论文

厚板弯曲与拉伸振动精化理论及其求解新途径

胡超^{①②*}, MA Fai^③, 马兴瑞^④, 黄文虎^④

① 扬州大学建筑科学与工程学院, 扬州 225127;

② 同济大学航空航天与力学学院, 上海 200092;

③ 加州大学伯克利分校工程学院, 伯克利 94720;

④ 哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨 150001

*联系人, E-mail: chaohu@tongji.edu.cn

收稿日期: 2011-05-30; 接受日期: 2012-02-14; 网络出版日期: 2012-04-06

国家自然科学基金(批准号: 10572045)和航天创新科学研究基金资助项目

摘要 利用弹性动力学中 Boussinesq-Galerkin 一般解, 基于微分算子谱和算子代数理论, 采用了适当的规范条件, 建立了推演厚板结构动力学方程的新途径. 首次给出了考虑横向荷载作用的平板弯曲和拉压振动的两类动力学方程具体形式. 为推导动力学方程方便和利用微分算子谱分解理论, 引进了虚微分算子(id)的概念. 并将本文得到的平板结构振动方程与各种平板结构的弯曲方程作了对比分析. 由于本文推导时没有采用任何工程假设, 因此本文提出的平板动力学方程是精确的, 可用于求解厚壁平板的振动和设计平板振动主动控制策略. 本文为不采用几何方法, 而是采用分析和代数方法精确推导低维结构的动力学支配方程提供了一种统一规范的方法.

关键词 厚板振动的精化理论, 振动的谱分解, 虚偏微分算子, 弯曲和拉压振动支配方程, 规范条件

PACS: 46.40.Cd, 43.40.+s, 02.30.Em, 02.30.Tb, 46.15.Ff

doi: 10.1360/132011-630

平板与梁是典型的低维结构, 不仅在航空航天与土木工程中有应用, 而且在电子元器件和微纳米机械装置中也会遇到. 并且随着现代科技的发展, 此结构还往往在高的减缩频率下工作或操作. 因此, 研究板梁等低维结构的精化动力学建模十分重要. 它直接关系到工程结构或器件的动态力学特性、弹性波散射与动应力集中、运动稳定性与分布参数系统的动力学控制等^[1–4].

20 世纪中叶 Reissner 运用广义余能变分原理推

导了计及剪切变形影响的平板静力学方程^[5], 而后, Mindlin 则考虑了横向剪切变形和转动惯量的影响^[6], 给出了厚板弯曲振动的动力学方程. 胡超等人^[7]基于 Boussinesq-Galerkin 的弹性动力学通解形式和偏微分算子理论, 建立了平板弯曲振动的精确化动力学方程. 此文没有考虑横向荷载对平板结构振动的影响. 厚板理论摒弃了经典薄板理论的基本假设, 采用其他假设基于三维弹性理论对平板力学问题做了研究. 现有的文献资料表明, 对于平板等低维结构, 都

引用格式: 胡超, Ma F, 马兴瑞, 等. 厚板弯曲与拉伸振动精化理论及其求解新途径. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2012, 42: 522–530
Hu C, Ma F, Ma X R, et al. Refined dynamic theory of thick plates in extension-bending and its new formulism (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2012, 42: 522–530, doi: 10.1360/132011-630

要采用一些工程假设, 建立平板结构的振动方程. 例如, 把力学量假设为一个空间坐标的多项式, 挠度沿厚度方向不变和不考虑横向挤压变形等影响. 但是, 研究表明, 若以采用多项式假设, 会导致基本方程之间的不相容.

本文将基于弹性动力学理论, 不做任何工程假设, 利用 Boussinesq-Galerkin 弹性动力学一般解、微分算子方法及其谱理论, 不采用几何投影的方法, 而是采用算子代数推演的方法, 研究建立厚板结构振动精确化方程的新途径. 考虑横向荷载的影响, 分别给出包括平板弯曲和拉压振动的精确化方程.

1 平板弯曲和拉压振动的精确化方程

根据三维弹性动力学理论, 无体力时空间位移场的支配方程即 Navier 方程为^[8,9]

$$\mu_M \nabla_0^2 \mathbf{u} + (\lambda_M + \mu_M) \nabla_0 (\nabla_0 \cdot \mathbf{u}) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

其中 λ_M, μ_M 为材料的 Lamé 常数, $\lambda_M = \frac{\nu E_M}{(1+\nu)(1-2\nu)}$,

$\mu_M = \frac{E_M}{2(1+\nu)}$; E_M, ν 分别为材料的弹性模量和

Poisson 比; ρ 为材料密度; t 为时间; $\nabla_0 = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} +$

$\mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}$ 为三维空间 Hamilton 算子, 相应的 Laplace

算子为 $\nabla_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

关于方程(1), Boussinesq-Galerkin 给出的弹性动力学一般解是^[8,9]

$$\mathbf{u} = 2(1-\nu)(\nabla_0^2 - T_1^2) \mathbf{G} - \nabla_0 (\nabla_0 \cdot \mathbf{G}), \quad (2)$$

式中 $T_j^2 = \frac{1}{c_j^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ($j=1,2$); c_1, c_2 分别为弹性纵波波速和

