基于PDE模型的空间柔性曲梁无穷维Kalman滤波器设计

刘福寿^{1,2}, 金栋平^{1*}, 文浩¹

1. 南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京 210016;

2. 南京林业大学土木工程学院, 南京 210037

*联系人, E-mail: jindp@nuaa.edu.cn

收稿日期: 2017-04-06; 接受日期: 2017-06-01; 网络出版日期: 2017-08-28

国家自然科学基金重大项目(编号: 11290153)、装备预研基金资助项目(编号: 6140210010202)和江苏高校优势学科建设工程资助

摘要 状态观测器设计是大型空间结构主动控制设计中的一项重要内容. 由于大型空间结构频率低、模态密集且阻尼小, 传统的基于模态截断模型的观测器设计方法容易导致观测溢出问题. 直接基于结构的偏微分方程(PDE)模型进行状态观测器设计可以避免上述问题, 目前正成为该领域的研究热点. 针对具有弱阻尼的空间柔性曲梁, 对曲梁在悬臂状态下的面内振动进行状态估计. 首先建立考虑剪切变形和转动惯量的曲梁面内振动PDE模型, 并通过变量替换将PDE模型转化为Hilbert空间中的抽象状态方程, 然后基于Kalman滤波理论构建曲梁的无穷维状态观测器模型, 并采用频域下的谱分解方法得到无穷维Kalman滤波器增益函数的解析解. 最后通过数值算例对无穷维Kalman滤波器的观测效果进行了验证, 并揭示了该方法在防止观测溢出方面的有效性.

关键词 柔性曲梁, PDE模型, 状态估计, 观测溢出

PACS: 43.40.+s, 45.80.+r, 46.70.De, 46.15.-x

1 引言

大型空间结构的振动会给航天器定位精度带来严重影响, 甚至可能造成系统发散, 导致毁灭性的灾难^[1]. 对大型空间结构的振动响应进行主动控制是确保其保持正常工作状态的一种有效手段. 由于许多有效的主动控制策略建立在状态反馈基础上, 而结构全部状态量通常无法直接获得, 因此对结构进行准确的状态估计成为主动控制关键环节.

大型柔性空间结构属于典型的分布参数系统, 具有柔性大、阻尼小和模态密集等特点^[2]. 传统的结构状态估计方法主要基于模态截断模型, 即截取系统的有限个低阶模态作为其有限维近似, 然后构建有限维状态观测器估计系统的弹性振动模态^[3]. 这种方法对于模态比较分散且具有一定阻尼的结构, 通常可以获得良好的观测效果. 然而, 对于大型柔性空间结构这样模态密集且阻尼很小的系统, 采用上述方法将不可避免地导致观测溢出的问题^[4].

引用格式: 刘福寿, 金栋平, 文浩. 基于PDE模型的空间柔性曲梁无穷维Kalman滤波器设计. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2017, 47: 104611
Liu F S, Jin D P, Wen H. Infinite-dimensional Kalman filter design for flexible curved beams based on PDE models (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2017, 47: 104611, doi: 10.1360/SSPMA2017-00097

近年来, 直接对柔性结构偏微分方程(PDE)模型进行状态观测器设计得到了越来越多的关注. 许多研究者提出了包括无穷维Kalman滤波器^[5]、无穷维Luenberger型观测器^[6]、鲁棒观测器^[7]、Backstepping方法^[8]等多种PDE模型观测器设计方法. 在这些方法中, 无穷维Kalman滤波方法是经典的有限维Kalman滤波方法在分布参数系统的推广, 具有经典Kalman滤波器的各种优点, 而受到研究人员的青睐^[9]. 但是, 在分布参数系统的无穷维Kalman滤波器设计中, 为了获得滤波器的增益函数, 需要求解一个无穷维的微分算子Riccati方程^[5], 而该方程通常无法解析求解. 为此, 人们采用数值近似方法将算子Riccati方程转化为代数方程进行求解, 而为了获得收敛的数值解, 通常转化后的代数Riccati方程具有相当高的维数, 并且需要迭代求解^[10,11]. 与上述方法不同, Davis^[12,13]推导出了在频域内基于谱分解方法的分布参数系统Kalman滤波器增益函数的解析计算公式, 避免了求解算子Riccati方程带来的困难. 尽管Davis对于一般形式的分布参数系统, 从数学上得到了无穷维Kalman滤波器增益函数的解析公式, 但是在工程上, 目前还未有成功的应用.

