数字集的谱性与谱自仿测度

王琦, 李建林*

陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安 710119

E-mail: wq0814@snnu.edu.cn, jllimath10@snnu.edu.cn

收稿日期: 2016-11-15; 接受日期: 2016-12-07; 网络出版日期: 2017-04-10; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11571214) 和中央高校基本科研业务费专项基金 (批准号: GK201601004 和 2017CBY002) 资助项目

摘要 本文主要确定与谱自仿测度 $\mu_{M,D}$ 相关的数字集 D 的谱性. 研究所涉及的谱性问题与 Dutkay、Han 和 Jorgensen 的一个猜测密切相关. 此猜测表明, 在一维情形下, 如果 $\mu_{M,D}$ 是谱自仿测度, 则相应的数字集 D 总是一个谱集. 对于一个自仿测度 $\mu_{M,D}$, 本文获得使数字集 D 具有谱性的一些条件, 为这个猜测的成立提供了依据. 另外, 本文所得的结果在某些情形下也推广许多已知的相应结果.

关键词 自仿测度 谱性 和谐对 数字集

MSC (2010) 主题分类 28A80, 42C05, 46C05

1 引言

对于 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支撑的概率测度 μ , 如果存在一个离散集合 $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ 使得 $E(\Lambda) := \{e(\lambda \cdot x) = e^{2\pi i \lambda \cdot x} : \lambda \in \Lambda\}$ 形成 Hilbert 空间 $L^2(\mu)$ 中的正交基, 则称 μ 为谱测度, 集合 Λ 称为 μ 的一个谱, 也称 (μ, Λ) 为谱对. 熟知 (μ, Λ) 是谱对当且仅当 $\sum_{\lambda \in \Lambda} |\hat{\mu}(\xi + \lambda)|^2 = 1$ 对于所有的 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 都成立, 这里 $\hat{\mu}$ 表示测度 μ 的 Fourier 变换.

对于一个有限集合 $B \subset \mathbb{R}^n$, 它的基数记为 $|B|$. 令 $\delta_B := \frac{1}{|B|} \sum_{b \in B} \delta_b$, 其中 δ_b 表示在 b 点的 Dirac 测度, 如果 B 上规范的计数测度 δ_B 是谱测度, 则称 B 为谱集. 已经知道 δ_B 的任何谱都是有限的, 而且 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是 δ_B 的一个谱当且仅当 (B, S) 是和谐对 (参见文献 [1, 命题 4.3.3]). 回忆 $\mathbb{R}^n$ 中具有相同基数 q 的两个集合 B 和 S , 如果 $q \times q$ 阶矩阵 $H_{B,S} := [q^{-1/2} e(b \cdot s)]_{b \in B, s \in S}$ 是酉矩阵, 即 $H_{B,S} H_{B,S}^* = I_q$, 其中 “*” 表示共轭转置, 则称 (B, S) 是和谐对. 令

$$m_B(x) := \frac{1}{|B|} \sum_{b \in B} e^{2\pi i b \cdot x}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

则

$$\hat{\delta}_B(\xi) = \int e^{2\pi i x \cdot \xi} d\delta_B(x) = m_B(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

这表明下列叙述是等价的 (参见文献 [1, 第 3.2 小节] 和 [2, 第 199 页]):

(i) (B, S) 是和谐对;

英文引用格式: Wang Q, Li J L. Spectrality of digit sets and spectral self-affine measures (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 703–712, doi: 10.1360/SCM-2016-0720

- (ii) 对于任意的非奇异矩阵 $R \in M_n(\mathbb{R})$, $(RB, R^{*-1}S)$ 是和谐对;
- (iii) 对于任意不同的 $s_1, s_2 \in S$, 都有 $m_B(s_1 - s_2) = 0$;
- (iv) 对于任意的 $\xi \in \mathbb{R}^n$, 都有 $\sum_{s \in S} |m_B(\xi + s)|^2 = 1$;
- (v) (δ_B, S) 是谱对.

本文将确定与谱自仿测度相关的数字集的谱性, 其中所考虑的自仿测度是满足如下等权自仿恒等式的唯一概率测度 $\mu := \mu_{M,D}$:

$$\mu = \frac{1}{|D|} \sum_{d \in D} \mu \circ \phi_d^{-1}, \quad (1.3)$$

其中 $\phi_d(x) = M^{-1}(x + d)$ 是一个仿射变换, $M \in M_n(\mathbb{R})$ 是一个扩张矩阵, $D \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有限数字集, 其基数为 $|D|$. 这样一个测度 $\mu_{M,D}$ 是支撑在仿射迭代函数系 $\{\phi_d(x)\}_{d \in D}$ 的吸引子或不变集 $T(M, D)$ 上, 其中 $T := T(M, D) \subset \mathbb{R}^n$ 是满足 $T = \bigcup_{d \in D} \phi_d(T)$ 的唯一非空紧集 (参见文献 [3]). 通常把上面提到的与迭代函数系 $\{\phi_d\}_{d \in D}$ 相关的有限集合 D 称为数字集, 这主要因为集合 D 的元素在吸引子或不变集 $T(M, D)$ 的表示式中起到数字的作用. 由 (1.3) 可知, 测度 $\mu_{M,D}$ 的 Fourier 变换 $\hat{\mu}_{M,D}(\xi)$ 为

$$\hat{\mu}_{M,D}(\xi) = \int e^{2\pi i x \cdot \xi} d\mu_{M,D}(x) = \prod_{j=1}^{\infty} m_D(M^{*-j}\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

而且它的零点集 $Z(\hat{\mu}_{M,D}) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \hat{\mu}_{M,D}(\xi) = 0\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} M^{*j}\Theta_0$, 其中 $\Theta_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : m_D(x) = 0\}$. 这表明自仿测度 $\mu_{M,D}$ 的谱性与 (1.1) 给出的函数 $m_D(\xi)$ 密切相关. 为了寻找可能的谱, 对于一个有限集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ 且 $0 \in S$, 通常需要引入共轭迭代函数系 $\{\psi_s(x) = M^*x + s\}_{s \in S}$. 用 $\Lambda(M, S)$ 表示 $\{\psi_s(x)\}_{s \in S}$ 在 0 点的扩张轨道, 即

$$\Lambda(M, S) := \left\{ \sum_{j=0}^k M^{*j}s_j : k \geq 0 \text{ 和所有的 } s_j \in S \right\}. \quad (1.5)$$

Jorgensen 和 Pedersen 在文献 [4] 中首次注意到, 对于某些确定的 M 、 D 和 S , 相应的 $\mu_{M,D}$ 是谱测度, 并且它的谱是 $\Lambda(M, S)$. 这是一个重要的发现, 因为一些关于 Fourier 分析的经典结果可以建立在分形集上. 之后, 关于 $\mu_{M,D}$ 谱性的研究在过去 20 年里受到人们更多的关注. 这一课题的研究也遗留了许多公开的未解决问题, 它们驱动着本文的研究.