横波波速, $c_1^2 = \frac{\lambda_M + 2\mu_M}{\rho}$, $c_2^2 = \frac{\mu_M}{\rho}$; $\mathbf{G} = G_1 \mathbf{e}_1 + G_2 \mathbf{e}_2$

$+ G_3 \mathbf{e}_3$ 为 Somigliana 矢量势函数, 且满足如下方程:

$$\prod_{j=1}^2 (\nabla_0^2 - T_j^2) \mathbf{G} = 0. \quad (3)$$

采用数字 1, 2, 3 分别表示坐标 x, y, z . 根据 Taylor 级数展开式, 利用指数函数表示微分算子, 则平板内任意一点的位移可描述为

$$u_k(x, y, z, t) = \exp\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) u_k(x, y, 0, t), \quad (k=1,2,3). \quad (4)$$

在数学分支代数中, 为研究方便和简化问题分析, 引进了虚数的概念^[10]. 在本文中引进虚微分算子的概念, 记为 $i\Box_j = \sqrt{T_j^2 - \nabla^2}$, 其目的是扩展代数分析和偏微分方程谱理论的应用.

根据(4)式和方程(2), 通过分析可得^[11]:

$$\begin{aligned} G_k(x, y, z, t) &= \exp\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) G_k(x, y, 0, t) \\ &= \exp\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) \sum_{j=1}^2 G_k^j(x, y, 0, t) \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^2 \exp(iz\Box_j) g_k^{j1} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\operatorname{Re}(\cdot)$ 表示取实部; $\Box_j^2 = \nabla^2 - T_j^2$ ($j=1,2$) 为 Lorentz 算子; $i\Box_j$ 是引进的虚微分算子; $\mathbf{G} = \mathbf{G}^1 + \mathbf{G}^2$;

$\mathbf{G}^j = \mathbf{G}^{j1} + \mathbf{G}^{j2}$; $\left(\Box_j^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \mathbf{G}^j = 0$; $\left(\frac{\partial}{\partial z} - i\Box_j\right) \mathbf{G}^{j1} = 0$;

$\left(\frac{\partial}{\partial z} + i\Box_j\right) \mathbf{G}^{j2} = 0$; $j=1,2$.

经推导, 可有以下式

$$\begin{aligned} \nabla_0 \cdot \mathbf{G} &= \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^2 \exp(iz\Box_j) \left(\frac{\partial}{\partial x} g_1^{j1} + \frac{\partial}{\partial y} g_2^{j1} + i\Box_j g_3^{j1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

为消除未知函数的不唯一性, 采用如下规范条件,

$$\nabla \cdot \mathbf{g}^{11} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{g}^{21} = 0, \quad (7)$$

式中 $\mathbf{g}^{ji} = g_1^{ji} \mathbf{e}_1 + g_2^{ji} \mathbf{e}_2$, ($i=1,2; j=1,2$). 需要注意的是 g_k^{ji} ($k=1,2$) 是一个复变函数. 于是, 将(7)式代入到(6)式中, 可得到

$$\begin{aligned} \nabla_0 (\nabla_0 \cdot \mathbf{G}) &= -2 \operatorname{Im} \left[\sum_{j=1}^2 \exp(iz\Box_j) \Box_j \frac{\partial g_3^{j1}}{\partial x} \right] \mathbf{e}_1 \\ &\quad - 2 \operatorname{Im} \left[\sum_{j=1}^2 \exp(iz\Box_j) \Box_j \frac{\partial g_3^{j1}}{\partial y} \right] \mathbf{e}_2 \\ &\quad - 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^2 \exp(iz\Box_j) \Box_j^2 g_3^{j1} \right] \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\operatorname{Im}(\cdot)$ 表示取虚部.

由(2)式可得平板结构内振动位移的表达式

$$u_k = 2 \operatorname{Re}[\exp(iz\varpi_2) T_2^2 g_k^{21}] + 2 \operatorname{Im} \left[\sum_{j=1}^2 \exp(iz\varpi_j) \varpi_j \frac{\partial}{\partial x_k} g_3^{j1} \right], \quad (k=1,2), \quad (9a)$$

$$u_3 = 2 \operatorname{Re}[\exp(iz\varpi_2) T_2^2 g_3^{21}] + 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^2 \exp(iz\varpi_j) \varpi_j^2 g_3^{j1} \right]. \quad (9b)$$

平板中面位移和法线转角以及横向正应变的表达式为

$$U_k = u_k|_{z=0} = 2 \operatorname{Re}(T_2^2 g_k^{21}) + 2 \operatorname{Im} \left(\sum_{j=1}^2 \varpi_j \frac{\partial}{\partial x_k} g_3^{j1} \right), \quad (k=1,2),$$

$$W = u_z|_{z=0} = 2 \operatorname{Re}(T_2^2 g_3^{21}) + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^2 \varpi_j^2 g_3^{j1} \right).$$

$$\psi_k = - \frac{\partial u_k}{\partial z} \Big|_{z=0} = 2 \operatorname{Im}(\varpi_2 T_2^2 g_k^{21}) - 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^2 \varpi_j^2 \frac{\partial}{\partial x_k} g_3^{j1} \right), \quad (k=1,2), \quad (10)$$

$$E = \frac{\partial u_z}{\partial z} \Big|_{z=0} = -2 \operatorname{Im}(\varpi_2 T_2^2 g_3^{21}) - 2 \operatorname{Im} \left(\sum_{j=1}^2 \varpi_j^3 g_3^{j1} \right).$$