柔性曲梁是工程中广泛应用的一种结构构件, 在航天器结构中, 主要用作大型卫星天线的支撑构件^[14]. 由于曲率的影响, 导致曲梁的弯曲、扭转、剪切以及轴向变形耦合, 动力学方程复杂, 给基于PDE模型的观测器设计增加了很大困难. 本文以一个具有弱阻尼的空间柔性曲梁为研究对象, 考虑曲梁在悬臂状态下作面内振动. 首先建立曲梁的偏微分运动方程模型, 然后采用Davis提出的频域谱分解方法设计曲梁的无穷维Kalman滤波器, 并求得滤波器增益函数的收敛解, 最后通过观测曲梁自由端的切向速度, 估计出整个曲梁上各个点处的状态量(速度和应变分量).

2 曲梁运动方程

考虑半径为 R , 圆心角为 θ_0 的等截面圆弧型曲梁, 曲梁轴线上任一点 C 的坐标采用原点建立在曲梁圆心处的极坐标系来表示. 另外, 为了描述 C 点的运动, 在 C 点处建立笛卡尔局部坐标系, 其中 x 轴沿着圆弧的切线方向, y 轴沿着径向且指向圆心, 如图1所示.

考虑曲梁的剪切变形, 在图1所示的局部坐标系下曲梁的变形-几何关系为^[15]

图1 曲梁模型及其坐标系定义

Figure 1 Curved beam model and its coordinate systems.

$$\varepsilon = \frac{u'_x - u_y}{R}, \gamma = \frac{u_x + u'_y - R\varphi_z}{R}, \kappa = \frac{\varphi'_z}{R}, \quad (1)$$

其中, u_x, u_y 和 φ_z 分别为曲梁微元在局部坐标系下的位移和转角, ε, γ 和 κ 分别为曲梁的轴向应变、剪切应变以及曲率的改变量, 右上标“ $'$ ”表示对坐标 θ 的导数.

同时, 考虑曲梁截面的转动惯量, 则曲梁的面内振动方程可以表示为^[16]

$$\begin{aligned} \frac{EA}{R^2}(u''_x - u'_y) - \frac{kGA}{R^2}(u_x + u'_y - R\varphi_z) \\ - c_1 \dot{u}_x + q_x = \rho A \ddot{u}_x, \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \frac{kGA}{R^2}(u'_x + u''_y - R\varphi'_z) + \frac{EA}{R^2}(u'_x - u_y) \\ - c_2 \dot{u}_y + q_y = \rho A \ddot{u}_y, \end{aligned} \quad (2b)$$

$$\frac{EI}{R^2}\varphi''_z + \frac{kGA}{R}(u_x + u'_y - R\varphi_z) - c_3 \dot{\varphi}_z + m_z = J \ddot{\varphi}_z, \quad (2c)$$

式中, EA, kGA 和 EI 分别为曲梁的拉伸、剪切和弯曲刚度, ρA 和 J 分别为曲梁单位长度的质量和转动惯量, q_x, q_y 和 m_z 分别为曲梁上作用的分布力和分布力矩, c_1, c_2 和 c_3 分别为曲梁微元沿局部坐标系 x 轴、 y 轴运动及绕 z 轴转动的等效黏性阻尼系数, 上标“ $\cdot$ ”表示对时间 t 的导数.