首先回忆 Laba 和 Wang 的如下猜测 (参见文献 [5, 猜测 3.1]).

猜测 1.1 设 $M \in M_n(\mathbb{R})$ 是一个扩张矩阵, $D \subset \mathbb{R}^n$ 是有限数字集且 $0 \in D$. 假设 $n = 1$ 且 $\mu_{M,D}$ 是谱测度, 则 $M = N$ 对某一个 $N \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$ 成立. 进而, 数字集 D 满足 $D = \alpha \tilde{D}$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\tilde{D} \subset \mathbb{Z}$ 是模 N 的完全剩余类的补集, 即存在集合 $E \subset \mathbb{Z}$ 使得 $\tilde{D} \oplus E$ 是模 N 的完全剩余类.

Dutkay 等在文献 [6, 注记 3.7] 中注意到下面的反例:

$$M = 4 \quad \text{和} \quad D = \{0, 1, 8, 9\}, \quad (1.6)$$

这说明关于数字集 D 的猜测 1.1 是错误的. 然而 (1.6) 中的数字集 D 是谱集. 应该指出的是, (1.6) 中的例子仅是文献 [1, 第 77 页例 5] 和 [7, 例 3] 中所给例子的一种特殊情形. 随后, 通过设

$$\text{Per}(\hat{\delta}_D) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \hat{\delta}_D(x + \xi) = \hat{\delta}_D(x) \text{ 对于所有的 } x \in \mathbb{R}^n\}, \quad (1.7)$$

他们在文献 [6, 命题 3.9] 中证明了关于数字集 D 谱性的下列命题.

命题 1.2 设 $M \in M_n(\mathbb{R})$ 是一个扩张矩阵, $D \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有限数字集且 $0 \in D$. 假设 $\mu_{M,D}$ 有一个谱 Λ 具有下列性质: 存在 $a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{R}^n$ 和 $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_p \subseteq \text{Per}(\hat{\delta}_D)$ 使得

$$\Lambda = \bigcup_{j=1}^p (a_j + M^* \Lambda_j)$$

不交并, 且所有的 Λ_j 都是 $\mu_{M,D}$ 的谱, 则 $p = |D|$ 并且 $(\delta_D, \{M^{*-1}a_1, \dots, M^{*-1}a_p\})$ 是谱对.

鉴于命题 1.2 和上面的反例 (1.6), Dutkay 等在文献 [6, 猜测 3.10] 中把 Laba 和 Wang 关于数字集 D 的猜测 1.1 改写为下列形式.

猜测 1.3 设 $M \in M_n(\mathbb{R})$ 是一个扩张矩阵, $D \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有限数字集且 $0 \in D$. 假设 $n = 1$ 且 $\mu_{M,D}$ 是谱测度, 则 D 是谱集.

在猜测 1.3 的驱动下, 本文将进一步研究数字集 D 的谱性与谱自仿测度 $\mu_{M,D}$ 的关系. 首先在第 2 节给出命题 1.2 的一个推广. 作为应用, 我们证明, 如果谱测度 $\mu_{M,D}$ 有一个谱为 $\Lambda(M, S)$, 其中 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有限集合且 $0 \in S$, 则猜测 1.3 在任意维数下都是正确的. 接下来讨论维数 $n = 1$ 时数字集 D 的谱性. 按照 $D \subset \mathbb{Z}$ 和 $D \subset \mathbb{R}$, 文中分为两部分进行讨论. 第 3 节主要处理 $D \subset \mathbb{Z}$ 的情形, 而第 4 节主要处理 $D \subset \mathbb{R}$ 的情形. 在数字集 $D \subset \mathbb{Z}$ 时, 存在一些已知的结果可以用来确定 D 的谱性. 这里主要描述 D 的谱、整数 tiles 和 $T(M, D)$ 的谱性三者之间的一些联系. 第 4 节仅考虑 $|D| = 2, 3, 4$ 时的特殊情形. 相比而言, 情形 $|D| = 2, 3$ 是很容易处理的, 但情形 $|D| = 4$ 是比较复杂的, 它需要关于整数情形的相关结果. 总之, 文中的结果为猜测 1.3 的成立提供了充分的依据. 在某些情形下也推广了许多已知的相应结果.

2 $n \geq 1$ 时数字集 D 的谱性

本节首先将命题 1.2 推广到更一般的形式. 然后利用所得的结果来证明如果谱测度 $\mu_{M,D}$ 有一个谱为 $\Lambda(M, S)$, 其中 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有限集合且 $0 \in S$, 则猜测 1.3 在任意维数下都是正确的.

对于一个有限的集合 $B \subset \mathbb{R}^n$, 我们可以引入如下集合 B^* :

$$B^* := \{\gamma \in \mathbb{R}^n : \gamma \cdot b \in \mathbb{Z}, \text{ 对所有的 } b \in B\}. \quad (2.1)$$

集合 B^* 具有下列性质:

$$m_B(x + \gamma) = m_B(x) \text{ 对任意的 } \gamma \in B^* \text{ 和 } x \in \mathbb{R}^n \text{ 都成立}; \quad (2.2)$$

$$\text{如果 } B \subset \mathbb{Z}^n, \text{ 则 } \mathbb{Z}^n \subseteq B^*. \quad (2.3)$$

用上面相同的符号, 我们下面的引理 2.1.