采用如下形式的中面转角和位移函数分解方法^[7-9,12]

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\partial}{\partial x} F^{(1)} + \frac{\partial}{\partial y} f^{(1)}, \quad \psi_2 = \frac{\partial}{\partial y} F^{(1)} - \frac{\partial}{\partial x} f^{(1)}, \\ U_1 &= \frac{\partial}{\partial x} F^{(2)} + \frac{\partial}{\partial y} f^{(2)}, \quad U_2 = \frac{\partial}{\partial y} F^{(2)} - \frac{\partial}{\partial x} f^{(2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

通过演算推导, 可得到如下关系式

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(g_1^{21}) &= \frac{1}{2} \varpi_2^{-1} T_2^{-2} \frac{\partial}{\partial y} f^{(1)}, \quad \operatorname{Im}(g_2^{21}) = -\frac{1}{2} \varpi_2^{-1} T_2^{-2} \frac{\partial}{\partial x} f^{(1)}, \\ \operatorname{Re}(g_1^{21}) &= \frac{1}{2} T_2^{-2} \frac{\partial}{\partial y} f^{(2)}, \quad \operatorname{Re}(g_2^{21}) = -\frac{1}{2} T_2^{-2} \frac{\partial}{\partial x} f^{(2)}, \\ \operatorname{Re}(g_3^{11}) &= -\frac{1}{2} \varpi_1^{-2} [F^{(1)} + \varpi_2^2 T_2^{-2} (W + F^{(1)})], \\ \operatorname{Re}(g_3^{21}) &= \frac{1}{2} T_2^{-2} (W + F^{(1)}), \\ \operatorname{Im}(g_3^{11}) &= \frac{1}{2} \varpi_1^{-1} [T_1^{-2} (\varpi_1^2 F^{(2)} + E) + F^{(2)}], \\ \operatorname{Im}(g_3^{21}) &= -\frac{1}{2} T_1^{-2} \varpi_2^{-1} (\varpi_1^2 F^{(2)} + E), \end{aligned} \quad (12)$$

其中算子的负指数表示微分算子的逆, 可用 Green 函数的积分表示.

这样, 平板弯曲与拉压振动的总位移表达式为

$$\begin{aligned} u_k &= 2T_2^2 [\cos(z\varpi_2) \operatorname{Re}(g_k^{21}) - \sin(z\varpi_2) \operatorname{Im}(g_k^{21})] \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^2 \varpi_j \frac{\partial}{\partial x_k} [\cos(z\varpi_j) \operatorname{Im}(g_3^{j1}) + \sin(z\varpi_j) \operatorname{Re}(g_3^{j1})], \\ &\quad (k=1,2), \\ u_3 &= 2T_2^2 [\cos(z\varpi_2) \operatorname{Re}(g_3^{21}) - \sin(z\varpi_2) \operatorname{Im}(g_3^{21})] \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^2 \varpi_j^2 [\cos(z\varpi_j) \operatorname{Re}(g_3^{j1}) - \sin(z\varpi_j) \operatorname{Im}(g_3^{j1})]. \end{aligned} \quad (13)$$

根据 Hooke 定律, 可得应力分量表达式

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \mu_M \left\{ -2\varpi_2 T_2^2 [\sin(z\varpi_2) \operatorname{Re}(g_1^{21}) + \cos(z\varpi_2) \operatorname{Im}(g_1^{21})] \right. \\ &\quad - 4 \sum_{j=1}^2 \sin(z\varpi_j) \varpi_j^2 \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im}(g_3^{j1}) \\ &\quad + 4 \sum_{j=1}^2 \cos(z\varpi_j) \varpi_j^2 \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re}(g_3^{j1}) \\ &\quad \left. + 2T_2^2 \left[\cos(z\varpi_2) \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re}(g_3^{21}) - \sin(z\varpi_2) \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im}(g_3^{21}) \right] \right\}, \\ \tau_{zy} &= \mu_M \left\{ -2\varpi_2 T_2^2 [\sin(z\varpi_2) \operatorname{Re}(g_2^{21}) + \cos(z\varpi_2) \operatorname{Im}(g_2^{21})] \right. \\ &\quad - 4 \sum_{j=1}^2 \sin(z\varpi_j) \varpi_j^2 \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im}(g_3^{j1}) \\ &\quad + 4 \sum_{j=1}^2 \cos(z\varpi_j) \varpi_j^2 \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re}(g_3^{j1}) \\ &\quad \left. + 2T_2^2 \left[\cos(z\varpi_2) \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re}(g_3^{21}) - \sin(z\varpi_2) \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im}(g_3^{21}) \right] \right\}, \\ \sigma_z &= 2(\lambda_M + 2\mu_M) \varpi_1 T_1^2 [\cos(z\varpi_1) \operatorname{Im}(g_3^{11}) + \sin(z\varpi_1) \operatorname{Re}(g_3^{11})] \\ &\quad - 4\mu_M \sum_{j=1}^2 \nabla^2 \varpi_j [\cos(z\varpi_j) \operatorname{Im}(g_3^{j1}) + \sin(z\varpi_j) \operatorname{Re}(g_3^{j1})]. \end{aligned} \quad (14)$$