考虑曲梁一端固支另一端自由的情况, 则其边界条件为

$$u_x(t, 0) = u_y(t, 0) = \varphi_z(t, 0) = 0, \quad (3a)$$

$$N(t, \theta_0) = Q(t, \theta_0) = M(t, \theta_0) = 0, \quad (3b)$$

其中, N, Q 和 M 分别为曲梁的轴力、剪力和弯矩, 即

$$N = EA\varepsilon, Q = kGA\gamma, M = EI\kappa. \quad (4)$$

3 基于PDE模型的曲梁Kalman滤波器设计

为对曲梁的PDE模型进行Kalman滤波器设计,首先将式(2)中的二阶偏微分方程组转化为状态方程形式. 为此, 引入新的变量

$$v_1 = \dot{u}_x, \quad v_2 = \dot{u}_y, \quad v_3 = \dot{\varphi}_z, \quad (5)$$

$$\eta_1 = \frac{u'_x - u_y}{R}, \quad \eta_2 = \frac{u_x + u'_y - R\varphi_z}{R}, \quad \eta_3 = \frac{\varphi'_z}{R},$$

式中, v_1, v_2 和 v_3 为曲梁的速度分量, η_1, η_2 和 η_3 为曲梁的应变分量. 将式(5)代入到式(2), 可以将式(2)表示的曲梁运动方程转化为标准的一阶双曲型方程组. 进一步, 定义Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 上的状态向量

$$\mathbf{x}(t, \theta) = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ \eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3]^T. \quad (6)$$

最终可以将曲梁的运动方程表示为如下Hilbert空间上的抽象状态方程形式

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t, \theta)}{\partial t} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t, \theta) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (7)$$

其中, $\mathbf{A}$ 为系统的微分算子矩阵, $\mathbf{B}$ 为系统的控制算子, $\mathbf{u}(t)$ 为系统的控制输入向量, 满足

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{c_1}{\rho A} & 0 & 0 & \frac{EA}{\rho AR} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{kGA}{\rho AR} & 0 \\ 0 & -\frac{c_2}{\rho A} & 0 & \frac{EA}{\rho AR} & \frac{kGA}{\rho AR} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c_3}{J} & 0 & \frac{kGA}{J} & \frac{EI}{JR} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \frac{q_x}{\rho A} & \frac{q_y}{\rho A} & \frac{m_z}{J} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

相应地, 采用状态向量 $\mathbf{x}$ 将曲梁的边界条件和初始条件表示为

$$\Sigma_0 \mathbf{x}(t, 0) + \Sigma_1 \mathbf{x}(t, \theta_0) = \mathbf{0} \quad (8)$$

和

$$\mathbf{x}(0, \theta) = \mathbf{x}^0(\theta), \quad (9)$$

其中, Σ_0 和 Σ_1 是系统的边界选择矩阵, 由具体的边界条件确定. 对于式(3)表示的曲梁边界条件, 可以得到

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

考虑在实际对曲梁进行状态观测时, 系统中存在干扰和观测噪声, 则系统的状态方程和输出方程为

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t, \theta)}{\partial t} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t, \theta) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_d \mathbf{w}(t), \quad (10a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t, \theta) + \mathbf{v}(t), \quad (10b)$$

其中, $\mathbf{w}(t)$ 为系统的干扰, $\mathbf{v}(t)$ 为观测噪声, $\mathbf{y}(t)$ 为系统的输出, $\mathbf{B}_d$ 为干扰输入算子, $\mathbf{C}$ 为系统的输出算子.

