修正非线性 Schrödinger 方程的变号解

献给林群教授 80 华诞

刘嘉荃^①, 刘祥清^{②*}, 王志强^{③④}

① 北京大学数学科学学院, 北京 100871;

② 云南师范大学数学学院, 昆明 650500;

③ 南开大学陈省身数学所, 天津 300071;

④ Department of Mathematics and Statistics, Utah State University, Logan, UT 84322, USA

E-mail: jiaquan@math.pku.edu.cn, lxq8u8@163.com, zhi-qiang.wang@usu.edu

收稿日期: 2014-08-22; 接受日期: 2014-12-19; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11171171, 11271331, 11361077 和 11271201) 和联大青年学者培养资助项目

摘要 本文考虑下列修正非线性 Schrödinger 方程:

$$\begin{cases} \Delta u + \frac{1}{2}u\Delta u^2 - V(x)u + \lambda|u|^{p-2}u = 0, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x) \rightarrow 0, & x \rightarrow \infty. \end{cases}$$

此方程出现在数学物理的一些模型中, 数学上也有很多讨论. 形式上方程有变分结构, 但是很难找到合适的工作空间使得相应的泛函同时具有光滑性和满足紧性条件. 本文引入 p -Laplace 项扰动, 扰动问题的解作为原问题的近似解, 并得到适当的估计, 从而转向极限后得到原问题的解. 本文证明方程有无穷多变号解满足积分约束 $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1$, 这时方程中常数 λ 作为 Lagrange 乘子出现.

关键词 修正非线性 Schrödinger 方程 积分约束 变号解 扰动方法

MSC (2010) 主题分类 35B05, 35B45

1 引言

本文讨论修正的非线性 Schrödinger 方程

$$\begin{cases} \Delta u + \frac{1}{2}u\Delta u^2 - V(x)u + \lambda|u|^{p-2}u = 0, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x) \rightarrow 0, & x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.1)$$

方程 (1.1) 出现在数学物理的一些模型中, 参见文献 [1–5], 近年来, 在数学上也有许多研究. 这种问题有两种提法: 或者固定参数, 如 $\lambda = 1$; 或者要求解满足一定的约束条件, 如 $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1$, 这时 λ 是未知的 Lagrange 乘子.

对于固定 λ 的无约束问题已有很多处理方法和结果. 例如, Liu 等人^[6] 利用 Nehari 方法证明多解存在性. 文献 [7, 8] 利用变量代换将拟线性方程 (1.1) 转化为半线性方程加以研究. 最近, Liu 等人^[9]

提出用扰动方法考虑拟线性方程 (1.1), 特别地, Liu 和 Wang^[10] 证明了无穷多解的存在性, 推广了 Cerami 等人^[11] 关于半线性方程的相应结果.

对于带约束问题, 文献 [12, 13] 利用极小化方法证明正解的存在性. 最近, Xiong 和 Liu^[14] 利用二重约束下极小化方法证明了变号解的存在性. 本文的目的与文献 [10] 一样, 利用扰动方法证明下列带约束问题:

$$\begin{cases} \Delta u + \frac{1}{2}u\Delta u^2 - V(x)u + \lambda|u|^{p-2}u = 0, & x \in \mathbb{R}^N, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1, & u(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1.2)$$

有无穷多变号解, 其中 $4 < p < \frac{4N}{N-2}$, V 是位势函数. 关于 V 作下列假设:

(V₁) $V \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$;

(V₂) $V \geq m > 0$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = V_\infty < +\infty$;

(V₃) 对任何 $\eta > 0$, 有 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \vec{x} \cdot DV(x)e^{\eta|x|} = +\infty$, 其中 $\vec{x} = \frac{x}{|x|}$;

(V₄) 存在 $\bar{c} > 1$, 使得 $|DV(x)| \leq \bar{c}\vec{x} \cdot DV(x)$, 当 $|x| \geq \bar{c}$.

本文主要定理如下:

定理 1.1 设 $4 < p < \frac{4N}{N-2}$, 条件 (V₁)–(V₄) 成立, 那么, 问题 (1.2) 有无穷多变号解.

形式上问题 (1.2) 有变分结构, 相应泛函是

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) |Du|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx,$$

其中 u 满足约束条件 $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1$. 由于很难找到合适的空间使得 I 同时具有光滑性和满足一定的紧性条件, 按 Liu 等人^[9] 的处理方法, 我们引进扰动泛函

$$\begin{aligned} I_\mu(u) &= \frac{1}{4} \mu \int_{\mathbb{R}^N} (|Du|^4 + u^4) dx + I(u) \\ &= \frac{1}{4} \mu \int_{\mathbb{R}^N} (|Du|^4 + u^4) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) |Du|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx, \end{aligned}$$

其中参数 $\mu \in (0, 1]$, $u \in W^{1,4}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$ 且满足约束 $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1$. I_μ 是 C^1 -泛函. 本文的想法是, 首先证明 I_μ 的临界点的存在性, 然后对这些临界点建立适当的估计, 从而当 $\mu \rightarrow 0$ 时转向极限得到原来问题的解. 由于我们考虑的是全空间上的问题, 即使对于光滑泛函 I_μ 仍然有一个紧性问题. Cerami 等人^[11] 用有界区域上相应问题的解作为逼近解, 本文采用一个略有不同的方法, 即在泛函 I_μ 上再加上一个强制位势项, 这样修正后的问题具有紧性. 具体而言, 对 $\varepsilon > 0$, 我们引入泛函

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon,\mu}(u) &= I_\mu(u) + \frac{1}{2} \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} W(x) u^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \mu \int_{\mathbb{R}^N} (|Du|^4 + u^4) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) |Du|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\varepsilon W(x) + V(x)) u^2 dx, \end{aligned}$$

其中强制位势 $W(x) \rightarrow +\infty$, 当 $|x| \rightarrow \infty$ 时. 泛函 $I_{\varepsilon,\mu}$ 是适当空间上的 C^1 -泛函, 且满足 Palais-Smale (简称 (PS)) 条件. 对于 $I_{\varepsilon,\mu}$ 可以用通常的临界点存在定理. 例如, 对称山路引理^[15] 证明了无穷多解存在性. 泛函 $I_{\varepsilon,\mu}$ 的临界点将作为原来问题 (1.2) 的逼近解.

本文中的 $|\cdot|_s$ 表示 $L^s(\mathbb{R}^N)$ 的范数, 而以 $\|\cdot\|$ 表示所用工作空间的范数. $\rightarrow$ 和 $\rightharpoonup$ 分别表示强收敛和弱收敛.

本文安排如下: 第 2 节考虑带强制位势的问题, 证明存在无穷多变号解; 第 3 节考虑在原来问题上加强制位势后的扰动问题, 并对逼近解建立合适的估计以证明定理 1.1; 第 4 节是结论与展望.

2 强制位势问题

本节考虑带有强制位势的问题. 我们寻求 $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 满足方程

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} (1+u^2) Du D\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} u |Du|^2 \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} W(x) u \varphi dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u \varphi dx, \\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 λ 是未知的 Lagrange 乘子. 对于位势 W 作下列假设:

(W₁) $W \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $W(x) \geq m > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$;

(W₂) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} W(x) = +\infty$.

定理 2.1 设 $4 < p < \frac{4N}{N-2}$, 条件 (W₁) 和 (W₂) 成立, 则问题 (2.1) 有无穷多变号解属于 $H^1_W(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, 其中 $H^1_W(\mathbb{R}^N)$ 是 Hilbert 空间:

$$H^1_W(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \mid u \in H^1(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} W(x) u^2 dx < +\infty \right\},$$

$H^1_W(\mathbb{R}^N)$ 中内积定义为

$$(u, v)_{H^1_W(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} (Du Dv + W(x) uv) dx.$$

形式上问题 (2.1) 具有变分结构, 相应泛函是

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1+u^2) |Du|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} W(x) u^2 dx,$$

u 满足约束条件 $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1$. 按照引言中所说, 我们引进扰动泛函 J_μ , $\mu \in (0, 1]$:

$$\begin{aligned} J_\mu(u) &= \frac{1}{4} \mu \int_{\mathbb{R}^N} (|Du|^4 + u^4) dx + J(u) \\ &= \frac{1}{4} \mu \int_{\mathbb{R}^N} (|Du|^4 + u^4) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1+u^2) |Du|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} W(x) u^2 dx, \end{aligned}$$

J_μ 定义在 $X = W^{1,4}(\mathbb{R}^N) \cap H^1_W(\mathbb{R}^N)$ 上. 考虑 X 中集合 M ,

$$M = \left\{ u \mid u \in X, \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1 \right\},$$

M 是 X 中的 C^2 -流形. 在 M 上考虑泛函 J_μ . 我们称 $u \in M$ 是 J_μ 限制在 M 上的临界点, 并记作 $DJ_\mu(u) = 0$, 如果 $\langle J'_\mu(u), \varphi \rangle = 0$ 对一切 $\varphi \in T_u M$ 成立, 其中 J'_μ 是 J_μ 作为 X 上泛函的导数, 而 $T_u M$ 是 M 在 u 处的切空间:

$$T_u M = \left\{ \varphi \mid \varphi \in X, \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u \varphi dx = 0 \right\}.$$

$u \in M$ 是 J_μ 限制在 M 上的临界点, 等价于存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得

$$\langle J'_\mu(u), \varphi \rangle = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u \varphi dx, \quad \forall \varphi \in X,$$

其中 $\lambda = \langle J'_\mu(u), u \rangle$, 即 u 是下列问题:

$$\begin{cases} \mu \int_{\mathbb{R}^N} (|Du|^2 Du D\varphi + u^3 \varphi) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) Du D\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} u |Du|^2 \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} W(x) u \varphi dx \\ = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u \varphi dx, \quad \forall \varphi \in X, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

的解, 其中 λ 是未知的 Lagrange 乘子.