将平板上下表面 ($z = \pm h/2$) 的荷载分解为对称部分和反对称部分. 把平板上下表面剪力为零, 以及正应力的边界条件引入到方程(14)中, 可得如下等式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\left[2 \cos\left(\frac{h}{2} \varpi_1\right) F^{(1)} + 2\varpi_2^2 T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos\left(\frac{h}{2} \varpi_j\right) (W + F^{(1)}) \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(\frac{h}{2} \varpi_2\right) (W + F^{(1)}) \right] \pm \frac{\partial}{\partial x} \left[2\varpi_1 \sin\left(\frac{h}{2} \varpi_1\right) F^{(2)} \right. \\ &\quad \left. + 2T_1^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \varpi_j \sin\left(\frac{h}{2} \varpi_j\right) (\varpi_1^2 F^{(2)} + E) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\kappa} \frac{\sin(\frac{h}{2} \varpi_2)}{\varpi_2} (\varpi_1^2 F^{(2)} + E) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\cos\left(\frac{h}{2} \varpi_2\right) f^{(1)} \pm \varpi_2 \sin\left(\frac{h}{2} \varpi_2\right) f^{(2)} \right], \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left[2 \cos \left(\frac{h}{2} \square_1 \right) F^{(1)} + 2 \square_2^2 T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos \left(\frac{h}{2} \square_j \right) (W + F^{(1)}) - \cos \left(\frac{h}{2} \square_2 \right) (W + F^{(1)}) \right] \\ & \pm \frac{\partial}{\partial y} \left[2 \square_1 \sin \left(\frac{h}{2} \square_1 \right) F^{(2)} + 2 T_1^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \square_j \sin \left(\frac{h}{2} \square_j \right) (\square_1^2 F^{(2)} + E) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\kappa} \frac{\sin(\frac{h}{2} \square_2)}{\square_2} (\square_1^2 F^{(2)} + E) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\cos \left(\frac{h}{2} \square_2 \right) f^{(1)} \pm \square_2 \sin \left(\frac{h}{2} \square_2 \right) f^{(2)} \right], \end{aligned} \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda_M + 2\mu_M) \left\{ -\cos \left(\frac{h}{2} \square_1 \right) [(\square_1^2 F^{(2)} + E) + T_1^2 F^{(2)}] \pm \frac{\sin(\frac{h}{2} \square_1)}{\square_1} [\kappa \square_2^2 (W + F^{(1)}) + T_1^2 F^{(1)}] \right\} \\ & - 2\mu_M \nabla^2 \left[T_1^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos \left(\frac{h}{2} \square_j \right) (\square_1^2 F^{(2)} + E) + \cos \left(\frac{h}{2} \square_1 \right) F^{(2)} \right] \\ & \pm 2\mu_M \nabla^2 \left[\sin \left(\frac{h}{2} \square_1 \right) \square_1^{-1} F^{(1)} + \square_2^2 T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{\sin(\frac{h}{2} \square_j)}{\square_j} (W + F^{(1)}) \right] = \pm \frac{1}{2} q + \frac{1}{2} q, \end{aligned} \quad (16)$$

式中 h 为平板结构的厚度; q 为平板结构承受的横向载荷.

根据复变函数理论, 方程(15)可看成是一个解析函数的实部和虚部所满足的 Cauchy-Riemann^[12]条件, 于是可有

$$\begin{aligned} & 2 \cos \left(\frac{h}{2} \square_1 \right) F^{(1)} + 2 \square_2^2 T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos \left(\frac{h}{2} \square_j \right) (W + F^{(1)}) \\ & - \cos \left(\frac{h}{2} \square_2 \right) (W + F^{(1)}) \pm \left[2 \square_1 \sin \left(\frac{h}{2} \square_1 \right) F^{(2)} \right. \\ & \left. + 2 T_1^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \square_j \sin \left(\frac{h}{2} \square_j \right) (\square_1^2 F^{(2)} + E) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\kappa} \frac{\sin(\frac{h}{2} \square_2)}{\square_2} (\square_1^2 F^{(2)} + E) \right] = 0, \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\cos \left(\frac{h}{2} \square_2 \right) f^{(1)} \pm \square_2 \sin \left(\frac{h}{2} \square_2 \right) f^{(2)} = 0, \quad (17b)$$

$$\text{式中 } \kappa = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}.$$

将平板结构振动分解为对称运动和反对称运动. 例如, 平板弯曲振动属反对称运动情况, 而平板拉伸振动属对称运动情况. 将方程(17)中关于中面的对称和反对称函数分开, 可得如下方程:

$$\begin{aligned} & 2 \cos \left(\frac{h}{2} \square_1 \right) F^{(1)} + 2 \square_2^2 T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos \left(\frac{h}{2} \square_j \right) (W + F^{(1)}) \\ & - \cos \left(\frac{h}{2} \square_2 \right) (W + F^{(1)}) = 0, \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\cos \left(\frac{h}{2} \square_2 \right) f^{(1)} = 0, \quad (18b)$$

$$\begin{aligned} & 2 \square_1 \sin \left(\frac{h}{2} \square_1 \right) F^{(2)} + 2 T_1^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \square_j \sin \left(\frac{h}{2} \square_j \right) (\square_1^2 F^{(2)} + E) \\ & - \frac{1}{\kappa} \frac{\sin(\frac{h}{2} \square_2)}{\square_2} (\square_1^2 F^{(2)} + E) = 0, \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\square_2 \sin \left(\frac{h}{2} \square_2 \right) f^{(2)} = 0. \quad (19b)$$