构建系统(10)的观测器模型为

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(t, \theta)}{\partial t} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t, \theta) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}[\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t, \theta)], \quad (11)$$

其中, $\hat{\mathbf{x}}$ 为系统状态向量 $\mathbf{x}$ 的估计值, $\mathbf{L}$ 为状态观测器的反馈增益. 由于在对系统进行状态估计时, 系统的初始状态通常未知, 因此将观测器模型的初始状态设为零, 则其边界条件和初始条件分别表示为

$$\Sigma_0 \hat{\mathbf{x}}(t, 0) + \Sigma_1 \hat{\mathbf{x}}(t, \theta_0) = \mathbf{0} \quad (12)$$

和

$$\hat{\mathbf{x}}(0, \theta) = \mathbf{0}. \quad (13)$$

假设系统(10)中的干扰 $\mathbf{w}$ 和观测噪声 $\mathbf{v}$ 是互不相关的零均值高斯白噪声, 并且其方差分别为 $\mathbf{Q}_d$ 和 $\mathbf{R}_n$, 则可以采用Kalman滤波理论设计系统的状态观测器, 定义如下性能泛函

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} E(\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2), \quad (14)$$

其中, 运算符 $E(\cdot)$ 代表求数学期望值, $\|\cdot\|$ 是Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 上的范数, 定义为

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\int_0^{\theta_0} \mathbf{x}^T \mathbf{x} d\theta}, \quad (15)$$

使性能泛函 J 取值最小, 可得无穷维Kalman滤波器的反馈增益为^[5]

$$\mathbf{L} = \mathbf{P}\mathbf{C}^*\mathbf{R}_n^{-1}, \quad (16)$$

其中, $\mathbf{C}^*$ 表示算子 $\mathbf{C}$ 的伴随算子, 算子 $\mathbf{P}$ 满足如下算子Riccati方程

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^* - \mathbf{P}\mathbf{C}^*\mathbf{R}_n^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P} + \mathbf{B}_d\mathbf{Q}_d\mathbf{B}_d^* = 0. \quad (17)$$

上述算子Riccati方程难以求得解析解. 采用Davis提出的频域下基于谱分解方法的无穷维Kalman滤波器增益函数求解方法, 可以得到^[12,13]

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}(\mathrm{i}\omega; \mathbf{A})\mathbf{B}_d\mathbf{Q}_d\mathbf{G}_d^*(\mathrm{i}\omega)[\mathbf{F}^-(\omega)]^{-1}d\omega \cdot \mathbf{R}_n^{-1}, \quad (18)$$

式中, $\mathbf{R}(\mathrm{i}\omega; \mathbf{A})$ 为算子矩阵 $\mathbf{A}$ 的预解算子. 对于式(10)为一阶双曲的情况, 预解算子的求解方法可见文献^[16], 其中,

$$\mathbf{G}_d(\mathrm{i}\omega) = \mathbf{C}\mathbf{R}(\mathrm{i}\omega; \mathbf{A})\mathbf{B}_d \quad (19)$$

是从扰动到输出的传递函数矩阵, $\mathbf{F}^-(\omega)$ 称为谱因子, 由下列谱分解方法得到

$$\mathbf{H}(\mathrm{i}\omega) = \mathbf{R}_n + \mathbf{G}_d(\mathrm{i}\omega)\mathbf{Q}_d\mathbf{G}_d^*(\mathrm{i}\omega) = \mathbf{F}^+(\omega)\mathbf{R}_n\mathbf{F}^-(\omega), \quad (20)$$

式中, $\mathbf{H}(\mathrm{i}\omega)$ 称为观测功率谱密度.

4 数值算例

为验证上述观测器设计方法的正确性, 以一个半径 $R=3$ m, 圆心角 $\theta_0 = 2\pi/3$ 的悬臂曲梁为例进行状态估计. 曲梁刚度和质量分别为: $EA=1.0 \times 10^5$ Pa m², $kGA=1.0 \times 10^4$ Pa m², $EI=5.0 \times 10^3$ Pa m⁴, $\rho A=0.5$ kg/m, $J=0.01$ kg m. 考虑曲梁具有微弱的内阻尼, 假设其各阶模态阻尼比均为 $\zeta=0.001$, 则可以得到曲梁等效黏性阻尼系数为 $c_1 = c_2 = 2\rho A\omega\zeta$, $c_3 = 2J\omega\zeta$, 其中 ω 为曲梁的固有振动频率^[17]. 假设曲梁自由端作用有沿径向的扰动力, 观测曲梁自由端的切向速度, 扰动和噪声的方差分别设为 $\mathbf{Q}_d = 1$ 和 $\mathbf{R}_n = 0.001$.

