(T)}}{2\delta^2 S(T)} \right] \leq \left(\mathbb{E} \exp \left[\frac{p^2 \lambda_2(T)^2 |v|^2 e^{2TK_1(T)}}{2(p-1)^2 S(T)} \right] \right)^{\frac{(1+(p-1)s)^2}{p^2}} = \Gamma_{T,p}(|v|)^{\frac{(1+(p-1)s)^2}{p^2}},$$

则

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{p}{1 + (p-1)s} \beta_v \left(\frac{p-1}{1 + (p-1)s} \right) ds &\leq \beta(T)|v| \int_0^1 \frac{p}{1 + (p-1)s} ds + \frac{p-1}{p} \log \Gamma_{T,p}(|v|) \\ &= \frac{p \log p}{p-1} \beta(T)|v| + \frac{p-1}{p} \log \Gamma_{T,p}(|v|). \end{aligned}$$

结合 (3.4), 我们完成证明. $\square$

推论 1.4 的证明 将推论 1.2 和 1.3 应用于与 W 和 S 独立的过程 V , 则相应的结果对于 P_T^V 也成立, 其中

$$P_T^V f(x) = \mathbb{E}^V(f(X_T(x)) := \mathbb{E}(f(X_T(x)) | V).$$

此外, 由 Markov 性, 我们仅需对于 P_T^V 和 $T \in (0, 1]$ 证明所求结果. 事实上, 对于 $T > 1$, 令

$$P_{1,T}^V f(x) = \mathbb{E}^V f(X_{1,T}(x)), \quad f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

其中 $(X_{1,t}(x))_{t \geq 1}$ 是方程

$$X_{1,t}(x) = x + \int_1^t b_s(X_{1,s}(s))ds + \int_1^t \sigma_s dW_{S(s)} + V_t - V_1, \quad t \geq 1$$

的解. 则由 X_t 在 $\mathbb{E}^V$ 之下的 Markov 性, 我们有 $P_T^V f = P_{1,T}^V(P_1^V f)$, $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$. 如果已经证明了 $T \leq 1$ 时所求的结果, 则由此及 Jensen 不等式便可得到 $T > 1$ 时的相应结果. 例如, 如果对于 $p > 1$, 有 $|P_1^V(\nabla f)| \leq C(p)(P_1^V|f|^p)^{\frac{1}{p}}$, 则对于 $T > 1$, 有

$$\begin{aligned} |P_T(\nabla f)| &= |\mathbb{E}P_{1,T}^V P_1^V(\nabla f)| \leq \mathbb{E}P_{1,T}^V |P_1^V(\nabla f)| \leq C(p)\mathbb{E}P_{1,T}^V (P_1^V|f|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C(p)(P_T|f|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{C(p)(P_T|f|^p)^{\frac{1}{p}}}{(1 \wedge T)^{\frac{1}{\alpha}}}. \end{aligned}$$

所以, 下面仅对 $T \in (0, 1]$ 分别证明论断 (1)–(3).

(1) 由于 $\beta(T) + \lambda_2(T)e^{TK_1(T)}$ 对于 $T \in (0, 1]$ 有界, 且由文献 [9, 定理 1.1] 的证明知,

$$(\mathbb{E}S(T)^{-\frac{p}{2(p-1)}})^{\frac{p-1}{p}} \leq \frac{C}{T^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad T \in (0, 1]$$

对于某常数 $C > 0$ 成立, 则所求结果由推论 1.2(2) 得到.

(2) 令 $\alpha \in (1, 2)$, 且 S_α 是由 Bernstein 函数 $r \mapsto r^{\frac{\alpha}{2}}$ 产生的从属子. 则由文献 [6, 推论 1.2] 的证明知,

$$\mathbb{E} \frac{1}{S(T)^k} \leq c_0 \mathbb{E} \frac{1}{S_\alpha(T)^k}, \quad k \geq 1, \quad T \in (0, 1] \quad (3.5)$$

对于某常数 $c_0 \geq 1$ 成立. 由文献 [12, 定理 1.1] 证明中的第 3 式并取 $\kappa = 1$ (留意那里的 α 等同于这里的 $\alpha/2$), 存在常数 $c_1, c_2 > 0$ 使得

$$\mathbb{E}e^{\lambda/\tilde{S}(t)} \leq 1 + \left(\exp \left[\frac{c_1 \lambda^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}}{t^{\frac{1}{\alpha-1}}} \right] - 1 \right)^{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}} \leq \exp \left[\frac{c_2 \lambda}{t^{\frac{2}{\alpha}}} + \frac{c_2 \lambda^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}}{t^{\frac{1}{\alpha-1}}} \right], \quad \lambda, t \geq 0$$

成立. 该式和 (3.5) 蕴含

$$\mathbb{E}e^{\lambda/S(T)} \leq 1 + c_0(\mathbb{E}e^{\lambda/S_\alpha(T)} - 1) \leq \mathbb{E}e^{c_0 \lambda/S_\alpha(T)} \leq \exp \left[\frac{c_3 \lambda}{t^{\frac{2}{\alpha}}} + \frac{c_3 \lambda^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}}{t^{\frac{1}{\alpha-1}}} \right], \quad T \in (0, 1], \quad \lambda \geq 0 \quad (3.6)$$

对于某常数 $c_3 > 0$ 成立. 由推论 1.2(3) 和 (3.6), 我们证明了所求结论.