引理 2.1 J_μ 是 X 上的 C^1 -泛函. J_μ 限制在 M 上满足 (PS) 条件, 即如果 $\{u_n\} \subset M$, $J_\mu(u_n) \leq c$, $\|DJ_\mu(u_n)\| := \sup\{\langle J'_\mu(u_n), \varphi \rangle \mid \varphi \in T_{u_n}M, \|\varphi\| = 1\} \rightarrow 0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 那么, $\{u_n\}$ 在 X 中有收敛子列.

证明 对 $\varphi \in X$ 有

$$\langle J'_\mu(u), \varphi \rangle = \mu \int_{\mathbb{R}^N} (|Du|^2 Du D\varphi + u^3 \varphi) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) Du D\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} u |Du|^2 \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} W(x) u \varphi dx.$$

设 $\{u_n\} \subset M$ 是 J_μ 限制在 M 上的 (PS) 序列. 由 $J_\mu(u_n) \leq c$ 知, $\{u_n\}$ 在 X 中有界, $\{u_n Du_n\}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中有界. 转向子列设 $u_n \rightharpoonup u$ 在 X 中. 由于位势 W 是强制的, 对于 $2 \leq r < \frac{2N}{N-2}$ 嵌入 $H_W^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ 是紧嵌入. 又由 Sobolev 嵌入定理, $\{u_n\}$ 在 $L^{\frac{4N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$ 中有界. 所以, 我们可以假设 $u_n \rightarrow u$ 在 $L^r(\mathbb{R}^N)$ 中, $2 \leq r < \frac{4N}{N-2}$. 给定 $\varphi \in X$, 令 $\psi = \varphi - u_n \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n \varphi dx$, 那么, $\psi \in T_{u_n}M$, 且 $\|\psi\| \leq c\|\varphi\|$. 记 $\lambda_n = \langle J'_\mu(u_n), u_n \rangle$, $\{\lambda_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中有界列. 我们有

$$\begin{aligned} \langle J'_\mu(u_n), \varphi \rangle - \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n \varphi dx &= \langle J'_\mu(u_n), \varphi - u_n \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n \varphi dx \rangle = \langle J'_\mu(u_n), \psi \rangle \\ &\leq \|DJ_\mu(u_n)\| \|\psi\| = o(1)\|\varphi\|. \end{aligned} \quad (2.3)$$

根据 (2.3), 有

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle J'_\mu(u_n) - J'_\mu(u_m), u_n - u_m \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda_n |u_n|^{p-2} u_n - \lambda_m |u_m|^{p-2} u_m)(u_n - u_m) dx \\ &= \langle J'_\mu(u_n) - J'_\mu(u_m), u_n - u_m \rangle + o(1) \\ &= \mu \int_{\mathbb{R}^N} (|Du_n|^2 Du_n - |Du_m|^2 Du_m, Du_n - Du_m) dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^3 - u_m^3)(u_n - u_m) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} (|Du_n - Du_m|^2 + W(x)(u_n - u_m)^2) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^2 Du_n - u_m^2 Du_m, Du_n - Du_m) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} (u_n |Du_n|^2 - u_m |Du_m|^2)(u_n - u_m) dx + o(1) \\ &\geq c\mu \int_{\mathbb{R}^N} (|Du_n - Du_m|^4 + (u_n - u_m)^4) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (|Du_n - Du_m|^2 + W(x)(u_n - u_m)^2) dx + o(1), \end{aligned}$$

从而 $u_n \rightarrow u$ 在 X 中. 上面利用了下列估计:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^2 Du_n - u_m^2 Du_m, Du_n - Du_m) dx &\geq \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^2 - u_m^2)(Du_n, Du_n - Du_m) dx \\ &\geq -|u_n - u_m|_4 |u_n + u_m|_4 |Du_n|_4 |Du_n - Du_m|_4 = o(1), \\ \int_{\mathbb{R}^N} (u_n |Du_n|^2 - u_m |Du_m|^2)(u_n - u_m) dx &\geq -(|u_n|_4 |Du_n|_4^2 + |u_m|_4 |Du_m|_4^2) |u_n - u_m|_4 = o(1) \end{aligned}$$

以及初等不等式

$$(|\xi|^{q-2}\xi - |\eta|^{q-2}\eta, \xi - \eta) \geq c_q |\xi - \eta|^q, \quad q \geq 2, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^N.$$

证毕. $\square$

下面将用下降流不变集方法, 参见文献 [16–18]. 为此我们先来定义非线性算子 A , 由向量场 $-(u - Au)$ 生成的流是 J_μ 的下降流; 同时构造在这个流下的不变集.

给定 $u \in M$, 定义 $v = Au \in X$ 如下:

$$\begin{cases} \langle J'_\mu(v), \varphi \rangle + c_0 \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p-2} v \varphi \, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u \varphi \, dx, & \forall \varphi \in X, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u v \, dx = 1, \end{cases} \quad (2.4)$$

其中 λ 是未知的 Lagrange 常数, 而常数 c_0 待定, 下面会估计当 $\mu \rightarrow 0$ 时 c_0 的量级是 $\mu^{-\frac{p}{2}+1}$. 满足 (2.4) 的函数 v 可以通过求解下列极小化问题得到,

$$\inf \left\{ J_\mu(v) + \frac{c_0}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \, dx \mid v \in X, \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u v \, dx = 1 \right\}. \quad (2.5)$$

由于集合 $\{v \mid v \in X, \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u v \, dx = 1\}$ 是 X 中弱闭集, 由弱下半连续性问题 (2.5) 的下确界可以达到, 取最小值的函数就是 (2.4) 的解. 为了证明解的唯一性, 我们需要下列引理:

引理 2.2 取 c_0 充分大时, 对任何 $u_0, u_1 \in X$ 有

$$\begin{aligned} & \langle J'_\mu(u_1) - J'_\mu(u_0), u_1 - u_0 \rangle + c_0 \int_{\mathbb{R}^N} (|u_1|^{p-2} u_1 - |u_0|^{p-2} u_0)(u_1 - u_0) \, dx \\ & \geq c(\|u_1 - u_0\|_{W^{1,4}(\mathbb{R}^N)}^4 + \|u_1 - u_0\|_{H_W^1(\mathbb{R}^N)}^2 + |u_1 - u_0|_p^p), \end{aligned}$$

其中常数 $c = c(\mu)$, 依赖于参数 μ .

证明 令 $u_t = u_0 + t(u_1 - u_0)$, $0 \leq t \leq 1$, 对 $\forall \varphi \in X$ 有

$$\begin{aligned} & \langle J'_\mu(u_1) - J'_\mu(u_0), \varphi \rangle + c_0 \int_{\mathbb{R}^N} (|u_1|^{p-2} u_1 - |u_0|^{p-2} u_0) \varphi \, dx \\ & = \int_0^1 \frac{d}{dt} \langle J'_\mu(u_t), \varphi \rangle dt + c_0 \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} |u_t|^{p-2} u_t \varphi \, dx \right) dt, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \langle J'_\mu(u_t), \varphi \rangle + c_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} |u_t|^{p-2} u_t \varphi \, dx \\ & = \frac{d}{dt} \left\{ \mu \int_{\mathbb{R}^N} (|Du_t|^2 Du_t D\varphi + u_t^3 \varphi) \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u_t^2) Du_t D\varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_t |Du_t|^2 \varphi \, dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N} W(x) u_t \varphi \, dx + c_0 \int_{\mathbb{R}^N} |u_t|^{p-2} u_t \varphi \, dx \right\} \\ & = \mu \int_{\mathbb{R}^N} |Du_t|^2 (Du_1 - Du_0, D\varphi) \, dx + 2\mu \int_{\mathbb{R}^N} (Du_t, Du_1 - Du_0)(Du_t, D\varphi) \, dx \\ & \quad + 3\mu \int_{\mathbb{R}^N} u_t^2 (u_1 - u_0) \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u_t^2) (Du_1 - Du_0, D\varphi) \, dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} u_t (u_1 - u_0) Du_t D\varphi \, dx \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^N} (u_1 - u_0) |Du_t|^2 \varphi \, dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} u_t (Du_t, Du_1 - Du_0) \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} W(x) (u_1 - u_0) \varphi \, dx \\ & \quad + c_0(p-1) \int_{\mathbb{R}^N} |u_t|^{p-2} (u_1 - u_0) \varphi \, dx, \end{aligned} \quad (2.7)$$

在 (2.7) 中取 $\varphi = u_1 - u_0$ 得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \langle J'_\mu(u_t), u_1 - u_0 \rangle + c_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} |u_t|^{p-2} u_t (u_1 - u_0) dx \\ &= \mu \int_{\mathbb{R}^N} |Du_t|^2 |Du_1 - Du_0|^2 dx + 2\mu \int_{\mathbb{R}^N} (Du_t, Du_1 - Du_0)^2 dx + 3\mu \int_{\mathbb{R}^N} u_t^2 (u_1 - u_0)^2 dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} u_t^2 |Du_1 - Du_0|^2 dx + 4 \int_{\mathbb{R}^N} u_t (u_1 - u_0) (Du_t, Du_1 - Du_0) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (u_1 - u_0)^2 |Du_t|^2 dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} (|Du_1 - Du_0|^2 + W(x)(u_1 - u_0)^2) dx + c_0(p-1) \int_{\mathbb{R}^N} |u_t|^{p-2} (u_1 - u_0)^2 dx. \end{aligned} \quad (2.8)$$