根据整函数理论, (18b)和(19b)式的余弦函数型和正弦函数型算子可展成如下形式^[7]:

$$\begin{aligned} & \cos \left(\frac{h}{2} \square_2 \right) f^{(1)} = \prod_{m=1}^{\infty} \left[1 - \frac{h^2 \square_2^2}{(2m-1)^2 \pi^2} \right] f^{(1)}, \\ & \square_2 \sin \left(\frac{h}{2} \square_2 \right) f^{(2)} = \square_2 \prod_{m=1}^{\infty} \left[1 - \frac{h^2 \square_2^2}{4m^2 \pi^2} \right] f^{(2)}. \end{aligned} \quad (20)$$

对(20)式的无穷乘积级数进行截断, 可得到 2 个如下形式的 2 阶波动方程:

$$\nabla^2 f^{(1)} - \left(\frac{\pi^2}{h^2} + T_2^2 \right) f^{(1)} = 0, \quad \nabla^2 f^{(2)} - T_2^2 f^{(2)} = 0, \quad (21)$$

(21)式的两个方程分别表示平板弯曲振动和拉压振动的剪切场.

同理, 将方程(16)中关于中面的对称和反对称函数分开, 可得如下方程:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\sin(\frac{h}{2} \square_1)}{\square_1} [\square_2^2 (W + F^{(1)}) + T_2^2 F^{(1)}] + \nabla^2 \left[\frac{\sin(\frac{h}{2} \square_1)}{\square_1} F^{(1)} \right. \\ & \left. + \square_2^2 T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{\sin(\frac{h}{2} \square_j)}{\square_j} (W + F^{(1)}) \right] = \frac{1}{4\mu_M} q, \\ & -\frac{1}{2} \cos \left(\frac{h}{2} \square_1 \right) \left[\frac{1}{\kappa} (\square_1^2 F^{(2)} + E) + T_2^2 F^{(2)} \right] \end{aligned} \quad (22a)$$

$$\begin{aligned}
 & -\nabla^2 \left[T_1^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos\left(\frac{h}{2}\square_j\right) (\square_j^2 F^{(2)} + E) + \cos\left(\frac{h}{2}\square_1\right) F^{(2)} \right] \\
 & = \frac{1}{4\mu_M} q.
 \end{aligned} \quad (22b)$$

根据式(19a)和式(22a), 可得描述平板弯曲振动的横向位移 W 和广义位移势函数 $F^{(1)}$ 的支配方程

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ F^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{q}{4\mu_M} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

其中各算符的表达式为

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos\left(\frac{h}{2}\square_j\right) \nabla^2 \\
 & \quad - \cos\left(\frac{h}{2}\square_1\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{h}{2}\square_2\right), \\
 D_{12} &= T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos\left(\frac{h}{2}\square_j\right) \nabla^2 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{h}{2}\square_2\right), \\
 D_{21} &= T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{\sin(\frac{h}{2}\square_j)}{\square_j} \nabla^2 \nabla^2 - \frac{3}{2} \frac{\sin(\frac{h}{2}\square_1)}{\square_1} \nabla^2 \\
 & \quad + \frac{\sin(\frac{h}{2}\square_2)}{\square_2} \nabla^2 + \frac{1}{2} T_2^2 \frac{\sin(\frac{h}{2}\square_1)}{\square_1}, \\
 D_{22} &= T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{\sin(\frac{h}{2}\square_j)}{\square_j} \nabla^2 \nabla^2 \\
 & \quad - \frac{1}{2} \frac{\sin(\frac{h}{2}\square_1)}{\square_1} \nabla^2 + \frac{\sin(\frac{h}{2}\square_2)}{\square_2} \nabla^2.
 \end{aligned}$$

根据(23)式的算子矩阵行列式, 可得平板横向位移函数 W 满足的方程如下:

$$\begin{aligned}
 \Delta W &= T_2^{-2} \left[\frac{\sin(\frac{h}{2}\square_1)}{\square_1} \cos\left(\frac{h}{2}\square_2\right) - \frac{\sin(\frac{h}{2}\square_2)}{\square_2} \cos\left(\frac{h}{2}\square_1\right) \right] \nabla^2 \nabla^2 W \\
 & \quad - \left[\frac{\sin(\frac{h}{2}\square_1)}{\square_1} \cos\left(\frac{h}{2}\square_2\right) - \frac{\sin(\frac{h}{2}\square_2)}{\square_2} \cos\left(\frac{h}{2}\square_1\right) \right] \nabla^2 W \\
 & \quad + \frac{1}{4} T_2^2 \frac{\sin(\frac{h}{2}\square_1)}{\square_1} \cos\left(\frac{h}{2}\square_2\right) W \\
 & = -\frac{1}{4\mu_M} D_{12} q(x, y, t),
 \end{aligned} \quad (24)$$

其中 Δ 表示微分算子矩阵的行列式, $\Delta = D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21}$.