引理 2.1 对于任意的有限集 $B \subset \mathbb{R}^n$, 有 $\text{Per}(m_B) = B^*$.

事实上, 由 (1.2)、(1.7) 和 (2.2), 可得 $B^* \subseteq \text{Per}(m_B)$. 如果 $\xi \in \text{Per}(m_B)$, 则 $m_B(\xi + x) = m_B(x)$ 对于所有的 $x \in \mathbb{R}^n$ 都成立. 取 $x = 0$, 得 $\sum_{b \in B} e^{2\pi i b \cdot \xi} = |B|$. 于是, $e^{2\pi i b \cdot \xi} = 1$ 且 $b \cdot \xi \in \mathbb{Z}$ 对所有的 $b \in B$ 都成立, 因此, $\text{Per}(m_B) \subseteq B^*$, 即引理 2.1 成立.

现在, 命题 1.2 可以推广为下列形式.

定理 2.2 设 $M \in M_n(\mathbb{R})$ 是一个扩张矩阵, D 和 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个有限集合. 令 $0 \in D \cap S$ 和 $S = \{s_1 = 0, s_2, \dots, s_N\}$, 则下面三个条件中的任何两个条件都隐含着第三个条件:

- (i) $(M^{-1}D, S)$ 是和谐对;
(ii) $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N \subseteq D^*$ 都是 $\mu_{M,D}$ 的谱;
(iii) 不交并 $\bigcup_{j=1}^N (M^*\Lambda_j + s_j)$ 是 $\mu_{M,D}$ 的一个谱, 其中 $\Lambda_j \subseteq D^*$ ($j = 1, 2, \dots, N$).

证明 (1) 条件 (i) 和 (ii) 隐含条件 (iii). 由和谐对的性质得

$$\sum_{j=1}^N |m_D(M^{*-1}(\xi + s_j))|^2 = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

且

$$m_D(M^{*-1}(s_1 - s_2)) = 0, \quad \forall s_1, s_2 \in S \quad \text{且} \quad s_1 \neq s_2. \quad (2.5)$$

由 (2.5) 可得 $\Lambda := \bigcup_{j=1}^N (M^*\Lambda_j + s_j)$ 是互不相交集合并集. 于是,

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Lambda} |\hat{\mu}_{M,D}(\xi + \lambda)|^2 &= \sum_{j=1}^N \sum_{\lambda \in M^*\Lambda_j + s_j} |\hat{\mu}_{M,D}(\xi + \lambda)|^2 = \sum_{j=1}^N \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |\hat{\mu}_{M,D}(\xi + M^*\lambda + s_j)|^2 \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |m_D(M^{*-1}(\xi + s_j) + \lambda)|^2 |\hat{\mu}_{M,D}(M^{*-1}(\xi + s_j) + \lambda)|^2 \\ &= \sum_{j=1}^N |m_D(M^{*-1}(\xi + s_j))|^2 \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |\hat{\mu}_{M,D}(M^{*-1}(\xi + s_j) + \lambda)|^2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

这里用到等式 $\hat{\mu}_{M,D}(\xi) = m_D(M^{*-1}\xi) \hat{\mu}_{M,D}(M^{*-1}\xi)$, 条件 $\Lambda_j \subseteq D^*$ ($j = 1, 2, \dots, N$), 以及性质 (2.2).

由条件 (ii), $(\mu_{M,D}, \Lambda_j)$ 是谱对, 等价地, $\sum_{\lambda \in \Lambda_j} |\hat{\mu}_{M,D}(M^{*-1}(\xi + s_j) + \lambda)|^2 = 1$ 对任意的 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 和每一个 $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ 都成立. 从而, 由 (2.4) 和 (2.6) 可得

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\hat{\mu}_{M,D}(\xi + \lambda)|^2 = \sum_{j=1}^N |m_D(M^{*-1}(\xi + s_j))|^2 = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.7)$$

这就表明 $\Lambda := \bigcup_{j=1}^N (M^*\Lambda_j + s_j)$ 是 $\mu_{M,D}$ 的一个谱, 即条件 (iii) 成立.

(2) 条件 (i) 和 (iii) 隐含条件 (ii). 由条件 (iii) 首先知道, 对于每一个 $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ 都有

$$E(M^*\Lambda_j + s_j) \subseteq E\left(\bigcup_{j=1}^N (M^*\Lambda_j + s_j)\right),$$

因此, $E(M^*\Lambda_j + s_j)$ 是 $L^2(\mu_{M,D})$ 中的正交指数系, 从而, $E(M^*\Lambda_j)$ 也是 $L^2(\mu_{M,D})$ 中的正交指数系, 等价地,

$$M^*\Lambda_j - M^*\Lambda_j \subseteq Z(\hat{\mu}_{M,D}) \cup \{0\} \quad (2.8)$$

或者

$$\Lambda_j - \Lambda_j \subseteq \bigcup_{j=0}^{\infty} M^{*j} \Theta_0 \cup \{0\} = \Theta_0 \cup \{0\} \cup Z(\hat{\mu}_{M,D}). \quad (2.9)$$

对于任意的 $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_j \subseteq D^*$ 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 总有 $(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot d \in \mathbb{Z}$ 对于所有的 $d \in D$ 都成立, 所以, $m_D(\lambda_1 - \lambda_2) = 1$ 且 $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \Theta_0$. 由 (2.9) 可得 $\Lambda_j - \Lambda_j \subseteq Z(\hat{\mu}_{M,D}) \cup \{0\}$, 进而, $E(\Lambda_j)$ 是 $L^2(\mu_{M,D})$ 中的正交指数系, 等价地, 对于每一个 $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, 有

$$Q_{\Lambda_j}(\xi) := \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |\hat{\mu}_{M,D}(\xi + \lambda)|^2 \leq 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.10)$$