注意到

$$\begin{aligned} & u_t^2 |Du_1 - Du_0|^2 + 2u_t(u_1 - u_0)(Du_t, Du_1 - Du_0) + (u_1 - u_0)^2 |Du_t|^2 \geq 0, \\ & \mu(Du_t, Du_1 - Du_0)^2 + 2u_t(u_1 - u_0)(Du_t, Du_1 - Du_0) + \frac{1}{\mu} u_t^2 (u_1 - u_0)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

取 c_0 使得

$$\frac{m}{2} + c_0 |s|^{p-2} \geq \frac{2}{\mu} s^2, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

c_0 的量级是 $\mu^{-\frac{p}{2}+1}$, 这时, 由 (2.8) 有

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \langle J'_\mu(u_t), u_1 - u_0 \rangle + c_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} |u_t|^{p-2} u_t (u_1 - u_0) dx \\ & \geq \mu \int_{\mathbb{R}^N} (|Du_t|^2 |Du_1 - Du_0|^2 dx + u_t^2 (u_1 - u_0)^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|Du_1 - Du_0|^2 + W(x)(u_1 - u_0)^2) dx \\ & + c\mu^{-\frac{p}{2}+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_t|^2 (u_1 - u_0)^2 dx. \end{aligned}$$

回到 (2.6) 有

$$\begin{aligned} & \langle J'_\mu(u_1) - J'_\mu(u_0), u_1 - u_0 \rangle + c_0 \int_{\mathbb{R}^N} (|u_1|^{p-2} u_1 - |u_0|^{p-2} u_0)(u_1 - u_0) dx \\ & \geq \frac{1}{2} \mu \int_{\mathbb{R}^N} ((|Du_1|^2 Du_1 - |Du_0|^2 Du_0, Du_1 - Du_0) + (|u_1|^2 u_1 - |u_0|^2 u_0)(u_1 - u_0)) dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|Du_1 - Du_0|^2 + W(x)(u_1 - u_0)^2) dx + c\mu^{-\frac{p}{2}+1} \int_{\mathbb{R}^N} (|u_1|^{p-2} u_1 - |u_0|^{p-2} u_0)(u_1 - u_0) dx \\ & \geq c\mu \|u_1 - u_0\|_{W^{1,4}(\mathbb{R}^N)}^4 + \frac{1}{2} \|u_1 - u_0\|_{H_W^1(\mathbb{R}^N)}^2 + c\mu^{-\frac{p}{2}+1} |u_1 - u_0|_p^p. \end{aligned}$$

证毕. □

引理 2.3 由 (2.4) 定义的算子 A 是良定义的连续算子.

证明 给定 u 求解极小化问题 (2.5) 知, (2.4) 的解存在. 如果 v_1 和 v_0 都是解, 那么,

$$\langle J'_\mu(v_1) - J'_\mu(v_0), v_1 - v_0 \rangle + c_0 \int_{\mathbb{R}^N} (|v_1|^{p-2} v_1 - |v_0|^{p-2} v_0)(v_1 - v_0) dx = 0.$$

由引理 2.2 知, $v_1 = v_0$. 这样, (2.4) 的解唯一存在, 算子 A 是良定义的. A 将有界集映到有界集. 事实上, 设 $v = Au$, 那么, 由极小化问题知,

$$J_\mu(v) + \frac{1}{p} c_0 \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx \leq J_\mu(u) + \frac{1}{p} c_0 \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx,$$

同时, (2.4) 中的 Lagrange 乘子也是有界的, 即

$$\lambda = \langle J'_\mu(v), v \rangle \leq c J_\mu(v) \leq c \left(J_\mu(u) + c_0 \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \right).$$

设 $u_1, u_0 \in M$, $v_1 = Au_1, v_0 = Av_0$. 对 $i = 0, 1$, v_i 满足

$$\begin{cases} \langle J'_\mu(v_i), \varphi \rangle + c_0 \int_{\mathbb{R}^N} |v_i|^{p-2} v_i \varphi dx = \lambda_i \int_{\mathbb{R}^N} |u_i|^{p-2} u_i \varphi dx, & \forall \varphi \in X, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u_i|^{p-2} u_i v_i dx = 1. \end{cases}$$

当 $u_1 \rightarrow u_0$ 在 X 中时, 我们有

$$\begin{aligned} & \langle J'_\mu(v_1) - J'_\mu(v_0), v_1 - v_0 \rangle + c_0 \int_{\mathbb{R}^N} (|v_1|^{p-2} v_1 - |v_0|^{p-2} v_0)(v_1 - v_0) dx \\ &= \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^{p-2} u_1 (v_1 - v_0) dx - \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{p-2} u_0 (v_1 - v_0) dx \\ &= \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} (|u_0|^{p-2} u_0 - |u_1|^{p-2} u_1) v_0 dx - \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} (|u_0|^{p-2} u_0 - |u_1|^{p-2} u_1) v_1 dx \\ &\leq c |u_1 - u_0|_p \rightarrow 0. \end{aligned}$$

仍然由引理 2.2 知, 当 $u_1 \rightarrow u_0$ 在 X 中时, 有 $v_1 \rightarrow v_0$ 在 X 中. □

引理 2.4 设 $u \in M$, 我们有

- (1) $u - Au \in T_u M$;
- (2) $\langle J'_\mu(u), u - Au \rangle \geq c(\mu) \min\{\|u - Au\|^4, \|u - Au\|^2\}$;
- (3) $\|DJ_\mu(u)\| := \sup\{\langle J'_\mu(u), \varphi \rangle | \varphi \in T_u M, \|\varphi\| \leq 1\} \leq c(\mu, J_\mu(u)) \|u - Au\|$.

证明 (1) $v = Au$ 满足 $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} uv dx = 1$, 从而,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u(u - v) dx = 0, \quad u - v \in T_u M = \left\{ \varphi \mid \varphi \in X, \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u \varphi dx = 0 \right\}.$$

(2) 由算子 A 的定义和引理 2.2,

$$\begin{aligned} \langle J'_\mu(u), u - v \rangle &= \langle J'_\mu(u) - J'_\mu(v), u - v \rangle + c_0 \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v)(u - v) dx \\ &\geq c(\mu) (\|u - v\|_{W^{1,4}(\mathbb{R}^N)}^4 + \|u - v\|_{H_W^1(\mathbb{R}^N)}^2 + |u - v|_p^p) \\ &\geq c(\mu) \min\{\|u - v\|^4, \|u - v\|^2\}. \end{aligned}$$

(3) 对于 $\varphi \in T_u M$, 由 (2.6) 和 (2.7),

$$\begin{aligned} \langle J'_\mu(u), \varphi \rangle &= \langle J'_\mu(u) - J'_\mu(v), \varphi \rangle + c_0 \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v) \varphi dx \\ &\leq c(\mu) (\|u\|_{W^{1,4}(\mathbb{R}^N)}^2 + \|v\|_{W^{1,4}(\mathbb{R}^N)}^2) \|u - v\|_{W^{1,4}(\mathbb{R}^N)} \|\varphi\|_{W^{1,4}(\mathbb{R}^N)} \\ &\quad + \|u - v\|_{H_W^1(\mathbb{R}^N)} \|\varphi\|_{H_W^1(\mathbb{R}^N)} + c(|u|_4^2 + |v|_4^2) |Du - Dv|_4 |\varphi|_4 \\ &\quad + c(|u|_4 + |v|_4) |u - v|_4 (|Du|_4 + |Dv|_4) |D\varphi|_4 + c|u - v|_4 (|Du|_4^2 + |Dv|_4^2) |\varphi|_4 \\ &\quad + c(|u|_4 + |v|_4) (|Du|_4 + |Dv|_4) |Du - Dv|_4 |\varphi|_4 + c_0 (|u|_p^{p-2} + |v|_p^{p-2}) |u - v|_p |\varphi|_p, \\ \|DJ_\mu(u)\| &\leq c(\|u\|_{W^{1,4}(\mathbb{R}^N)}^2 + \|v\|_{W^{1,4}(\mathbb{R}^N)}^2) \|u - v\|_{W^{1,4}(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ c\|u - v\|_{H_W^1(\mathbb{R}^N)} + c_0(|u|_p^{p-2} + |v|_p^{p-2})|u - v|_p \\
 &\leq c(\mu, J_\mu(u))\|u - v\|.
 \end{aligned}$$

证毕. □

记 $u_\pm = \max\{\pm u, 0\}$, 那么, $u = u_+ - u_-$. 定义 X 中的两个开凸子集为

$$\pm P_\delta = \left\{ u \mid u \in X, \int_{\mathbb{R}^N} u_\mp^p dx < \delta \right\}.$$

引理 2.5 给定 $\mu, M_0 > 0$, 存在 $\delta_0 = \delta_0(\mu, M_0)$, 当 $0 < \delta < \delta_0$ 时有

$$A(\partial(\pm P_\delta) \cap J_\mu^{M_0}) \subset \pm P_\delta,$$

其中水平集 $J_\mu^{M_0} = \{u \mid u \in M, J_\mu(u) \leq M_0\}$.