对应的广义位移函数 $F^{(1)}$ 满足的方程可描述为

$$D_{12} F^{(1)} = -D_{11} W. \quad (25)$$

由方程(24)的无穷算子级数截断后可得平板弯曲振动的支配方程:

$$\begin{aligned}
 & D \nabla^2 \nabla^2 W - (2 - \nu) D T_2^2 \nabla^2 W + C T_2^2 W + \left(\frac{7}{8} - \nu \right) D T_2^4 W \\
 & = q + \frac{3}{4} (1 - \nu) \frac{D}{C} \left(T_2^2 - \frac{2 - \nu}{1 - \nu} \nabla^2 \right) q,
 \end{aligned} \quad (26)$$

式中 C, D 分别表示平板的剪切刚度和抗弯刚度, $C =$

$$\frac{Eh}{2(1 + \nu)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

根据式(19b)和式(22b), 可得描述平板拉压振动的广义位移势函数 E 和 $F^{(2)}$ 满足的支配方程:

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{q}{4\mu_M} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

其中各算符的表达式为

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= 2T_1^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{\sin(\frac{h}{2}\square_j)}{\square_j} \nabla^2 - 2 \frac{\sin(\frac{h}{2}\square_1)}{\square_1} + \frac{1}{\kappa} \frac{\sin(\frac{h}{2}\square_2)}{\square_2}, \\
 D_{12} &= 2T_1^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{\sin(\frac{h}{2}\square_j)}{\square_j} \nabla^2 \square_j^2 + \frac{1}{\kappa} \frac{\sin(\frac{h}{2}\square_2)}{\square_2} \square_2^2, \\
 D_{21} &= T_1^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos\left(\frac{h}{2}\square_j\right) \nabla^2 - \frac{1}{2\kappa} \cos\left(\frac{h}{2}\square_1\right), \\
 D_{22} &= T_1^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos\left(\frac{h}{2}\square_j\right) \nabla^2 \nabla^2 \\
 & \quad - \frac{1}{2\kappa} \cos\left(\frac{h}{2}\square_1\right) \nabla^2 + \cos\left(\frac{h}{2}\square_2\right) \nabla^2.
 \end{aligned}$$

根据(27)式的算子矩阵行列式, 可得横向正应变函数 E 满足的方程如下:

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= 2T_1^{-2} \left[\frac{\sin(\frac{h}{2}\square_1)}{\square_1} \cos\left(\frac{h}{2}\square_2\right) - \frac{\sin(\frac{h}{2}\square_2)}{\square_2} \cos\left(\frac{h}{2}\square_1\right) \right] \nabla^2 \nabla^2 E \\
 & \quad - 2 \left[\frac{\sin(\frac{h}{2}\square_1)}{\square_1} \cos\left(\frac{h}{2}\square_2\right) - \frac{1}{\kappa} \frac{\sin(\frac{h}{2}\square_2)}{\square_2} \cos\left(\frac{h}{2}\square_1\right) \right] \nabla^2 E \\
 & \quad - \frac{1}{2\kappa} \cos\left(\frac{h}{2}\square_1\right) \frac{\sin(\frac{h}{2}\square_2)}{\square_2} T_2^2 E = -\frac{1}{4\mu_M} D_{12} q.
 \end{aligned} \quad (28)$$

对(28)式中的算子级数截断后可得描述平板拉压振动的 4 阶波动方程

$$\begin{aligned}
 & \nabla^2 \nabla^2 E - 12 \left[\frac{1}{h^2} + \frac{2 - \kappa^2}{24(1 - \kappa)} T_2^2 \right] \nabla^2 E \\
 & + \frac{3}{1 - \kappa} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1 + 3\kappa}{24} T_2^2 \right) T_2^2 E
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{16(1-\kappa)\mu_M} \left[2(1-\kappa)\nabla^2 + \frac{24}{h^2} \right] \square_1^2 q. \quad (29)$$

对应的平板拉压静力学方程为

$$\nabla^2 \left(\nabla^2 - \frac{12}{h^2} \right) E = -\frac{1-\nu^2}{2E_M} \left[\frac{2-\nu}{2(1-\nu)} \nabla^2 - \frac{12}{h^2} \right] \nabla^2 q, \quad (30)$$

而广义位移函数 $F^{(2)}$ 满足的方程可描述为

$$D_{12}F^{(2)} = -D_{11}E. \quad (31)$$

本文推导得到的平板弯曲支配方程与各种经典平板理论的弯曲方程的比较参见表 1.

由表 1 可以看出, 本文提出的平板弯曲静力学方程与各种经典平板弯曲理论的支配方程是非常接近的; 当本文动力学方程中略去耦合项和高阶时间导数项后, 其方程就是经典平板弯曲振动方程.