我们的目的是证明对于每一个 $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, $Q_{\Lambda_j}(\xi) = 1$ 对于所有的 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 都成立. 为了达到这个目的, 只需注意到 (2.6)、(2.10) 以及条件 (i) 和 (iii) 隐含着下列结论:

$$\begin{aligned} 1 &= |m_D(\xi)|^2 Q_{\Lambda_1}(\xi) + |m_D(\xi + M^{*-1}s_2)|^2 Q_{\Lambda_2}(\xi + M^{*-1}s_2) \\ &\quad + \cdots + |m_D(\xi + M^{*-1}s_N)|^2 Q_{\Lambda_N}(\xi + M^{*-1}s_N) \\ &\leq |m_D(\xi)|^2 + |m_D(\xi + M^{*-1}s_2)|^2 + \cdots + |m_D(\xi + M^{*-1}s_N)|^2 \\ &= 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (2.11)$$

现在, 函数 $Q_{\Lambda_j}(\xi)$ 有一个到空间 $\mathbb{C}^n$ 上的整解析延拓, 此 $\mathbb{C}^n$ 上的解析函数在虚轴方向具有线性指数增长 (参见文献 [4, 引理 4.2]). 同样, 如果允许 ξ 在 $\mathbb{C}^n$ 上变化, 那么函数 $m_D(\xi)$ 也是 $\mathbb{C}^n$ 上的解析函数. 此时可证, 零点集 $\Theta_0 := \{\xi \in \mathbb{R}^n : m_D(\xi) = 0\}$ 和 $Z(Q_{\Lambda_j}) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : Q_{\Lambda_j}(\xi) = 0\}$ 都是内部为空集的闭集 (参见文献 [8, 引理 2.2]). 通过分析 (2.11) 中函数 $m_D(\xi)$ 和 $Q_{\Lambda_j}(\xi)$ 的零点集合, 我们容易得到对每一个 $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, $Q_{\Lambda_j}(\xi) = 1$ 对于所有的 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 都成立 (参见文献 [8]), 即条件 (ii) 成立.

(3) 条件 (ii) 和 (iii) 隐含条件 (i). 由 (2.6)、条件 (ii) 和 (iii) 可得

$$1 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |\hat{\mu}_{M,D}(\xi + \lambda)|^2 = \sum_{j=1}^N |m_D(M^{*-1}(\xi + s_j))|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2.12)$$

这说明 $(M^{-1}D, S)$ 是一个和谐对. $\square$

作为定理 2.2 的一个应用, 我们有下列结论, 此结论说明, 如果谱测度 $\mu_{M,D}$ 有一个谱为 $\Lambda(M, S)$, 其中 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有限集合且 $0 \in S$, 则猜测 1.3 在任意维数下都是成立的.

推论 2.3 设 $M \in M_n(\mathbb{R})$ 是一个扩张矩阵, $D \subset \mathbb{R}^n$ 是有限数字集且 $0 \in D$. 如果存在一个有限集合 $S \subset \mathbb{R}^n, 0 \in S$ 使得 $\Lambda(M, S) \subseteq D^*$ 是 $\mu_{M,D}$ 的一个谱, 并且

$$M^*(\Lambda(M, S) - \Lambda(M, S)) \cap (S - S) = \{0\}, \quad (2.13)$$

则 D 是一个谱集而且它的一个谱为 $M^{*-1}S$.

证明 在定理 2.2 中, 令 $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \cdots = \Lambda_N = \Lambda(M, S)$, 则条件 (ii) 成立. 关于条件 (iii), 我们首先有

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=1}^N (M^*\Lambda_j + s_j) &= \bigcup_{j=1}^N (M^*\Lambda(M, S) + s_j) \\ &= M^*\Lambda(M, S) + S \\ &= M^*\Lambda(M, S) \oplus S \quad (\text{利用 (2.13)}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

这就表明 $\bigcup_{j=1}^N (M^*\Lambda_j + s_j)$ 是不交并. 由 (1.5) 中 $\Lambda(M, S)$ 的定义知, $M^*\Lambda(M, S) + S = \Lambda(M, S)$, 因此条件 (iii) 成立. 这样, 由定理 2.2 可得条件 (i) 也成立, 即 D 是一个谱集, 并且它的一个谱为 $M^{*-1}S$. $\square$

3 $n = 1$ 时数字集 $D \subset \mathbb{Z}$ 的谱性

在数字集 $D \subset \mathbb{Z}$ 的情形下, 确定 D 的谱性要比情形 $D \subset \mathbb{R}$ 好一点, 因为关于整数 tiles (参见文献 [9]) 与关于谱 tiling 之间关系 (参见文献 [10, 11]) 的结果可以被广泛地应用. 文献 [1, 第 4 章] 和 [7]

首先考虑了 $\mu_{M,D}$ -正交性与和谐对之间的关系, 并且建立了它们之间的一个重要关系. 在整数 tiles 的情形下, 许多熟知的结果源于 Coven 和 Meyerowitz [9]. 即便如此, 仍有不少问题与 D 的谱性有关. 本节首先给出文献 [5] 中所包含的一个结果作为定理 3.1. 然后我们主要描述 D 的谱性、整数 tiles 和 $T(M, D)$ 的谱性三者之间的一些联系.

定理 3.1 对于一个有限数字集 $D \subset \mathbb{Z}$, $0 \in D$ 且 $|D|$ 有不超过两个不同的素数因子. 如果存在一个整数 N 且 $|N| > 1$ 使得 D 是模 N 的完全剩余类的补集, 则 D 是谱集.

事实上, 从文献 [5, 定理 1.4] 的证明 (也可参见文献 [12]) 可以观察到下面构造谱的详细过程: 用 $\Phi_n(z)$ 表示 n 次割圆多项式, $D(z) = \sum_{d \in D} z^d$ 表示 D 的符号多项式.

(1) 如果 $|D| = p^\alpha$, 即 $|D|$ 是一个素数幂, 则集合

$$P := \{p^k : \Phi_{p^k}(z) \mid D(z), k \leq \alpha\} \quad (3.1)$$

满足性质 $|P| = \alpha$, 并且对所有使得 $p^k \in P$ 的 k 都有 $\Phi_{p^k}(z) \mid D(z)$ (参见文献 [9]). 令 $P = \{p^{k_1}, p^{k_2}, \dots, p^{k_\alpha}\}$, 其中 $k_1 < k_2 < \dots < k_\alpha$. 定义

$$L := \left\{ \sum_{j=1}^{\alpha} \frac{a_j}{p^{k_j}} : 0 \leq a_j < p \right\}, \quad (3.2)$$

则 $NL \subset \mathbb{Z}$ 且 L 是 D 的一个谱.