证明 给定 $u \in M$ 满足 $J_\mu(u_0) \leq M_0$. 记 $v = Au$,

$$\begin{cases} \mu \int_{\mathbb{R}^N} (|Dv|^2 Dv D\varphi + v^3 \varphi) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + v^2) Dv D\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} v |Dv|^2 \varphi dx \\ \quad + \int_{\mathbb{R}^N} W(x) v \varphi dx + c_0 \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p-2} v \varphi dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u \varphi dx, \quad \forall \varphi \in X, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u v dx = 1, \end{cases} \quad (2.9)$$

其中 $c_0 \sim \mu^{-\frac{p}{2}+1}$, 而

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \mu \int_{\mathbb{R}^N} (|Dv|^4 + v^4) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2v^2) |Dv|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} W(x) v^2 dx + c_0 \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx \\
 &\leq c \left(J_\mu(v) + c_0 \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx \right) \leq c \left(J_\mu(u) + c_0 \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \right) \\
 &\leq c(M_0 + \mu^{-\frac{p}{2}+1}) =: \Lambda(\mu, M_0).
 \end{aligned}$$

在 (2.9) 中取 $\varphi = v_+$, 我们有

$$\begin{aligned}
 &\mu \int_{\mathbb{R}^N} (|Dv_+|^4 + v_+^4) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + v_+^2) |Dv_+|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} W(x) v_+^2 dx + c_0 \int_{\mathbb{R}^N} v_+^p dx \\
 &= \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u v_+ dx \leq \Lambda \int_{\mathbb{R}^N} u_+^{p-1} v_+ dx \\
 &\leq \Lambda \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_+^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_+^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq c_r \left(\Lambda \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_+^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \right)^{\frac{4}{3-\theta}} + r \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_+^p dx \right)^{\frac{1}{p} \cdot \frac{4}{1+\theta}}, \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

其中 $\theta \in (0, 1)$ 满足 $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2} + \frac{N-2}{4N}(1-\theta)$, $r > 0$ 待定,

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_+^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_+^2 dx \right)^{\frac{\theta}{2}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_+^{\frac{4N}{N-2}} dx \right)^{\frac{N-2}{4N}(1-\theta)} \\
 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_+^2 dx + \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_+^{\frac{4N}{N-2}} dx \right)^{\frac{N-2}{N}} \right)^{\frac{1+\theta}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\leq c_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} W(x) v_+^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} v_+^2 |Dv_+|^2 dx \right)^{\frac{1+\theta}{4}}. \quad (2.11)$$

将 (2.11) 中估计代入 (2.10), 并取 $c_1^{\frac{1+\theta}{4}} r < \frac{1}{2}$, 我们有

$$c_0 \int_{\mathbb{R}^N} v_+^p dx \leq c_r \left(\Lambda \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_+^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \right)^{\frac{4}{3-\theta}}. \quad (2.12)$$

注意到 $\beta = \frac{p-1}{p} \cdot \frac{4}{3-\theta} > 1$, 取 $\delta_0 = \delta_0(\mu, M_0)$ 满足 $\frac{c_r}{c_0} \Lambda^{\frac{4}{3-\theta}} \delta_0^{\beta-1} < 1$. 这时如 $\int_{\mathbb{R}^N} u_+^p dx = \delta < \delta_0$, 就有 $\int_{\mathbb{R}^N} v_+^p dx < \int_{\mathbb{R}^N} u_+^p dx$, 从而, $A(\partial(-P_\delta) \cap J_\mu^{M_0}) \subset -P_\delta$. 同样有 $A(\partial P_\delta \cap J_\mu^{M_0}) \subset P_\delta$. $\square$

为了利用算子 A 构造泛函的下降流, 我们需要 A 的 Lipschitz 逼近.

引理 2.6 记 $\widetilde{M} = \{u \mid u \in M, DJ_\mu(u) \neq 0\}$. 对于给定的 M_0 , 存在局部 Lipschitz 连续的映射 $B: \widetilde{M} \cap J_\mu^{M_0} \rightarrow X$ 满足

- (1) $u - Bu \in T_u M$;
- (2) 对于 $\delta < \delta_0(\mu, M_0)$ (δ_0 定义见引理 2.5), $B(\partial(\pm P_\delta) \cap J_\mu^{M_0}) \subset \pm P_\delta$;
- (3) $\|Bu - Au\| \leq \frac{1}{2}\|u - Au\|$, 从而, $\frac{1}{2}\|u - Au\| \leq \|u - Bu\| \leq \frac{3}{2}\|u - Au\|$;
- (4) $\langle J'_\mu(u), u - Bu \rangle \geq c(\mu) \min\{\|u - Au\|_X^4, \|u - Au\|_X^2\}$;
- (5) B 是奇的.

证明 设 $u \in \widetilde{M}$, $v = Au$. 在 M 中 u 的一个邻域 $N(u)$ 中定义映射 $B_u: N(u) \rightarrow X$:

$$B_u \tilde{u} = \tilde{u} - (u - v) + \tilde{u} \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^{p-2} \tilde{u} (u - v) dx, \quad \tilde{u} \in N(u).$$

我们有 $\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^{p-2} \tilde{u} (\tilde{u} - B_u \tilde{u}) dx = 0$, 从而, $\tilde{u} - B_u \tilde{u} \in T_{\tilde{u}} M$. 注意到 $B_u u = Au$, 而 A 和 B 都是连续的, 我们可以取 $N(u)$ 足够小以使 (2)–(4) 对映射 B_u 成立. 集合 $\{N(u) \mid u \in \widetilde{M}\}$ 是 $\widetilde{M}$ 的开覆盖, 利用通常的单位分解方法, 我们可以得到映射 $B: \widetilde{M} \rightarrow X$ 满足 (1)–(4). 由于 $B_{-u}(-\tilde{u}) = -B_u \tilde{u}$, 如果取 $N(-u) = -N(u)$, 并考虑 $\widetilde{M}$ 的覆盖 $\{N(u) \cup N(-u) \mid u \in \widetilde{M}\}$, 我们可以认为映射 $B: \widetilde{M} \rightarrow X$ 是奇映射. $\square$

命题 2.7 (形变引理) 记 $W_\delta = (P_\delta \cup (-P_\delta)) \cap M$, $K_c = \{u \in M \mid J_\mu(u) = c, DJ_\mu(u) = 0\}$. 设 $c < M_0$, $\delta < \delta_0(\mu, M_0)$, 且 $K_c \setminus W_\delta = \emptyset$, 则存在 $\nu > 0$ 和映射 $\eta: [0, 1] \times M \rightarrow M$ 满足

- (1) $\eta(t, \cdot): M \rightarrow M$ 是微分同胚, $\eta(0, \cdot) = \text{id}$;
- (2) $\eta(t, u) = u$ 如 $t \in [0, 1]$, $J_\mu(u) \notin [c - 2\nu, c + 2\nu]$;
- (3) $\eta(t, u) \in \overline{W}_\delta$, 如 $(t, u) \in [0, 1] \times \overline{W}_\delta$;
- (4) $\eta(1, u) \in J_\mu^{c-\nu} \cup W_\delta$, 如 $J_\mu(u) \leq c + \nu$;
- (5) $\eta(t, u)$ 关于 u 是奇映射.

证明 记 $N(r) = \{u \mid u \in M, \text{dist}(u, K_c) < r\}$. 取 r 充分小, 使 $K_c \subset N(r) \subset N(3r) \subset \overline{N(3r)} \subset W_\delta$. 由引理 2.1, J_μ 满足 (PS) 条件, 存在 $\nu_1 > 0$, $b > 0$ 使得

$$\|DJ_\mu(u)\| \geq b_1, \quad \text{如 } u \notin N(\delta), \quad J_\mu(u) \in [c - 2\nu_1, c + 2\nu_1].$$

根据引理 2.4 和 2.6, 对于这样的 u 有

$$\|DJ_\mu(u)\| \leq c\|u - Au\| \leq c\|u - Bu\|, \quad \langle J'_\mu(u), u - Bu \rangle \geq c \min(\|u - Bu\|^4, \|u - Bu\|^2),$$

从而存在 $b > 0$, 使得

$$\left\langle J'_\mu(u), \frac{u - Bu}{\|u - Bu\|} \right\rangle \geq b, \quad \text{如 } u \notin N(\delta), \quad J_\mu(u) \in [c - 2\nu_1, c + 2\nu_1],$$

必要时缩小 ν_1 可假设 $\nu_1 < br$. 取 $\nu < \nu_1$, 考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\chi_1(J_\mu(u))\chi_2(\text{dist}(u, K_c)) \frac{u - Bu}{\|u - Bu\|}, \\ u(0) = u \in M, \end{cases} \quad (2.13)$$

其中截断函数 χ_1 和 χ_2 满足 $\chi_1(s) = 0$, 如 $s \notin [c - 2\nu, c + 2\nu]$; $\chi_1(s) = 1$, 如 $s \in [c - \nu, c + \nu]$; $\chi_2(s) = 0$, 如 $s \leq r$; $\chi_2(s) = 1$, 如 $s \geq 2r$. 记 $\eta(t, u)$ 是问题 (2.13) 以初值为 u 的解. 依引理 2.6(2), 对 $(t, u) \in [0, 1] \times \overline{W}_\delta$ 有 $\eta(t, u) \in \overline{W}_\delta$, 证明细节可见参见文献 [16, 17]. (4) 可依常规方法证明. (1)、(2) 和 (5) 是显然的. $\square$

命题 2.8 取定 $A_j \subset M$, $\gamma(A_j) \geq j$. 记 $M_j = 1 + \sup_{u \in A_j} J_1(u)$. 取 $\delta < \delta_0(\mu, M_j)$ (δ_0 的定义见引理 2.5), 定义

$$c_j(\mu) = \inf_{A \in \Gamma_j} \sup_{u \in A \setminus W_\delta} J_\mu(u), \quad j \geq 2, \quad \Gamma_j = \{A \mid A \subset M, A \text{ 紧}, -A = A, \gamma(A) \geq j\},$$

那么, $c_j(\mu)$ 是 J_μ 的临界值, 而且 J_μ 有一个变号的临界点 $u_j(\mu)$ 满足 $c_j(\mu) = J_\mu(u_j)$. 而且当 $j \rightarrow \infty$ 时有 $c_j(\mu) \rightarrow \infty$.