(3) 由 (3.6), 存在常数 $c_4 > 0$ 使得

$$\Gamma_{T,p}(r) \leq \exp \left[\frac{c_4 p^2 r^2}{(p-1)^2 T^{\frac{2}{\alpha}}} + \frac{c_4 (pr)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{(p-1)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} T^{\frac{1}{\alpha-1}}} \right], \quad r \geq 0, \quad T \in (0, 1],$$

则存在常数 $c_5 > 0$ 使得

$$\frac{p(\log p)\beta(T)|v|}{p-1} + \frac{p-1}{p} \log \Gamma_{T,p}(|v|) \leq \frac{c_5(p \log p)|v|}{p-1} + \frac{c_5 p|v|^2}{(p-1)T^{\frac{2}{\alpha}}} + \frac{c_5 p^{\frac{1}{\alpha-1}}|v|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{(p-1)^{\frac{1}{\alpha-1}} T^{\frac{1}{\alpha-1}}},$$

$$T \in (0, 1], \quad v \in \mathbb{R}^d. \quad (3.7)$$

由推论 1.3, 该式蕴含 (3) 中的第 1 个不等式. 最后, 由 (3.7) 和推论 1.3, 存在常数 $C' > C$ 使得

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} p_T(x, y)^{\frac{p}{p-1}} dy &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \exp \left[-\frac{C(p \log p)|v|}{p-1} - \frac{Cp|v|^2}{(p-1)T^{\frac{2}{\alpha}}} - \frac{Cp^{\frac{1}{\alpha-1}}|v|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{[(p-1)T]^{\frac{1}{\alpha-1}}} \right] dv \right)^{\frac{-1}{p-1}} \\ &\leq \left(\int_{\{|v| \leq T^{\frac{1}{\alpha}}\}} dv \right)^{\frac{-1}{p-1}} \exp \left[\frac{Cp(1 + \log p)}{(p-1)^2} + \frac{Cp^{\frac{1}{\alpha-1}}}{(p-1)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} \right] \\ &\leq \frac{1}{T^{\frac{d}{\alpha(p-1)}}} \exp \left[\frac{C'p \log p}{(p-1)^2} + \frac{C'p^{\frac{1}{\alpha-1}}}{(p-1)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} \right] \end{aligned}$$

成立. 从而, 我们证明了 (3) 中的第 2 个不等式. $\square$

参考文献

- 1 Driver B. Integration by parts for heat kernel measures revisited. J Math Pures Appl, 1997, 76: 703–737
- 2 Wang F Y. Integration by parts formula and shift Harnack inequality for stochastic equations. Ann Probab, 2014, 42: 994–1019
- 3 Fan X L. Integration by parts formula, derivative formula, and transportation inequalities for SDEs driven by fractional Brownian motion. ArXiv: 1302.5868, 2013
- 4 Zhang S Q. Shift Harnack inequality and integration by parts formula for semilinear SPDE. ArXiv:1208.2425, 2012
- 5 Zhang X. Derivative formula and gradient estimate for SDEs driven by α -stable processes. Stochastic Process Appl, 2013, 123: 1213–1228
- 6 Wang F Y, Wang J. Harnack inequalities for stochastic equations driven by Lévy noise. J Math Anal Appl, 2014, 410: 513–523
- 7 Bismut J M. Large Deviations and the Malliavin Calculus. Boston: Birkhäuser, 1984
- 8 Wang F Y. Logarithmic Sobolev inequalities on noncompact Riemannian manifolds. Probab Theory Related Fields, 1997, 109: 417–424
- 9 Wang F Y, Xu L, Zhang X. Gradient estimates for SDEs driven by multiplicative Lévy noise. ArXiv:1301.4528, 2013
- 10 Wang F Y, Zhang X. Derivative formula and applications for degenerate diffusion semigroups. J Math Pures Appl, 2013, 99: 726–740
- 11 Arnaudon M, Thalmaier A, Wang F Y. Gradient estimates and Harnack inequalities on non-compact Riemannian manifolds. Stochastic Process Appl, 2009, 119: 3653–3670
- 12 Gordina M, Röckner M, Wang F Y. Dimension-free Harnack inequalities for subordinated semigroups. Potential Anal, 2011, 34: 293–307

Integration by parts formula and applications for SDEs with Lévy noise

WANG FengYu

Abstract By using the Malliavin calculus and finite jump approximations, the Driver-type integration by parts formula is established for the semigroup associated to stochastic differential equations with noises containing a subordinate Brownian motion. As applications, the shift Harnack inequality and heat kernel estimates are derived. The main results are illustrated by SDEs driven by α -stable like processes.

Keywords integration by parts formula, shift Harnack inequality, stochastic differential equation

MSC(2010) 60J75, 47G20

doi: 10.1360/N012015-00029