(2) 如果 $|D| = p^\alpha q^\beta$, 则集合

$$P := \{p^k : \Phi_{p^k}(z) \mid D(z), k \leq \alpha\} \quad \text{和} \quad Q := \{q^l : \Phi_{q^l}(z) \mid D(z), l \leq \beta\} \quad (3.3)$$

满足性质 $|P| = \alpha, |Q| = \beta$, 并且对所有使得 $p^k \in P, q^l \in Q$ 的 k 和 l 都有 $\Phi_{p^k q^l}(z) \mid D(z)$ (参见文献 [9]). 令 $P = \{p^{k_1}, p^{k_2}, \dots, p^{k_\alpha}\}$ 和 $Q = \{q^{l_1}, q^{l_2}, \dots, q^{l_\beta}\}$, 其中 $k_1 < k_2 < \dots < k_\alpha$ 和 $l_1 < l_2 < \dots < l_\beta$. 定义

$$L := \left\{ \sum_{j=1}^{\alpha} \frac{a_j}{p^{k_j}} + \sum_{j=1}^{\beta} \frac{b_j}{q^{l_j}} : 0 \leq a_j < p, 0 \leq b_j < q \right\}, \quad (3.4)$$

则 $NL \subset \mathbb{Z}$ 且 L 是 D 的一个谱.

需要指出的是, 上面的构造已经被许多作者用来刻画 tile 数字集和自相似 tiles 的谱性 (参见文献 [13, 14] 和其中被引用的参考文献). 注意到平移变换不改变一个有限集合的谱性, 不失一般性, 当 $D \subset \mathbb{Z}$ 时, 可将数字集 D 记为

$$D = \{0, d_2, d_3, \dots, d_{|D|}\} \subset \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\} \quad \text{和} \quad 1 \leq d_2 < d_3 < \dots < d_{|D|}.$$

因此, 如果存在一个正整数 $N > 1$ 和一个集合 $E \subset \mathbb{Z}^+$ 使得 $D \oplus E = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, 则 D 是谱集且它的谱 $\Lambda \subset \mathbb{Z}/N$. 这个结果由 Pedersen 和 Wang [15] 得到 (也可参见文献 [14, 定理 2.3]). 同样地, 注意到对所有的 $n \geq 1$, 如果 $D \subset \mathbb{Z}^n$ 是一个 tile 数字集, 则有下面熟知的关系:

$$\mu_{M,D} \text{ 是谱测度} \Leftrightarrow T(M, D) \text{ 是谱集}. \quad (3.5)$$

更精确地, Γ 是 $\mu_{M,D}$ 的一个谱当且仅当 Γ 是 $T(M, D)$ 的一个谱 (参见文献 [1, 第 75 页] 和 [7, 第 636 页]). 因此, 对于一个 tile 数字集 D , 关于 $T(M, D)$ 谱性的研究与关于 $\mu_{M,D}$ 谱性的研究是相同的, 并

且关于 $T(M, D)$ 所得的结果与关于 $\mu_{M, D}$ 所得的结果在一定程度上可以互相转化. 此外, 对于一个有限集合 $D \subset \mathbb{Z}^n$, 如果 $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有限集且满足 $(\Gamma - \Gamma) \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$, 则下面熟知的关系成立:

$$([0, 1]^n + D, \mathbb{Z}^n + \Gamma) \text{ 是谱对} \Leftrightarrow (D, \Gamma) \text{ 是和谐对} \Leftrightarrow D \text{ 是谱集且谱为 } \Gamma, \quad (3.6)$$

参见文献 [16] 和其中被引用的参考文献. 上面所列的关系式有助于进一步研究相关的谱性问题. 联系到猜测 1.3, 我们在维数 $n = 1$ 时给出下面的定理 3.2 作为上面这些联系的一个应用.

定理 3.2 设 $M \in \mathbb{Z}$ 且 $|M| > 1$ 是一个素数. 如果 $D \subset \mathbb{Z}$ 是一个数字集, 基数 $|D| = |M|$, $0 \in D$, 并且 $Z(\hat{\mu}_{M, D}) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ 或者存在两个数 $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 - s_2 \in \mathbb{Z}$ 使得两个指数函数 $e^{2\pi i s_1 x}$ 和 $e^{2\pi i s_2 x}$ 在空间 $L^2(\mu_{M, D})$ 中是正交的, 则 D 是谱集.

证明 在所给条件下, 从文献 [17, 定理 1] 的证明中知, 存在非负整数 $r \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $D = M^r \tilde{D}$, 其中 $\tilde{D}$ 是模 M 的一个完全剩余类 (参见文献 [18]). 设 $\tilde{S}$ 是模 M 的任意一个完全剩余类, 则 $(M^{-1} \tilde{D}, \tilde{S})$ 是一个和谐对 (也称为 Gauss 和谐对, 参见文献 [19, 例 2.4(a)] 和 [2, 命题 2.3]). 这说明 D 是一个谱集且它的一个谱为 $M^{-(r+1)} \tilde{S}$. $\square$

本节最后应该指出的是, 在 $\mathbb{R}^n$ 或者 $\mathbb{Z}^n$ 中一个有限集合的谱性质也可以分别通过具有给定性质的一个连续函数的存在性和一组局部平移的存在性来刻画 (参见文献 [6, 定理 2.5 和 2.6] 和 [11, 定理 2.11] 中关于一维整数情形的结果).