首先由式(19)计算得到曲梁由边界扰动到输出的传递函数 $\mathbf{G}_d$ (本例中 $\mathbf{G}_d$ 为一标量函数). 为验证其准确性, 另外采用有限元方法计算曲梁的模态, 然后利用模态叠加法求解该传递函数, 两者比较结果如图2所示. 从图2可以看出, 采用本文PDE模型与有限元模型

计算得到的传递函数十分吻合, 从而验证了本文曲梁PDE模型和传递函数计算的正确性.

将传递函数 $\mathbf{G}_d$ 代入式(20)计算得到系统的观测功率谱密度 $\mathbf{H}(\mathrm{i}\omega)$, 如图3所示. 从图3可以看出, 随着曲梁固有振动频率 ω 增大, $\mathbf{H}(\mathrm{i}\omega)$ 的值逐渐减小, 当 ω 达到3000 rad/s时, $\mathbf{H}(\mathrm{i}\omega)$ 接近为零. 通过分析可知, 观测功率谱密度 $\mathbf{H}(\mathrm{i}\omega)$ 随频率增大而衰减是由于系统中存在一定阻尼的原因.

采用文献^[18]提出的谱分解算法对 $\mathbf{H}(\mathrm{i}\omega)$ 进行谱分解得到谱因子 $\mathbf{F}^-(\omega)$, 然后利用式(18), 在频率内进行数值积分便可以计算出曲梁无穷维Kalman滤波器的增益函数. 注意到式(18)中积分区间是从 $-\infty$ 到 $+\infty$, 在实际计算时, 由于阻尼的作用, 被积函数随着频率增大而衰减, 因此在数值积分时取一个足够大的有限频率

图2 (网络版彩图) 曲梁由扰动到输出的传递函数
Figure 2 (Color online) Transfer function of the curved beam from the disturbance to the output.

图3 (网络版彩图) 观测功率谱密度 $H(\mathrm{i}\omega)$
Figure 3 (Color online) The observation power spectral density $H(\mathrm{i}\omega)$.

图4 (网络版彩图) 曲梁Kalman滤波器的增益函数. (a) 状态变量 v_1 的增益函数; (b) 状态变量 η_1 的增益函数

Figure 4 (Color online) Gain function of the Kalman filter for the curved beam. (a) Gain function for state variable v_1 ; (b) gain function for state variable η_1 .

区间 $[-\omega_0, \omega_0]$, 便可以得到增益函数的收敛解. 图4所示为 ω_0 取不同值时得到的状态变量 v_1 和 η_1 的增益函数. 从图4可见, 当 ω_0 达到3000 rad/s时, 增益函数趋于收敛. 因此, 本文将 $\omega_0 = 3000$ rad/s时计算得到的增益函数值作为曲梁无穷维Kalman滤波器增益函数的收敛解.

为了验证观测器的效果, 假设曲梁初始状态为第1阶模态具有单位模态速度, 并且自由端受到沿径向的简谐力 $Q_y = 2\sin(2\pi \cdot 5t)$ 和随机扰动 $\mathbf{w}(t)$ 的共同作用, 采用有限差分法求解曲梁的状态方程(10(a))得到真实的动态响应. 由于曲梁的等效黏性阻尼系数是频变的, 在时域方程中难以求解, 考虑到该阻尼系数值很小, 因此在求解动力响应时忽略了阻尼项. 由式(10(b))得到的曲梁输出响应如图5所示.

将曲梁的输出 $\mathbf{y}(t)$ 代入到观测器模型(11), 采用有

图5 (网络版彩图) 曲梁的输出响应

Figure 5 (Color online) Output of the curved beam.