证明 假设 $K_{c_j(\mu)} \setminus W_\delta = \emptyset$. 由于 $c_j(\mu) < M_j$, 依命题 2.7, 存在 $\nu > 0$ 和奇映射 η 满足 $\eta(J_\mu^{c_j(\mu)+\nu}) \subset J_\mu^{c_j(\mu)-\nu} \cup W_\delta$, $\eta(W_\delta) \subset W_\delta$. 取集合 $A \subset \Gamma_j$, $A \setminus W_\delta \subset J_\mu^{c_j(\mu)+\nu}$, 那么, $\eta(A) \in \Gamma_j$ 且有

$$\eta(A) \setminus W_\delta \subset (\eta(A \setminus W_\delta) \cup \eta(W_\delta)) \setminus W_\delta \subset J_\mu^{c_j(\mu)-\nu}.$$

这与 $c_j(\mu)$ 的定义矛盾. 从而, $c_j(\mu)$ 是 J_μ 的临界值, 且 $K_{c_j(\mu)} \setminus W_\delta \neq \emptyset$. 依下面的引理 2.9, $c_j(\mu) \rightarrow \infty$, 当 $j \rightarrow \infty$ 时. $\square$

定义

$$\lambda_j = \inf_{E_j} \sup_{u \in E_j} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} (|Du|^2 + W(x)u^2) dx}{\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx}, \quad j = 1, 2, \dots$$

其中 E_j 跑遍 $H_W^1(\mathbb{R}^N)$ 的所有 j 维子空间. 由于嵌入 $H_W^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ 紧, λ_j 是算子 $-\Delta + W$ 的特征值, 且有 $\lambda_j \rightarrow \infty$ 当 $j \rightarrow \infty$ 时. 设 φ_j 是对应 λ_j 的特征函数, 记 $F_j = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_j\}$.

引理 2.9 存在 $c, \sigma > 0$ 使得 $c_j(\mu) \geq c\lambda_{j-1}^\sigma$, $j \geq 2$.

证明 对 $u \in W_\delta \subset M$ 有 $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1$, $\min\{\int_{\mathbb{R}^N} u_+^p dx, \int_{\mathbb{R}^N} u_-^p dx\} < \delta$. 设 $\delta < \frac{1}{2}$, 这时, $u \in \overline{W}_\delta \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} u_+^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_-^p dx$ 是 $\overline{W}_\delta$ 到 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 的奇映射, 从而, $\gamma(\overline{W}_\delta) = 1$. 设 $A \in \Gamma_j$, 则 $\gamma(A \setminus W_\delta) \geq \gamma(A) - \gamma(\overline{W}_\delta) \geq j - 1$, 从而有 $(A \setminus W) \cap E_{j-2}^\perp \neq \emptyset$. 设 $u \in (A \setminus W_\delta) \cap E_{j-2}^\perp$, 我们有估计

$$\begin{aligned} \sup_{u \in A \setminus W} J_\mu(u) &\geq J_\mu(u) \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |Du|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|Du|^2 + W(x)u^2) dx \\ &\geq \frac{1}{8} S \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{4N}{N-2}} dx \right)^{\frac{N-2}{N}} + \frac{1}{2} \lambda_{j-1} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \\ &\geq \frac{1}{8} \left(S \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{4N}{N-2}} dx \right)^{\frac{N-2}{N}} \right)^{\frac{1-\theta}{4}} \left(\left(\lambda_{j-1} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \right)^{\frac{\theta}{2}} \right)^{\frac{4}{1+\theta}} \end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{8} S^{\frac{1-\theta}{4}} \lambda_{j-1}^{\frac{2\theta}{1+\theta}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p} \cdot \frac{4}{1+\theta}} = \frac{1}{8} S^{\frac{1-\theta}{4}} \lambda_{j-1}^{\frac{2\theta}{1+\theta}}, \quad (2.14)$$

其中 S 是 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 到 $L^{\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$ 的 Sobolev 嵌入常数, θ 满足 $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2} + \frac{N-2}{4N}(1-\theta)$, 由 (2.14) 有 $c_j(\mu) \geq \frac{1}{8} S^{\frac{1-\theta}{4}} \lambda_{j-1}^{\frac{2\theta}{1+\theta}}$. $\square$

我们考虑带强制位势的问题 (2.1). 依命题 2.8 和引理 2.9 相应的扰动问题 (2.2) 有一列变号解 $u_j(\mu)$, $j = 2, \dots$, 且临界值 $c_j(\mu) = J_\mu(u_j(\mu))$ 有上、下界估计 $c\lambda_j^\theta \leq c_j(\mu) \leq M_j$. 为了得到问题 (2.1) 的解, 我们考虑 $\mu \rightarrow 0$ 时 $u_j(\mu)$ 的收敛性质. 如果对 $u_j(\mu)$ 有合适的控制, 那么, 极限函数就是问题 (2.1) 的解. 为方便起见, 如果 $u \in H_W^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 是问题 (2.1) 的解, 我们就称 u 是泛函 J 的临界点, 并记作 $DJ(u) = 0$. 我们有如下的收敛定理:

定理 2.10 (收敛定理) 设 $\mu_n \rightarrow 0$, $\{u_n\} \subset M$, $DJ_{\mu_n}(u_n) = 0$, $J_{\mu_n}(u_n) \leq c$. 那么, 存在 $u \in H_W^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, 满足 $DJ(u) = 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1$. 转向子列当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n \rightarrow u$ 在 $H_W^1(\mathbb{R}^N)$ 中, $u_n Du_n \rightarrow u Du$ 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中, $\mu_n \int_{\mathbb{R}^N} (|Du_n|^4 + u_n^4) dx \rightarrow 0$. 特别地, $J_{\mu_n}(u_n) \rightarrow J(u)$. 如果 u_n 都是变号解, 那么, 极限 u 也是变号解.

证明 由于我们现在假设位势 W 是强制的, 有紧嵌入 $H_W^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$, $2 \leq r < \frac{2N}{N-2}$. 当 $L^{\frac{4N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$ 模有界时, X 中有界列有在 $L^r(\mathbb{R}^N)$ 中的收敛列, $2 \leq r < \frac{4N}{N-2}$. 这样, 定理 2.10 的证明就与有界区域类似^[9]. 下面只列出主要证明步骤:

(1) 由 $DJ_{\mu_n}(u_n) = 0$ 知, 存在 $\lambda_n \in \mathbb{R}$, u_n 满足方程

$$\begin{cases} \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} (|Du_n|^2 Du_n D\varphi + u_n^3 \varphi) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u_n^2) Du_n D\varphi dx \\ \quad + \int_{\mathbb{R}^N} u_n |Du_n|^2 \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} W(x) u_n \varphi dx \\ \quad = \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n \varphi dx, \quad \forall \varphi \in X = W^{1,4}(\mathbb{R}^N) \cap H_W^1(\mathbb{R}^N), \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx = 1, \end{cases} \quad (2.15)$$

由 $J_{\mu_n}(u_n) \leq c$ 知,

$$\mu_n \int_{\mathbb{R}^N} (|Du_n|^4 + u_n^4) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u_n^2) |Du_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} W(x) u_n^2 dx \leq c.$$

由 Sobolev 嵌入 $\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{\frac{4N}{N-2}} \leq c(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |Du_n|^2 dx)^{\frac{N}{N-2}} \leq c$. 我们设 $u_n \rightharpoonup u$ 在 $H_W^1(\mathbb{R}^N)$ 中, $u_n Du_n \rightharpoonup u Du$ 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中, $u_n \rightarrow u$ 在 $L^r(\mathbb{R}^N)$ 中, $2 \leq r < \frac{4N}{N-2}$. 特别地, $u_n \rightarrow u$ 在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中, $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx = 1$. 在 (2.15) 中取 $\varphi = u_n$ 有

$$\lambda_n = \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} (|Du_n|^4 + u_n^4) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2u_n^2) |Du_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} W(x) u_n^2 dx,$$

从而, λ_n 有界. 设 $\lambda_n \rightarrow \lambda$.

(2) 由 (2.15) 出发利用 Moser 迭代有 $|u_n|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq c$, $|u|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq c$.

(3) 证明 u 满足方程

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) Du D\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} u |Du|^2 \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} W(x) u \varphi dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u \varphi dx, \\ \quad \forall \varphi \in H_W^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N), \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1, \end{cases} \quad (2.16)$$

方程 (2.16) 的证明与有界区域类似^[9]. 设 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\psi \geq 0$. 先取 (2.15) 中试探函数 $\varphi = e^{-u_n}\psi$ (及 $e^{u_n}\psi$), 证明 (2.16) 当试探函数在 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 时成立, 然后利用逼近证明试探函数在 $H_W^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 时仍成立.