4 $n = 1$ 时数字集 $D \subset \mathbb{R}$ 的谱性

在一般情形, 即数字集 $D \subset \mathbb{R}$ 的情形下, 确定 $D \subset \mathbb{R}$ 的谱性是一项艰难的任务. 它需要单位根之和为零的结构性质 (参见文献 [7])、Hadamard 矩阵的存在性, 以及上面提到的关系. 仅有部分结果涉及 $D \subset \mathbb{R}$ 的谱性. 由于平移和伸缩变换不改变有限数字集的谱性, 当 $D \subset \mathbb{R}$ 时, 不失一般性, 可设 $0, 1 \in D$. 因此, 当 $D \subset \mathbb{R}$ 时, 可将数字集 D 记为 $D = \{0, 1, d_3, \dots, d_{|D|}\} \subset \mathbb{R}$ 且 $1 < d_3 < \dots < d_{|D|}$. 本节首先从 Dutkay 和 Jorgensen 的一个相关结果开始, 然后分别就 $|D| = 2, 3, 4$ 时提供一些使得 D 为谱集的条件. 注意到整数情形下, Dutkay 和 Haussermann^[20, 21] 通过引入局部平移组成的酉群来描述 $D \subset \mathbb{Z}$ 和 $|D| = 2, 3, 4, 5$ 时的谱性. 下面主要考虑一般的情形 $D \subset \mathbb{R}$, 而且所用的方法不同于整数情形. 对于情形 $|D| = 4$ 且 $D = \{0, 1, d_3, d_4\} \subset \mathbb{R}$, 我们首先需要仔细地分析 6 个相关的方程, 目的是为了得到关于 d_3 和 d_4 的性质, 然后利用和谐对的性质从整数情形获得所期望的结果. 我们相信这里的讨论为进一步处理实数情形提供了一种可靠的方法.

最近, Dutkay 和 Jorgensen 在文献 [22, 命题 3.5] 中得到了下列结果.

定理 4.1 设 $D = \{0, 1, 2, \dots, k-2, d\}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, $d \in \mathbb{R}$, 并且 $d \neq 0, 1, 2, \dots, k-2$, 则 D 是谱集当且仅当 d 是一个有理数且它的简化形式为 $d = p/q$ 时, $p + q \equiv 0 \pmod{k}$.

下面主要考虑 $|D| = 2, 3, 4$ 时 D 的谱性.

首先注意到, 如果 $D \subset \mathbb{R}$ 且 $|D| = 2$, 则 D 是一个谱集, 即 $\mathbb{R}$ 中的所有两元素数字集都是谱集. 因此, 在 $|D| = 2$ 的情形下, 猜测 1.3 成立 (此时不需要关于 $\mu_{M, D}$ 是谱测度的假设). 接下来的定理 4.2 表明, 当 $|D| = 3$ 时, 如果关于 $\mu_{M, D}$ 谱性的条件用一个更弱的条件来代替, 则上述猜测 1.3 仍然成立.

定理 4.2 设 $M \in \mathbb{R}$ 且 $|M| > 1$, 数字集 $D \subset \mathbb{R}$, $|D| = 3$, $0 \in D$. 若下面两个条件之一成立:

(i) $Z(\hat{\mu}_{M, D}) \neq \emptyset$;

(ii) 存在两个数 $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ 使得指数函数 $e^{2\pi i s_1 x}$ 和 $e^{2\pi i s_2 x}$ 在空间 $L^2(\mu_{M, D})$ 中是正交的, 则 D 是一个谱集.

事实上, 令 $D = \{0, 1, d_3\}$, $d_3 \neq 0, 1$. 在所给条件下, 始终存在 $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 使得 $m_D(x_0) = 0$, 即

$$1 + e^{2\pi i x_0} + e^{2\pi i x_0 d_3} = 0. \quad (4.1)$$

方程 (4.1) 有一个解 $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 当且仅当 d_3 是一个有理数且它的简化形式为 $d_3 = p/q$ 时, $p + q \equiv 0 \pmod{3}$. 再结合定理 4.1, 即得定理 4.2 的结论.

定理 4.3 设 $D = \{0, 1, d_3, d_4\} \subset \mathbb{R}$, $d_3, d_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ 且 $d_3 \neq d_4$, 则 D 是谱集当且仅当 d_3 和 d_4 是有理数, 并且它们的简化形式是 $d_3 = p_1/q_1$, $d_4 = p_2/q_2$ 时具有如下性质:

$$\{q_1 q_2, p_1 q_2, p_2 q_1\} = 2^\tau \{2^v c_1, c_2, c_2 + 2^v c_3\}, \quad (4.2)$$

其中 τ 是一个非负整数, c_1, c_2 和 c_3 是奇数, v 是正整数. 在 D 是谱集的情形下, D 的谱为 $(q_1 q_2 / R)L$, 其中 $R = 2^{\tau+b+v+1}d$, $L = 2^b\{0, n_1, n_1 + 2^v n_2, 2^v n_3\}$, 这里 b 是一个非负整数, n_1, n_2 和 n_3 是奇数, 并且当 $c = \gcd\{c_1, c_2, c_3\}$, $n = \gcd\{n_1, n_2, n_3\}$ 时, d 是一个可以整除 $c_1 n, c_3 n, n_2 c$ 和 $n_3 c$ 的非零整数.

证明 设 $L = \{0, l_1, l_2, l_3\} \subset \mathbb{R}$ 是四元素集合, 其中 $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 是三个不同的数. 于是, (D, L) 是和谐对当且仅当

$$\begin{cases} 1 + e^{2\pi i l_1} + e^{2\pi i l_2} + e^{2\pi i l_3} = 0, \\ 1 + e^{2\pi i d_3 l_1} + e^{2\pi i d_3 l_2} + e^{2\pi i d_3 l_3} = 0, \\ 1 + e^{2\pi i d_4 l_1} + e^{2\pi i d_4 l_2} + e^{2\pi i d_4 l_3} = 0, \\ 1 + e^{2\pi i (d_3-1)l_1} + e^{2\pi i (d_3-1)l_2} + e^{2\pi i (d_3-1)l_3} = 0, \\ 1 + e^{2\pi i (d_4-1)l_1} + e^{2\pi i (d_4-1)l_2} + e^{2\pi i (d_4-1)l_3} = 0, \\ 1 + e^{2\pi i (d_3-d_4)l_1} + e^{2\pi i (d_3-d_4)l_2} + e^{2\pi i (d_3-d_4)l_3} = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