研究平板拉压振动的频散关系. 不失一般性, 考虑无横向载荷时平板拉压问题的稳态解, 设

$$E = \tilde{E}e^{-i\omega t}, F = \tilde{F}e^{-i\omega t}, f = \tilde{f}e^{-i\omega t}. \quad (32)$$

在以下公式推导中略去时间因子和未知势函数上的符号 $\sim$, 于是, 平板拉伸广义位移函数的解为

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 E - 12 \left[\frac{1}{h^2} - \frac{2-\kappa^2}{24(1-\kappa)} k_2^2 \right] \nabla^2 E \\ - \frac{3}{1-\kappa} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1+3\kappa}{24} k_2^2 \right) k_2^2 E = 0, \end{aligned} \quad (33a)$$

$$(\nabla^2 + \alpha_1^2)(\nabla^2 + \alpha_2^2) = 0, \quad (33b)$$

式中 $\alpha_i (i=1,2)$ 是行波波数, 满足方程

$$\begin{aligned} \alpha^4 + 12 \left[\frac{1}{h^2} - \frac{2-\kappa^2}{24(1-\kappa)} k_2^2 \right] \alpha^2 - \frac{3}{1-\kappa} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1+3\kappa}{24} k_2^2 \right) k_2^2 = 0; \\ k_2^2 = \omega^2 / c_2^2. \end{aligned}$$

2 平板振动精化方程的考量与讨论

平板弯曲振动精化方程的考量与讨论, 参见文献[7], 而平板拉伸振动精化方程的分析研究如下.

本文分别基于经典薄板拉伸理论、三维弹性动力学以及本文给出的平板拉伸振动精化动力学方程, 绘出了平板拉压振动的频散关系曲线. 其相应的频散方程如下:

$$\frac{c}{c_2} = \sqrt{\frac{2}{1-\nu}}. \quad (34)$$

基于经典平板拉伸理论得到的纵波波速^[13]

$$\frac{(2c_2^2 - c^2)^2}{4c_2^2 \sqrt{(c_2^2 - \kappa c^2)(c_2^2 - c^2)}} = \frac{\tanh \left[\frac{h}{\lambda} \frac{\pi}{c_2} \sqrt{c_2^2 - \kappa c^2} \right]}{\tanh \left[\frac{h}{\lambda} \frac{\pi}{c_2} \sqrt{c_2^2 - c^2} \right]}. \quad (35)$$

基于三维弹性动力学理论得到的方程^[8]

表 1 各种平板弯曲理论的支配方程的比较

Table 1 A comparison of different theories of plate bending

平板理论的类别	静力学方程	动力学方程
本文提出的理论	$D\nabla^2 \nabla^2 W = q - \frac{2-\nu}{8(1-\nu)} h^2 \nabla^2 q$ $\nabla^2 f - \frac{\pi^2}{h^2} f = 0$	$D\nabla^2 \nabla^2 W - (2-\nu)DT_2^2 \nabla^2 W$ $+ CT_2^2 W + \left(\frac{7}{8} - \nu \right) DT_2^4 W$ $= q + \frac{3}{4}(1-\nu) \frac{D}{C} \left(T_2^2 - \frac{2-\nu}{1-\nu} \nabla^2 \right) q$ $\nabla^2 f - \left(\frac{\pi^2}{h^2} + T_2^2 \right) f = 0$
Lagrange-Germain 平板理论	$D\nabla^2 \nabla^2 W = q$	$D\nabla^2 \nabla^2 W + CT_2^2 W = q$
Reissner 平板理论	$D\nabla^2 \nabla^2 W = q - \frac{2-\nu}{10(1-\nu)} h^2 \nabla^2 q$ $\nabla^2 f - \frac{10}{h^2} f = 0$	
Mindlin 平板理论		Mindlin 板理论是在频域给出的, 与本文理论的比较参见文献[7].
Hencky 平板理论	$D\nabla^2 \nabla^2 W = q - \frac{1}{6(1-\nu)} h^2 \nabla^2 q$	
Panc 平板理论	$D\nabla^2 \nabla^2 W = q - \frac{1}{5(1-\nu)} h^2 \nabla^2 q$	

本文给出的平板拉压精化方程对应的频散关系参见(33b)式.

本文分别基于三维弹性动力学、经典平板拉压振动方程以及本文给出的平板拉伸振动精确化动力学方程, 绘出了平板拉压振动的频散关系. 图 1~4 分别绘出了 Poisson 比为 0.25, 0.30, 0.40 和 0.50 时的频散曲线. 由图 1 和 2 可看到, 当 Poisson 比较小时, 本文给出的精化方程对应的频散曲线与三维弹性动力学得到的频散曲线相差很小; 由图 3 和图 4 可看到, 当 Poisson 比较大时, 本文给出的精化方程对应的频散曲线与三维弹性动力学得到的频散曲线相差变大. 同时, 还可以看到, 经典平板拉压理论的频散关系只是在波长较长时, 也就是低频时与三维弹性动力学

图 1 基于不同板结构动力方程得到的频散曲线($\nu=0.25$)

Figure 1 Dispersion relation by the different theories ($\nu=0.25$).

图 2 基于不同板结构动力方程得到的频散曲线($\nu=0.30$)

Figure 2 Dispersion relation by the different theories ($\nu=0.30$).

图 3 基于不同板结构动力方程得到的频散曲线($\nu=0.40$)

Figure 3 Dispersion relation by the different theories ($\nu=0.40$).