(4) 在 (2.16) 中取 $\varphi = u$ 得到

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2u^2)|Du|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} W(x)u^2 dx = \lambda. \quad (2.17)$$

在 (2.15) 中取 $\varphi = u_n$ 有

$$\mu_n \int_{\mathbb{R}^N} (|Du_n|^4 + u_n^4) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u_n^2)|Du_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} W(x)u_n^2 dx = \lambda_n. \quad (2.18)$$

由 (2.17) 和 (2.18), 根据 $\lambda_n \rightarrow \lambda$ 和弱下半连续性知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} (|Du_n|^4 + u_n^4) dx &\rightarrow 0, \\ \int_{\mathbb{R}^N} (|Du_n|^2 + W(x)u_n^2) dx &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} (|Du|^2 + W(x)u^2) dx, \\ \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |Du_n|^2 dx &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |Du|^2 dx, \end{aligned}$$

从而, $u_n \rightarrow u$ 在 $H_W^1(\mathbb{R}^N)$ 中, $u_n Du_n \rightarrow u Du$ 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中, 且 $J_{\mu_n}(u_n) \rightarrow J(u)$.

(5) 设 u_n 是变号函数. 在 (2.15) 中取 $\varphi = u_n^+ \neq 0$ 有

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + (u_n^+)^2)|Du_n^+|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} W(x)(u_n^+)^2 dx \leq c \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^p dx. \quad (2.19)$$

由于 $4 < p < \frac{4N}{N-2}$, 由 (2.19) 知, 存在 $\alpha > 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^p dx \geq \alpha > 0$. 再由 $u_n \rightarrow u$ 在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中知, $\int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^p dx \geq \alpha$, $u^+ \neq 0$. 同样, $u^- \neq 0$. $\square$

定理 2.1 的证明 由命题 2.8 和引理 2.9, 泛函 J_μ 有一串变号的临界点 $u_j(\mu)$, $j = 2, \dots$, 满足 $c\lambda_j^\sigma \leq J_\mu(u_j(\mu)) \leq M_j$. 依收敛定理 2.10, 抽取序列 $\mu_n \rightarrow 0$, $u_j(\mu_n)$ 收敛到 u_j , $u_j \in H_W^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 是 J 的变号临界点, 即问题 (2.1) 的解, 且有估计 $J(u_j) \geq c\lambda_j^\sigma$. $\square$

3 有界位势问题

本节考虑带有有界位势 V 的问题 (1.2), 其中位势 V 满足条件 (V₁)–(V₄). 考虑 V 的扰动 $W_\varepsilon = \varepsilon W + V$, $\varepsilon \in (0, 1]$, 其中 W 是强制位势, 满足条件 (V₁)–(V₄). 考虑 V 的扰动 $W_\varepsilon = \varepsilon W + V$, $\varepsilon \in (0, 1]$, 其中 W 是强制位势, 满足条件 (W₁) 和 (W₂) 以及如下的 Lipschitz 条件 (W₃):

(W₃) $W(x) = W(|x|)$, $|W(x) - W(y)| \leq |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}^N$, $W(x)$ 关于 $|x|$ 单调上升.

例如, 可取 $W(x) = (1 + |x|^2)^{1/2}$. 相应于位势 W_ε 的方程是

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2)DuD\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} u|Du|^2\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} (\varepsilon W + V)u\varphi dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}u\varphi dx, \\ \forall \varphi \in H_W^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N), \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

由于位势 $W_\varepsilon = \varepsilon W + V$ 是强制的, 由定理 2.1 知, (3.1) 有无穷多属于 $H_W^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 的变号解. 我们希望在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时对问题 (3.1) 的解有适当控制, 从而在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时得到问题 (1.2) 的解. 对 $\varepsilon \in (0, 1]$ 定义泛函

$$I_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1+u^2)|Du|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\varepsilon W + V)u^2 dx = \frac{1}{2} \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} W(x)u^2 dx + I(u), \quad (3.2)$$

其中

$$u \in M_1 = \left\{ u \mid u \in H_W^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1 \right\}.$$

我们称 $u \in M_1$ 是 I_ε 限制在 M_1 上临界点并记作 $DI_\varepsilon(u) = 0$, 如果 u 满足 (3.1). 我们有 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时的下列收敛定理:

定理 3.1 (收敛定理) 设 $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\{u_n\} \subset M_1$, $DI_{\varepsilon_n}(u_n) = 0$, $I_{\varepsilon_n}(u_n) \leq c$, 那么, 存在 $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1$, $DI(u) = 0$, 即 u 是问题 (1.2) 的解. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 转向子列有 $u_n \rightarrow u$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中, $u_n Du_n \rightarrow uDu$ 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中, $\varepsilon_n \int_{\mathbb{R}^N} W u_n^2 dx \rightarrow 0$, 特别地, $I_{\varepsilon_n}(u_n) \rightarrow I(u)$. 如果 u_n 都是变号解, 那么, u 也是变号解.

当 λ 固定时成立类似的收敛定理^[9], 证明的主要思想来自文献 [11]. 我们在下面经常就略去证明细节, 只叙述证明的关键步骤.

引理 3.2 设 $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\{u_n\} \subset M_1$, $DI_{\varepsilon_n}(u_n) = 0$, $I_{\varepsilon_n}(u_n) \leq c$, u_n 满足方程

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} (1+u_n^2)Du_n D\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_n |Du_n|^2 \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} (\varepsilon W(x) + V(x))u_n \varphi dx \\ = \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_W^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N), \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx = 1, \end{cases} \quad (3.3)$$

那么, 存在 $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\lambda \in (0, \infty)$ 满足方程

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (1+u^2)Du D\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} u |Du|^2 \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u \varphi dx &= \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u \varphi dx, \\ \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \quad (3.4)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 转向子列有 $\lambda_n \rightarrow \lambda$, $u_n \rightarrow u$ 在 $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$ 中, $u_n Du_n \rightarrow uDu$ 在 $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^N)$ 中.

引理 3.3 设 $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\{u_n\} \subset M_1$, $I_{\varepsilon_n}(u_n) \leq c$, $DI_{\varepsilon_n}(u_n) = 0$, 即 u_n 满足方程 (3.3). 设 $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$, $|t_n| \rightarrow \infty$, $\int_{B_1(t_n)} u_n^2 dx \geq \nu > 0$, 那么, 存在 $v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\alpha \in [0, \infty)$ 满足方程

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (1+v^2)Dv D\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} v |Dv|^2 \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} (\alpha + V_\infty)v \varphi dx &= \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p-2} v \varphi dx, \\ \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \end{aligned} \quad (3.5)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 转向子列有 $u_n(\cdot + t_n) \rightarrow v$ 在 $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$ 中, $(u_n Du_n)(\cdot + t_n) \rightarrow vDv$ 在 $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^N)$ 中, $\varepsilon_n W(t_n) \rightarrow \alpha$.

引理 3.4 设位势 V 满足 (V_1) 和 (V_2) , 位势 W 满足 (W_1) – (W_3) . 设 $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\{u_n\} \subset M_1$, $I_{\varepsilon_n}(u_n) \leq c$, $DI_{\varepsilon_n}(u_n) = 0$, 即 u_n 满足方程 (3.3). 那么存在 $u, v_1, \dots, v_k \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in [0, \infty)$, $\{t_n^1\}, \dots, \{t_n^k\} \subset \mathbb{R}^N$, 满足 $|t_n^l| \rightarrow \infty$, $|t_n^l - t_n^m| \rightarrow \infty$, $1 \leq l < m \leq k$. u 满足方程 (3.4), $v_l, 1 \leq l \leq k$ 满足方程

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1+v_l^2)Dv_l D\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} v_l |Dv_l|^2 \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} (\alpha_l + V_\infty)v_l \varphi dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |v_l|^{p-2} v_l \varphi dx,$$

$$\forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N),$$

其中 $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$, 而 $\lambda_n = \langle I'_{\varepsilon_n}(u_n), u_n \rangle$. 下列估计成立, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{cases} u_n - u - \sum_{l=1}^k v_l(\cdot - t_n^l) \rightarrow 0, & \text{在 } H^1(\mathbb{R}^N) \text{ 中,} \\ u_n Du_n - u Du - \sum_{l=1}^k (v_l Dv_l)(\cdot - t_n^l) \rightarrow 0, & \text{在 } L^2(\mathbb{R}^N) \text{ 中,} \\ \varepsilon_n \int_{\mathbb{R}^N} W u_n^2 dx - \sum_{l=1}^k \alpha_l \int_{\mathbb{R}^N} v_l^2 dx \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

注 3.5 引理 3.2 和 3.3 的证明类似于定理 2.10. 但是由于 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 到 $L^r(\mathbb{R}^N)$, $2 \leq r < \frac{2N}{N-2}$ 的嵌入只是连续的, 到 $L^r_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $2 \leq r < \frac{2N}{N-2}$ 才是紧嵌入, 当有 $L^{\frac{4N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$ 模的控制时, 我们有在 $L^r_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $2 \leq r < \frac{4N}{N-2}$ 的收敛. 这样在引理 3.2 (相应地, 引理 3.3) 我们只能得到局部收敛, 特别地, $\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx = 1$ 不能推出 $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1$.