(4.3) 中的第一个方程给出

$$A_1 \begin{cases} l_1 = \frac{1}{2} + k_1, \\ l_2 = a_1 + k_2, \\ l_3 = \frac{1}{2} + a_1 + k_3, \end{cases} \quad \text{或} \quad A_2 \begin{cases} l_1 = \frac{1}{2} + a_1 + k_3, \\ l_2 = \frac{1}{2} + k_1, \\ l_3 = a_1 + k_2, \end{cases} \quad \text{或} \quad A_3 \begin{cases} l_1 = a_1 + k_2, \\ l_2 = \frac{1}{2} + a_1 + k_3, \\ l_3 = \frac{1}{2} + k_1, \end{cases}$$

这里 $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$, $a_1 \in \mathbb{R}$, 即 (4.3) 中的第一个方程成立当且仅当三个条件 A_1 、 A_2 和 A_3 之一成立. 类似地, (4.3) 中的第二个方程给出

$$B_1 \begin{cases} d_3 l_1 = \frac{1}{2} + k_4, \\ d_3 l_2 = a_2 + k_5, \\ d_3 l_3 = \frac{1}{2} + a_2 + k_6, \end{cases} \quad \text{或} \quad B_2 \begin{cases} d_3 l_1 = \frac{1}{2} + a_2 + k_6, \\ d_3 l_2 = \frac{1}{2} + k_4, \\ d_3 l_3 = a_2 + k_5, \end{cases} \quad \text{或} \quad B_3 \begin{cases} d_3 l_1 = a_2 + k_5, \\ d_3 l_2 = \frac{1}{2} + a_2 + k_6, \\ d_3 l_3 = \frac{1}{2} + k_4, \end{cases}$$

这里 $k_4, k_5, k_6 \in \mathbb{Z}$, $a_2 \in \mathbb{R}$, 即 (4.3) 中的第二个方程成立当且仅当三个条件 B_1 、 B_2 和 B_3 之一成立. 注意, 如果把 l_1, l_2 和 l_3 分别用 $d_3 l_1, d_3 l_2$ 和 $d_3 l_3$ 代替, 则 (4.3) 中第二个方程的解可以从第一个方程中得到. 同样, (4.3) 中第三个方程给出三个条件分别用 C_1, C_2 和 C_3 表示, 其中涉及的整数记为 $k_7, k_8, k_9 \in \mathbb{Z}$, 实数记为 $a_3 \in \mathbb{R}$; (4.3) 中第四个方程给出三个条件分别用 D_1, D_2 和 D_3 表示, 其中涉

及的整数记为 k_{10} 、 k_{11} 和 k_{12} , 实数记为 a_4 ; (4.3) 中第五个方程给出三个条件分别用 E_1 、 E_2 和 E_3 表示, 其中涉及的整数记为 k_{13} 、 k_{14} 和 k_{15} , 实数记为 a_5 ; (4.3) 中第六个方程给出三个条件分别用 F_1 、 F_2 和 F_3 表示, 其中涉及的整数记为 k_{16} 、 k_{17} 和 k_{18} , 实数记为 a_6 . 我们可以将这些条件明确的表示出来. 因此, D 是谱集当且仅当存在三个不同的数 $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 使得关于 l_1 、 l_2 和 l_3 的 $3^6 = 729$ 种情形:

$$A_i B_j C_k D_l E_h F_p, \quad i, j, k, l, h, p \in \{1, 2, 3\} \quad (4.4)$$

中至少有一种情形成立.

注意, 在这 729 种情形中, 可以直接验证许多情形例如下面的 693 种情形 (1)–(6) 不成立:

- (1) $A_i B_i C_i D_l E_h F_p$ ($i, l, h, p \in \{1, 2, 3\}$), 有 $3^4 = 81$ 种情形;
- (2) $A_i B_j C_k D_l E_l F_l$ ($i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$), 这里不包含 $i = j = k$ 的情形; 有 $3^4 - 3^2 = 72$ 种情形;
- (3) $A_i B_i C_k D_l E_h F_p$ ($i, k, l, h, p \in \{1, 2, 3\}$), 这里 $k \neq i$, 不包含 $h = p = i$ 的情形, 也不包含 $l = h = p$ 的情形, 共有 $3^5 - 3^4 - 3 \times 2 \times 3 - 3 \times 2 \times 2 = 132$ 种情形;
- (4) $A_i B_j C_j D_l E_h F_p$ ($i, j, l, h, p \in \{1, 2, 3\}$), 这里 $i \neq j$, 不包含 $l = h = j$ 的情形, 也不包含 $l = h = p$ 的情形, 共有 132 种情形;
- (5) $A_i B_j C_i D_l E_h F_p$ ($i, j, l, h, p \in \{1, 2, 3\}$), 这里 $j \neq i$, 不包含 $l = p = i$ 的情形, 也不包含 $l = h = p$ 的情形, 共有 132 种情形;
- (6) $A_i B_j C_k D_l E_h F_p$ ($i, j, k, l, h, p \in \{1, 2, 3\}$), 这里 i, j 和 k 是三个互不相同的数, 不包含 $l = h = p$ 的情形, 共有 $(3!) \times 3^3 - (3!) \times 3 = 144$ 种情形.

我们仅需要处理下面 36 种情形:

$$A_i B_i C_k D_l E_i F_i \quad (k \neq i, l \neq i, k, l \in \{1, 2, 3\}) \text{ 有 12 种情形;} \quad (4.5)$$

$$A_i B_j C_j D_j E_j F_p \quad (i \neq j, p \neq j, i, j, p \in \{1, 2, 3\}) \text{ 有 12 种情形;} \quad (4.6)$$

$$A_i B_j C_i D_i E_h F_i \quad (j \neq i, h \neq i, i, j, h \in \{1, 2, 3\}) \text{ 有 12 种情形.} \quad (4.7)$$

也就是说, D 是谱集当且仅当存在三个不同的数 $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 使得 (4.5)–(4.7) 中的 36 种情形里至少有一种情形成立. 36 种情形里的每一种都包含 A_i ($i = 1, 2, 3$), 这样就给出了 l_1 、 l_2 和 l_3 的表示式. 例如, 任何包含 A_1 的情形意味着

$$l_1 = \frac{1}{2} + k_1, \quad l_2 = a_1 + k_2, \quad l_3 = \frac{1}{2} + a_1 + k_3. \quad (4.8)$$