限差分法对式(11)进行求解, 便可实现对曲梁的状态估计. 图6所示为曲梁自由端切向速度和固支端轴向应变的估计结果. 从图6中可以看出, 从0.5 s开始, 估计值和真实值吻合很好, 表明本文设计的无穷维Kalman滤波器具有良好的状态观测效果.

为了说明基于PDE模型的无穷维Kalman滤波器在防止观测溢出方面的效果, 假设曲梁初始状态为前5阶模态都具有单位模态速度, 不考虑输入干扰和观测噪声, 分别取 $\omega_0 = 3000$ rad/s和 $\omega_0 = 175$ rad/s (仅包含曲梁前4阶模态所在的频段)设计两种Kalman滤波器, 其中取 $\omega_0 = 3000$ rad/s得到的滤波器是PDE模型收敛的无穷维滤波器, $\omega_0 = 175$ rad/s得到的滤波器相当于前4阶模态截断模型得到的有限维滤波器. 两种滤波器得到的曲梁自由端切向速度的估计结果如图7所示. 从图7中可以看出, 采用无穷维滤波器进行状态估计时, 无观测溢出产生, 而采用模态截断得到的滤波器进行状态估计时, 产生了明显的观测溢出现象. 值得指出的是, 这里以曲梁的前5阶模态振动为例, 揭示了无穷维Kalman滤波器在防止观测溢出方面的作用. 实际上, 不论曲梁发生多少阶模态的振动, 采用无穷维Kalman滤波器进行状态观测均不会产生观测溢出.

5 结论

本文研究了大型柔性空间结构PDE模型的状态估计问题. 以具有弱阻尼的空间柔性曲梁为研究对象, 基于曲梁的PDE模型设计了无穷维Kalman滤波器, 并

图6 (网络版彩图) 曲梁无穷维Kalman滤波器的状态估计效果. (a) 曲梁自由端切向速度; (b) 曲梁固支端轴向应变

Figure 6 (Color online) State estimation effect of the infinite-dimensional Kalman filter for the curved beam. (a) The tangential velocity at the free end of the curved beam; (b) the axial strain at the clamped end of the curved beam.

图7 (网络版彩图) 曲梁前5阶模态振动的状态估计. (a) 采用 $\omega_0=3000$ rad/s得到的滤波器; (b) 采用 $\omega_0=175$ rad/s得到的滤波器

采用频域下的谱分解方法给出了滤波器增益函数的解析解. 数值结果表明, 采用本文方法得到的无穷维

Kalman滤波器增益函数的收敛解能够对PDE模型进行准确的状态估计, 并且能够防止观测溢出的产生.

参考文献

- Li D, Jiang J, Liu W, et al. A new mechanism for the vibration control of large flexible space structures with embedded smart devices. *IEEE/ASME Trans Mechatron*, 2015, 20: 1653–1659
- Perez J A, Pittet C, Alazard D, et al. Integrated control/structure design of a large space structure using structured H_∞ control. *IFAC-PapersOnLine*, 2016, 49: 302–307
- Jin Y Q, Liu X D, Wang W, et al. Sliding mode attitude control for flexible spacecraft based on modal observer (in Chinese). *J Astronaut*, 2008, 29: 844–848 [靳永强, 刘向东, 王伟, 等. 基于模态观测器的挠性航天器姿态控制. *宇航学报*, 2008, 29: 844–848]
- Kim M H, Inman D J. Reduction of observation spillover in vibration suppression using a sliding mode observer. *J Vib Control*, 2001, 7: 1087–1105
- Zhang M X. Infinite-dimensional Kalman Filtering and Sensor Placement Problem. Dissertation for Master's Degree. Waterloo: University of Waterloo, 2016
- Li X D, Xu C Z. Infinite-dimensional Luenberger-like observers for a rotating body-beam system. *Syst Control Lett*, 2011, 60: 138–145
- Jiang T, Liu J, He W. A robust observer design for a flexible manipulator based on a PDE model. *J Vib Control*, 2017, 23: 871–882