在引理 3.3 的证明中, $\varepsilon_n W(t_n)$ 的有界性需要用到条件 (W₃). 我们有估计

$$\begin{aligned} c &\geq \varepsilon_n \int_{\mathbb{R}^N} W u_n^2 dx \geq \varepsilon_n \int_{B_1(t_n)} W u_n^2 dx \geq \varepsilon_n \int_{B_1(t_n)} (W(t_n) - |W(t_n) - W(x)|) u_n^2 dx \\ &\geq \varepsilon_n W(t_n) \int_{B_1(t_n)} u_n^2 dx - \varepsilon_n \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx \geq \varepsilon_n W(t_n) \nu - c\varepsilon_n. \end{aligned}$$

从而, $\varepsilon_n W(t_n)$ 有界. 有了引理 3.2 和 3.3, 再利用 Lions 的集中紧性原理就可以推出引理 3.4, 在引理 3.2-3.4 的证明中都只假设位势 V 满足条件 (V₁) 和 (V₂). 当位势 V 还满足 (V₃) 和 (V₄) 时, 按照 Cerami-Devillanova-Solimini 的方法可以排除引理 3.4 中 $k \neq 0$ 的情形, 从而证明定理 3.1.

定理 3.1 的证明 设 u 是问题 (3.1) 的解, 由正则性理论, u 是古典解. 取 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $t \in \mathbb{R}^N$ 在 (3.1) 中以 $t \cdot Du \psi$ 作为试探函数, 经分部积分后得到 Pohožaev 恒等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\varepsilon t \cdot Dw + t \cdot Dv) u^2 \psi dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) (Du, D\varphi) t \cdot D\psi dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) |Du|^2 t D\psi dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\varepsilon W + V) u^2 t D\psi dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p t \cdot D\psi dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

设 $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $u_n \in M_1$ 是问题 $(P)_{\varepsilon_n}$ 的解, $I_{\varepsilon_n}(u_n) \leq c$. 这时, Lagrange 乘子 λ_n 也有界. 由引理 3.4, u_n 有分解 (3.6). 设 $|t_n^1| = \min_{1 \leq l \leq k} |t_n^l|$. 记 $t_n = t_n^1$, 依文献 [11], 可以构造一系列以 $\frac{1}{2}t_n$ 为顶点, 由球 $B_{R_n}(t_n)$ 生成的锥

$$C_n = \left\{ w \in \mathbb{R}^N \mid w = \frac{1}{2}t_n + s \left(x - \frac{1}{2}t_n \right), x \in B_{R_n}(t_n), s \in [0, \infty) \right\},$$

其中 R_n 满足 $\frac{\hat{r}}{k} \frac{|t_n|}{2} := r_n \leq R_n \leq k r_n = \hat{r} \cdot \frac{|t_n|}{2}$, $\hat{r} = \frac{1}{5(\bar{c}+1)}$, 常数 $\bar{c}$ 在条件 (V₄) 中出现. 锥 C_n 具有性质

$$\partial C_n \cap \bigcup_{l=0}^k B_{\frac{r_n}{2}}(t_n^l) = \emptyset, \quad t_n^0 := 0. \quad (3.8)$$

我们应用 Pohožaev 恒等式 (3.7). 取 $u = u_n$, $t = t_n$, $\psi = \chi \phi_R$, $\lambda = \lambda_n$, 其中 $\chi, \phi_R \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\chi(x) = 0$, 如 $x \notin C_n$; $\chi(x) = 1$, 如 $x \in C_n$ 且 $\text{dist}(x, \partial C_n) \geq 1$; $\phi_R(x) = 1$, 如 $|x| \leq R$; $\phi_R(x) = 0$, 如 $|x| \geq 2R$. 再

令 $R \rightarrow \infty$ 就有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{C_n} (\varepsilon t \cdot Dw + t \cdot Dv) u^2 \chi dx &= \int_{C_n} (1 + u_n^2) (Du_n, D\chi) t_n \cdot Du_n dx - \frac{1}{2} \int_{C_n} (1 + u_n^2) |Du_n|^2 t \cdot D\chi dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{C_n} (\varepsilon W + V) u_n^2 t_n \cdot D\chi dx + \lambda_n \int_{C_n} |u_n|^p t_n \cdot D\chi dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

依文献 [11, 引理 4.2], 对 $x \in C_n$, $\vec{x} = \frac{x}{|x|}$ 有 $t_n \cdot Dv \geq \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial \vec{x}}$, 类似 $t_n \cdot Dw \geq \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial \vec{x}}$, 依条件 (W₃), $t_n \cdot Dw \geq 0$. (3.9) 左边有估计

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{C_n} (\varepsilon t_n \cdot Dw + t_n \cdot Dv) u_n^2 \chi dx &\geq \int_{B_1(t_n)} (t_n \cdot Dv) u_n^2 dx \geq \frac{1}{4} \inf_{B_1(t_n)} \frac{\partial v}{\partial \vec{x}} \int_{B_1(t_n)} u_n^2 dx \\ &\geq \frac{1}{4} \nu \inf_{B_1(t_n)} \frac{\partial v}{\partial \vec{x}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

另一方面, (3.9) 的右边由于 $D\chi$ 的支集包含在 $\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{l=0}^k B_{\frac{1}{2}t_n}(t_n^l)$, 如文献 [10], (3.9) 的右边有指数衰减. 这样由 (3.9) 和 (3.10), 存在常数 $c, \delta > 0$ 与 n 无关使得

$$\frac{1}{4} \nu \inf_{B_1(t_n)} \frac{\partial v}{\partial \vec{x}} \leq c e^{-\delta |t_n|},$$

这与条件 (V₃) 矛盾, 从而, $k = 0$. 这样由 (3.6), $u_n \rightarrow u$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中, $u_n Du_n \rightarrow u Du$ 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中, $\varepsilon_n \int_{\mathbb{R}^N} W(x) u_n^2 dx \rightarrow 0$. 由于 $4 < p < \frac{4N}{N-2}$, 我们有 $u_n \rightarrow u$ 在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中, 特别地,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx = 1,$$

u 是问题 (1.2) 的解, 且有 $I_{\varepsilon_n}(u_n) \rightarrow I(u)$.

如果 u_n 是变号解, 类似定理 2.10 可以证明 u 也是变号解. □

定理 1.1 的证明 对 $\varepsilon, \mu \in (0, 1]$, 定义

$$I_{\varepsilon, \mu}(u) = \frac{1}{4} \mu \int_{\mathbb{R}^N} (|Du|^4 + u^4) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2) |Du|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\varepsilon W(x) + V(x)) u^2 dx, \quad (3.11)$$

其中 $u \in M = \{u \mid u \in W^{1,4}(\mathbb{R}^N) \cap H_W^1(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1\}$. 又定义

$$\Gamma_j = \{A \mid A \subset M, A \text{ 紧}, -A = A, \gamma(A) \geq j\} \quad c_j(\varepsilon, \mu) = \inf_{A \in \Gamma_j} \sup_{u \in A \setminus W_\delta} I_{\varepsilon, \mu}(u).$$

泛函 $I_{\varepsilon, \mu}$ 的位势 $W_\varepsilon = \varepsilon W + V$ 是强制的. 由定理 2.1 知, 当 δ 充分小时, $c_j(\varepsilon, \mu)$ 是 $I_{\varepsilon, \mu}$ 的临界值, 且相应变号的临界点. 任取 $A_j \in \Gamma_j$, 令 $M_j = 1 + \sup_{u \in A_j} I_{1,1}(u)$, 那么 $c_j(\varepsilon, \mu) \leq M_j$. 令 $c_j = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\mu \rightarrow 0} c_j(\varepsilon, \mu)$, 由定理 2.10 和 3.1 知, 存在问题 (1.2) 的变号解 u_j , 且 $I(u_j) = c_j$. 如果能证明 $j \rightarrow \infty$ 时 $c_j \rightarrow +\infty$, 那么, 问题 (1.2) 就有无穷多变号解. 为此我们与半线性问题的临界值作比较.

记

$$\begin{aligned} L(v) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|Dv|^2 + V(x)v^2) dx, \\ v \in \Sigma &= \left\{ v \mid v \in H^1(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q dx = 1 \right\}, \end{aligned}$$

$$U_\delta = \left\{ v \mid v \in \Sigma, \int_{\mathbb{R}^N} v_+^q dx < \delta \text{ 或 } \int_{\mathbb{R}^N} v_-^q dx < \delta \right\},$$

其中 $q = \frac{1}{2}p$ 满足 $2 < q < \frac{2N}{N-2}$. 又定义

$$G_j = \{B \mid B \subset \Sigma, B \text{ 紧}, -B = B, \gamma(B) \geq j\}, \quad b_j = \inf_{B \in G_j} \sup_{v \in B \setminus U_{\delta_j}} L(v),$$

其中 $\delta_j < \frac{1}{2}$ 是充分小的常数. 对 $u \in X = W^{1,4}(\mathbb{R}^N) \cap H_W^1(\mathbb{R}^N)$, 定义 $v = Q(u) := u|u|$, Q 是 X 到 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 的连续奇映射. 对 $u \in M$, 有 $v = Q(u) \in \Sigma$. 我们有估计

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon, \mu}(u) &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |Du|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |Du|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{4} V(x) u^2 - \frac{1}{8} V(x) u^4 + c_2 |u|^p \right) dx \\ &\geq \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}^N} (|Dv|^2 + V(x) v^2) dx - c, \end{aligned} \quad (3.12)$$