因此, 足以寻找 d_3 和 d_4 使得在上述 36 种情形中之一成立. 但是, 如果交换 d_3 和 d_4 , 可知 (4.5) 中的 12 种情形与 (4.7) 中的 12 种情形是相同的. 所有 (4.5) 和 (4.7) 中的 24 种情形可以用相同的方法去讨论, 而 (4.6) 中的 12 种情形可以用同一种方式去讨论. 通过考虑 (i) (4.5) 和 (4.7) 中 24 种情形之一 $A_1 B_1 C_2 D_2 E_1 F_1$; (ii) (4.6) 中 12 种情形之一 $A_2 B_1 C_1 D_1 E_1 F_2$, 我们得到 d_3 和 d_4 是有理数. 事实上, 所有 36 种情形都给出我们所期望的结果, 即 d_3 和 d_4 必须是有理数. 于是可记 d_3 和 d_4 的简化形式为 $d_3 = p_1/q_1$ 和 $d_4 = p_2/q_2$, 此时,

$$D = \frac{1}{q_1 q_2} \{0, q_1 q_2, p_1 q_2, p_2 q_1\} := \frac{1}{q_1 q_2} \tilde{D}. \quad (4.9)$$

这样, D 是谱集当且仅当 $\tilde{D} = \{0, q_1 q_2, p_1 q_2, p_2 q_1\} \subset \mathbb{Z}$ 是谱集. 对于整数集合 $\tilde{D} \subset \mathbb{Z}$, 应用文献 [20, 定理 4.3] 和 [21, 定理 1.20] 中的结果, 我们可得定理 4.3 的结论. $\square$

最后容易看出, 当 $D = \{0, 1, 2, a\}$ ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$), 即 $d_3 = 2$, $d_4 = a$ 时, 由定理 4.3 即知, D 是谱集当且仅当 a 是一个有理数且它的简化形式为 $a = p/q$ 时, $p + q \equiv 0 \pmod{4}$.

参考文献

- 1 Li J L. Spectral sets and spectral self-affine measures. PhD Thesis. Hong Kong: The Chinese University of Hong Kong, 2004
- 2 Li J L. Spectral self-affine measures in $\mathbb{R}^n$. Proc Edinb Math Soc (2), 2007, 50: 197–215
- 3 Hutchinson J E. Fractals and self-similarity. Indiana Univ Math J, 1981, 30: 713–747
- 4 Jorgensen P E T, Pedersen S. Dense analytic subspaces in fractal L^2 -spaces. J Anal Math, 1998, 75: 185–228
- 5 Laba I, Wang Y. On spectral Cantor measures. J Funct Anal, 2002, 193: 409–420
- 6 Dutkay D E, Han D, Jorgensen P E T. Orthogonal exponentials, translations, and Bohr completions. J Funct Anal, 2009, 257: 2999–3019
- 7 Li J L. $\mu_{M,D}$ -Orthogonality and compatible pair. J Funct Anal, 2007, 244: 628–638
- 8 Li J L. Duality relation on spectra of self-affine measures. Math Nachr, 2017, 290: 867–875
- 9 Coven E, Meyerowitz A. Tiling the integers with translates of one finite set. J Algebra, 1999, 212: 161–174
- 10 李建林. 谱与 Tilings 的共轭性质. 中国科学: 数学, 2010, 40: 21–32
- 11 Dutkay D E, Lai C K. Some reductions of the spectral set conjecture to integers. Math Proc Cambridge Philos Soc, 2014, 156: 123–135
- 12 Laba I. The spectral set conjecture and multiplicative properties of roots of polynomials. J Lond Math Soc (2), 2001, 65: 661–671
- 13 Lai C K, Lau K S, Rao H. Spectral structure of digit sets of self-similar tiles on $\mathbb{R}$. Trans Amer Math Soc, 2013, 365: 3831–3850
- 14 Fu X Y, He X G, Lau K S. Spectrality of self-similar tiles. Constr Approx, 2015, 42: 519–541
- 15 Pedersen S, Wang Y. Universal spectra, universal tiling sets and the spectral set conjecture. Math Scand, 2001, 88: 246–256
- 16 Li J L. On characterizations of spectra and tilings. J Funct Anal, 2004, 213: 31–44
- 17 Li J L. Spectral self-affine measures with prime determinant. Monatsh Math, 2013, 169: 397–407
- 18 Li J L. Sufficient conditions for the spectrality of self-affine measures with prime determinant. Studia Math, 2014, 220: 73–86
- 19 Strichartz R. Mock Fourier series and transforms associated with certain Cantor measures. J Anal Math, 2000, 81: 209–238
- 20 Dutkay D E, Haussermann J. Local translations associated to spectral sets. In: Operator Methods in Wavelets, Tilings, and Frames. Contemporary Mathematics, vol. 626. Providence: Amer Math Soc, 2014, 107–120
- 21 Dutkay D E, Haussermann J. Tiling properties of spectra of measures. Math Z, 2015, 280: 525–549
- 22 Dutkay D E, Jorgensen P E T. Spectra of measures and wandering vectors. Proc Amer Math Soc, 2015, 143: 2403–2410

Spectrality of digit sets and spectral self-affine measures

WANG Qi & LI JianLin

Abstract The present paper determines the spectrality of digit set D relating to a spectral self-affine measure $\mu_{M,D}$. This is motivated by a conjecture of Dutkay, Han and Jorgensen. The conjecture states that D is always a spectral set if $\mu_{M,D}$ is a spectral measure in the dimension $n = 1$. For a self-affine measure $\mu_{M,D}$, we obtain several conditions for the digit set D to be a spectral set. The result here provides some supportive evidence for the conjecture. It also generalizes the corresponding known result in a certain case.

Keywords self-affine measure, spectrality, compatible pair, digit set

MSC(2010) 28A80, 42C05, 46C05

doi: 10.1360/SCM-2016-0720