- 8 Krstic M, Siranosian A A, Smyshlyaev A. Backstepping boundary controllers and observers for the slender timoshenko beam: Part I-design. In: Proceedings of the 2006 American Control Conference. New York: IEEE, 2006. 2412–2417
- 9 Bensoussan A. Some remarks on linear filtering theory for infinite dimensional systems. In: Rantzer A, Byrnes C I, eds. Directions in Mathematical Systems Theory and Optimization. Berlin: Springer, 2003. 27–39
- 10 Burns J A, Sachs E W, Zietsman L. Mesh independence of kleinman–newton iterations for riccati equations in Hilbert space. *SIAM J Control Optim*, 2008, 47: 2663–2692
- 11 Morris K, Navasca C. Approximation of low rank solutions for linear quadratic control of partial differential equations. *Comput Optim Appl*, 2010, 46: 93–111
- 12 Davis J H. A distributed filter derivation without riccati equations. *SIAM J Control Optim*, 1978, 16: 584–592
- 13 Davis J H. Foundations of Deterministic and Stochastic Control. New York: Springer Science+ Business Media, 2002
- 14 Pan K Q, Liu J Y. Review and prospect of researches on flexible curved beam systems (in Chinese). *Adv Mech*, 2011, 41: 711–721 [潘科琪, 刘锦阳. 柔性曲梁多体系统的研究现状和展望. *力学进展*, 2011, 41: 711–721]
- 15 Rao S S. Vibration of Continuous Systems. Hoboken: John Wiley & Sons, 2007. 396–402
- 16 Liu F, Jin D, Wen H. Optimal vibration control of curved beams using distributed parameter models. *J Sound Vib*, 2016, 384: 15–27
- 17 Soedel W. Vibrations of Shells and Plates. 3rd ed. New York: Marcel Dekker, 2004. 381–384
- 18 Bennett W H, Yan I. A computer algorithm for causal spectral factorization. In: Proceedings of the IEEE 1988 National Aerospace and Electronics Conference. New York: IEEE, 1988. 388–395

Infinite-dimensional Kalman filter design for flexible curved beams based on PDE models

LIU FuShou^{1,2}, JIN DongPing^{1*} & WEN Hao¹

¹ State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;

² School of Civil Engineering, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China

State observer design is a crucial step in active vibration control of large flexible space structures (LFSSs). Since the LFSSs often have lower natural frequencies, high modal density and low damping, the traditional observer design methods which use the modal truncation model are easily leading to the problem of observation spillover. Instead, the approaches directly using the partial differential equation (PDE) models of flexible structures can avoid the spillover problem, and are becoming the hotspot of research in this field. The presented research aimed at the flexible curved beams which are often used as support components in space antennas, and designed the infinite dimensional state observer for the in-plane vibration of cantilevered curved beams with weakly internal damping based on the theory of Kalman filtering. Firstly, a second order PDEs model for the in-plane vibration of the curved beam is established which considers the shear deformation and rotary inertia of the curved beam simultaneously, then by using the variable substitution method, the second order PDEs model is reduced to first order and transformed to an abstract state space model (SSM) in Hilbert space. The infinite-dimensional Kalman filter for the curved beam is designed using the SSM, and the explicit formula for the feedback gain operators of the Kalman filter are obtained based on the spectral factorization method in frequency domain. Finally, a numerical example is carried out to validate the effect of the presented infinite dimensional Kalman filter design method, and to reveal the effectiveness of the method on preventing the observation spillover.

flexible curved beams, PDE models, state estimation, observation spillover

PACS: 43.40.+s, 45.80.+r, 46.70.De, 46.15.-x

doi: [10.1360/SSPMA2017-00097](https://doi.org/10.1360/SSPMA2017-00097)