其中常数 c_2 使得对一切 $x \in \mathbb{R}^N$, $s \in \mathbb{R}$ 都有 $\frac{1}{4}V(x)s^2 - \frac{1}{8}V(x)s^4 + c_2|s|^p \geq 0$. 对于 $A \in \Gamma_j$ 有 $B = Q(A) \in G_j$. 对取定的 δ_j 要求 $c_j(\varepsilon, \mu)$ 定义中 $\delta < \delta_j$, 那么, 由 $\int_{\mathbb{R}^N} v_\pm^q dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_\pm^p dx$ 知, $Q(W_\delta) \subset U_{\delta_j}$, 这样依 (3.12) 有

$$c_j(\varepsilon, \mu) = \inf_{A \in \Gamma_j} \sup_{u \in A \setminus W_\delta} I_{\varepsilon, \mu}(u) \geq \inf_{B \in G_j} \sup_{v \in B \setminus U_{\delta_j}} \frac{1}{4} L(v) - c = \frac{1}{4} b_j - c. \quad (3.13)$$

如果我们只讨论解的存在性, 不考虑解是否变号, 类似 b_j 可以定义 $\tilde{b}_j = \inf_{B \in G_j} \sup_{v \in B} L(v)$, 参见文献 [19]. 文献 [11] 证明了 $j \rightarrow \infty$ 时 $\tilde{b}_j \rightarrow +\infty$. 当 $\delta_j < \frac{1}{2}$ 时, 如同引理 2.9 证明中推理有 $\gamma(\overline{U}_{\delta_j}) = 1$, 这样, 对于 $B \in G_j$ 我们有 $\gamma(B \setminus U_{\delta_j}) \geq \gamma(B) - \gamma(\overline{U}_{\delta_j}) \geq j - 1$, 从而,

$$b_j \geq \inf_{B' \in G_{j-1}} \sup_{v \in B'} L(v) = \tilde{b}_{j-1}, \quad c_j \geq \frac{1}{4} b_j - c \geq \frac{1}{4} \tilde{b}_{j-1} - c \rightarrow +\infty, \quad \text{当 } j \rightarrow \infty \text{ 时}.$$

证毕. □

4 结论与展望

本文讨论一类修正的非线性 Schrödinger 方程. 利用我们在最近的一系列工作中提出的扰动方法证明了在有约束条件时带有限位势拟线性 Schrödinger 方程有无穷多变号解. 近年来, 拟线性 Schrödinger 方程的研究引起了越来越多人的关注. 本文中考虑的问题可以作进一步讨论.

首先, 如位势 V 是常数, 条件 (V_3) 不成立, 但定理 1.1 的结论仍成立. 我们在第 2 节中证明强制位势问题 (2.1) 有无穷多变号解, 关键在于嵌入 $H_W^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$, $2 \leq r < \frac{2N}{N-2}$ 是紧嵌入. 当 V 是常数时, 我们限制在球对称函数类中讨论问题, 引入 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 的子空间

$$H_r^1(\mathbb{R}^N) = \{u \mid u \in H^1(\mathbb{R}^N), u(x) = u(|x|), \forall x \in \mathbb{R}^N\}.$$

由于嵌入 $H_r^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$, $2 < r < \frac{2N}{N-2}$ 是紧嵌入, 我们可以与第 2 节中一样证明当 V 是正常数时, 问题 (1.2) 有无穷多球对称变号解.

其次, 带有积分约束的拟线性问题 (1.2) 可以与无约束情形一样利用变量代换化为半线性问题, 但是利用本文中的扰动方法, 我们可以考虑更一般的拟线性问题

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^N D_j(a_{ij}(x,u)D_i u) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N D_s a_{ij}(x,u) D_i u D_j u - V(x)u + \lambda|u|^{p-2}u = 0, & x \in \mathbb{R}^N, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1, & u(x) \rightarrow 0, \end{cases} \quad x \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

其中 $4 < p < \frac{4N}{N-2}$, V 是位势函数. 假设 V 满足 $(V_1)-(V_4)$, a_{ij} 满足下列条件:

(A₁) $a_{ij} \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a_{ij} = a_{ji}$, 存在常数 $a_1 \geq a_0 > 0$ 使得

$$a_0(1+s^2)|\xi|^2 \leq a_{ij}(x,s)\xi_i\xi_j \leq a_1(1+s^2)|\xi|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \xi \in \mathbb{R}^N;$$

(A₂) $0 \leq D_s a_{ij}(x,s)s\xi_i\xi_j \leq 2a_{ij}(x,s)\xi_i\xi_j$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, $s \in \mathbb{R}$;

(A₃) $a_{ij}(x,s)$ 关于 s 是奇函数.

可以得到下面的定理:

定理 4.1 设 $4 < p < \frac{4N}{N-2}$, 位势函数 V 满足条件 $(V_1)-(V_4)$, 函数 a_{ij} 满足 $(A_1)-(A_3)$, 那么, 问题 (4.1) 有无穷多变号解.

最后在本文提出的方法将可应用于不同的方程. 另外, 根据这类方程的物理意义, 约束条件可以提为 $\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = 1$.

致谢 感谢审稿人认真阅读本文初稿并提出宝贵意见.

参考文献

- 1 Brihaye Y, Hartmann B. Solitons on nanotubes and fullerenes as solutions of a modified nonlinear Schrödinger equation. In: *Advances in Soliton Research*. Hauppauge, NY: Nova Science Publishers, 2006, 135–151
- 2 Brizhik L, Eremko A, Piette B, et al. Static solutions of a D-dimensional modified nonlinear Schrödinger equation. *Nonlinearity*, 2003, 16: 1481–1497
- 3 Brüll L, Lange H. Solitary waves for quasilinear Schrödinger equations. *Expo Math*, 1986, 4: 278–288
- 4 Hartmann B, Zakrzewski W J. Electrons on hexagonal lattices and applications to nanotubes. *Phys Rev B*, 2003, 68: 184–302
- 5 Kurihara S. Large-amplitude quasi-solitons in superfluid films. *J Phys Soc Japan*, 1981, 50: 3262–3267
- 6 Liu J Q, Wang Y, Wang Z Q. Solutions for quasilinear Schrödinger equations via the Nehari method. *Comm Partial Differential Equations*, 2004, 29: 879–901
- 7 Liu J Q, Wang Y, Wang Z Q. Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations, II. *J Differential Equations*, 2003, 187: 473–493
- 8 Colin M, Jeanjean L. Solutions for a quasilinear Schrödinger equation, a dual approach. *Nonlinear Anal*, 2004, 56: 213–226
- 9 Liu X Q, Liu J Q, Wang Z Q. Quasilinear elliptic equations via perturbation method. *Proc Amer Math Soc*, 2013, 141: 253–263
- 10 Liu J Q, Wang Z Q. Multiple solutions for quasilinear elliptic equations with a finite potential well. *J Differential Equations*, 2014, 257: 2874–2899
- 11 Cerami G, Devillanova G, Solimini S. Infinitely many bound states solutions for some nonlinear scalar field equations. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2005, 23: 139–168
- 12 Poppenberg M, Schmitt K, Wang Z Q. On the existence of solutions to quasilinear Schrödinger equations. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2002, 14: 329–344
- 13 Liu J Q, Wang Z Q. Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations I. *Proc Amer Math Soc*, 2003, 31: 441–448
- 14 Xiong M, Liu X Q. Sign-changing solutions for quasilinear Schrödinger equations with restraint. *Nonlinear Anal*, 2013, 86: 1–11

- 15 Rabinowitz P H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. In: CBMS Reg Conf Ser Math, vol. 65. Providence, RI: Amer Math Soc, 1986
- 16 Liu Z L, Sun J X. Invariant sets of descending flow in critical point theory with applications to nonlinear differential equations. J Differential Equations, 2001, 172: 257–299
- 17 Bartsch T, Liu Z L, Weth T. Nodal solutions of a p -Laplacian equation. Proc Lond Math Soc, 2005, 91: 129–152
- 18 Liu Z L, Wang Z Q. Sign-changing solutions of nonlinear elliptic equations. Front Math China, 2008, 3: 221–238
- 19 Bahri A, Lions P L. Morse index of some min-max critical points I, application to multiplicity results. Comm Pure Appl Math, 1988, 41: 1027–1037

Sign-changing solutions for modified nonlinear Schrödinger equation

LIU JiaQuan, LIU XiangQing & WANG Zhi-Qiang

Abstract In this paper, we consider the following modified nonlinear Schrödinger equation:

$$\begin{cases} \Delta u + \frac{1}{2}u\Delta u^2 - V(x)u + \lambda|u|^{p-2}u = 0, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x) \rightarrow 0, & x \rightarrow \infty. \end{cases}$$

This type of equations have been involved in models of mathematical physics, and mathematical work has been done extensively in recent years. The problem has a formal variational structure, but it is difficult to find a suitable space in which the variational functional possesses both smoothness and compactness properties. We introduce a p -Laplacian perturbation approach, obtain solutions of the perturbed problems as approximate solutions of the original problem, and establish suitable estimates for these solutions. Then we pass limits to get solutions of the original problem. We prove the existence of infinitely many sign-changing solutions with the integral constraint $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1$, where λ appears as a Lagrangian multiplier.

Keywords modified nonlinear Schrödinger equation, integral constraint, sign-changing solution, perturbation method

MSC(2010) 35B05, 35B45

doi: 10.1360/N012014-00151