图 4 基于不同板结构动力方程得到的频散曲线($\nu=0.50$)

Figure 4 Dispersion relation by the different theories ($\nu=0.50$).

精确理论一致, 频率较高时相差非常大.

3 结论

在推导平板振动方程时, 完全基于三维弹性动力学理论, 没有采用任何基本假设, 直接采用算子谱理论, 利用解析函数条件等推导得到了精化的平板振动方程. 在具体推导平板振动支配方程时引进了虚微分算子概念, 以采用线性算子谱分解理论, 实现从高维结构降维到低维结构的动力学分析.

在推导平板振动方程时涉及到 6 个未知函数, 为消除未知函数的不唯一性, 采用了 3 个规范条件. 本

文提出的推导平板动力学方程的主要特点是, 不采用几何力学的方法, 而是直接基于弹性动力学方程, 采用算子谱和算子代数的方法, 得到低维结构振动的支配方程. 基于本文提出的推演方法, 可以同时得到平板弯曲振动和拉压振动的支配方程, 为较精确地推导低维结构振动的支配方程提供了一种统一规范的方法.

本文研究的情况属小挠度情况, 弯曲和拉压应力状态可实现解耦求解. 弯曲振动由一个 4 阶波动方程

(26) 和一个 2 阶波动方程(21a)支配. 拉压振动也是由一个 4 阶波动方程(29)和一个 2 阶波动方程(21b)支配.

由于本文振动方程考虑了广义位移函数的局部波动性以及时间的高阶导数, 其动力学分析与振动控制效果更接近于工程实际. 可用于较精确分析低维结构的动力学行为和实施振动主动控制. 本文提出的厚板结构动力学精确化方程, 可望能在航空航天、土木工程以及微机械传感器中板型结构的振动响应和动力学控制中得到应用.

参考文献

- 1 Ma X R, Gou X Y, Li T S, et al. Development generalization of spacecraft dynamics (in Chinese). *J Astronaut*, 2000, 21(3): 1-5 [马兴瑞, 苟兴宇, 李铁寿, 等. 航天器动力学发展概况. *宇航学报*, 2000, 21(3): 1-5]
- 2 Lasiecka I, Triggiani R. *Control Theory for Partial Differential Equations: Continuous and Approximation Theories*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000
- 3 Liu D K, Hu C. Scattering of flexural wave and dynamic stress concentration in Mindlin thick plates. *Acta Mech Sin*, 1996, 12(2): 169-185
- 4 Hu C, Chen T, Han G, et al. Flexural wave propagation and localized vibration in narrow Mindlin's plate. *J Sound Vib*, 2007, 306(3-5): 389-399
- 5 Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *ASME J Appl Mech*, 1945, 12(2): 69-77
- 6 Mindlin R D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *ASME J Appl Mech*, 1951, 18: 31-36
- 7 Hu C, Ma F, Ma X R, et al. Refined dynamic equations of the plate bending without any assumptions (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2011, 41(6): 781-790 [胡超, Ma F, 马兴瑞, 等. 平板弯曲自由振动的精确化动力学方程及其分析. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2011, 41(6): 781-790]
- 8 Eringen A C, Suhubi E S. *Elastodynamics, Volume II Linear Theory*. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975
- 9 Pao Y H, Mao C C. Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations (in Chinese). In: Liu D K, Su X Y, Trans. Beijing: Science Press, 1993. 230-231 [鲍亦兴, 毛昭宙. 弹性波的衍射与动应力. 刘殿魁, 苏先穰, 译. 北京: 科学出版社, 1993. 230-231]
- 10 Nahin P J. 虚数的故事. 朱惠霖, 译. 上海: 上海教育出版社, 2008
- 11 安世全, 孙佑民. 线性算子的谱理论. 北京: 科学出版社, 1995
- 12 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京: 科学出版社, 1981
- 13 杨桂通, 张善元. 弹性动力学. 北京: 中国铁道出版社, 1988

Refined dynamic theory of thick plates in extension-bending and its new formulism

HU Chao^{1,2*}, MA Fai³, MA XingRui⁴ & HUANG WenHu⁴

¹ College of Civil Science and Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225127, China;

² School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China;

³ College of Engineering, University of California, Berkele 94720, USA;

⁴ School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China

In this paper, based on the theory of elastodynamics, applied the general solution proposed by Boussinesq-Galerkin and the operator theory of partial differential equations, the refined equations of elastodynamics of the thick plate including the effect of the transverse loading was obtained by using appropriate gauge conditions. The imaginary differential operator was firstly introduced in order to apply the spectrum decomposition theory of differential operators. The refined dynamic equations of plate bend and stretch were given, respectively. And the refined dynamic theory of thick plates was compared with the different classical theory of plates. Derivation of the dynamic equation was conducted without any priory assumption, so the proposed dynamic equation of plates is exact. The governing equation proposed by this paper can be used to analyze vibration of thick plates, evaluate the applicable condition of the engineering plate theory and exactly to design the active vibration control of thick plates.

refined dynamic theory of thick plates, spectrum decomposition of vibration, imaginary differential operator, dynamical equation of plate bending and stretching, gauge condition

PACS: 46.40.Cd, 43.40.+s, 02.30.Em, 02.30.Tb, 46.15.Ff

doi: 10.1360/132011-630