方差保费准则下最优分红、注资和再保险策略

姚定俊^{①②}, 汪荣明^{③*}, 徐林^④

① 南京财经大学金融学院, 南京 210023;

② 现代服务业协同创新中心, 南京 210023;

③ 华东师范大学金融与统计学院, 上海 200241;

④ 安徽师范大学数学计算机科学学院, 芜湖 241003

E-mail: yaodingjun@sina.cn, rmwang@stat.ecnu.edu.cn, xulinahnu@gmail.com

收稿日期: 2013-10-21; 接受日期: 2014-04-06; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11101205, 11231005 和 11201006)、教育部人文社会科学研究 (批准号: 12YJC910012)、教育部高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20110076110004)、高等学校学科创新引智计划 (批准号: B14019)、上海市优秀学术带头人计划 (批准号: 14XD1401600) 和江苏高校优势学科建设工程资助项目

摘要 本文研究保险公司的最优分红、注资和再保险策略问题. 保险公司可以通过再保险安排控制自身的风险暴露, 它与再保险公司在方差保费准则下采用不同的参数进行费率定价. 保险公司管理者也可以通过分红或注资控制公司资产, 控制过程会消耗比例交易费和固定交易费. 破产前分红现值与注资现值期望之差视为保险公司的价值. 在最大化公司价值目标下, 利用脉冲控制理论, 本文找到最优的分红、注资和再保险策略及公司价值的最大值.

关键词 方差保费准则 分红 注资 比例再保险 交易费

MSC (2010) 主题分类 62P05, 93E20, 97M30

1 引言

从公司财务的角度来看, 可以把公司的价值定义为破产前分红现值的期望值, 自 De Finetti^[1] 首次研究保险公司的分红问题以来, 相关话题就逐渐受到学者们的重视. 由于注资也是公司管理风险的常用手段, 所以, 允许注资条件下的分红问题研究更加贴近现实. 此时公司的价值可以重新定义为破产前分红现值与注资现值之差的期望值. 为了最大化公司价值, 管理者需要找到最优的分红和注资策略. 例如, 文献 [2] 在扩散模型假设下研究了保险公司的最优分红和注资策略问题, 结果显示, 当公司盈余超过某临界值时, 超过的部分立即作为红利分发给股东; 当濒临破产时公司是否注资取决于模型的参数, 它们反映了公司的未来发展前景. 众多学者在其他风险模型下也取得了丰富的成果, 其中包括文献 [3-8] 等.

因为再保险是保险公司控制风险暴露的重要手段, 再保险参与下的最优分红和注资问题研究具有很强的理论价值和实际应用背景, 近期成果包括文献 [9-13] 等. 我们注意到, 这些文献都假设费率依照期望保费准则厘定. 这是因为一方面该准则在实务中应用广泛; 另一方面它便于数学上的处理. 事实上, 具有相同期望值的风险可能方差并不相同, 厘定费率时仅考虑期望而忽略方差有时未必合理, 而方差保费准则恰好同时考虑了期望和方差对保费的影响. 尽管它也是一种重要的保费厘定方法, 在财

英文引用格式: Yao D J, Wang R M, Xu L. Optimal dividend, capital injection and reinsurance strategies with variance premium principle (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 1123-1140, doi: 10.1360/012014-45

产保险上应用广泛, 但是该准则下的相关分红问题并未受到应有的关注. Zhou 和 Yuen^[14] 首次在方差保费准则下研究最优分红、注资和再保险问题. 他们假设注资过程中存在比例交易费, 并且保险公司和再保险公司在方差准则下采取相同的参数厘定费率, 问题得到圆满解决. Yao 等人^[15] 在此基础上进一步假设分红需要消耗比例交易费 (如税收等), 而注资时还要消耗固定的交易费 (如咨询费等), 且破产时存在清算值. 该文献在一个新的目标函数下找到了最优的分红、注资和再保险策略. 众所周知, 交易费是影响公司管理决策的重要因素, 但因为技术上的难度, 绝大部分文献假设分红和注资过程中仅存在比例交易费而忽略了固定交易费用. 但文献 [10, 13] 在比例交易费和固定交易费同时存在的假设下研究了保险公司的最优分红、注资和再保险问题, 使研究得到深化.

本文为充分考虑市场摩擦, 假设每次分红和注资都要消耗比例的和固定的交易费, 且允许再保险公司和原保险公司在方差准则下采取不同的参数厘定费率. 通过脉冲控制方法, 我们在最大化破产前分红现值与注资现值之差期望值的目标函数下找到了最优的分红、注资和再保险策略, 并给出了目标函数最大值的表达式 (以下称为值函数).

本文的结构如下: 首先, 第 2 节引入风险模型以及方差保费准则下的最优分红、注资和再保险问题; 第 3 节分析值函数具备的一些性质; 而后, 第 4 节给出值函数满足的拟变分不等式 (quasi variational inequality, 简称为 QVI) 并讨论值函数的可能解; 最终, 第 5 节确定值函数以及对应最优策略的解析表达式.

2 模型建立

记 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间, 其中 $\{\mathcal{F}_t\}$ 满足通常条件. 为研究问题的方便, 我们从经典的复合 Poisson 模型开始. 该模型假设保险公司的盈余过程 $\{U_t\}_{t \geq 0}$ 可作如下描述:

$$U_t = x + ct - \sum_{n=1}^{N_t} Y_n,$$

其中 $x \geq 0$ 是初始盈余, $c > 0$ 是保费收取速率, N_t 是参数为 λ 的 Poisson 过程, $\{Y_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 表示历次理赔额, 其一阶矩和二阶矩分别为 $\mu_1 < \infty$ 和 $\mu_2^2 < \infty$. 本文假设费率依照方差保费准则厘定, 那么, 聚合保费为

$$ct = E\left(\sum_{n=1}^{N_t} Y_n\right) + \theta_1 D\left(\sum_{n=1}^{N_t} Y_n\right) = \lambda(\mu_1 + \theta_1 \mu_2^2)t, \quad (2.1)$$

其中 $\theta_1 > 0$ 是费率参数, E 和 D 分别表示求期望和方差. 为控制风险暴露, 我们假设保险公司进入比例再保险合同. 对任意损失 $Y > 0$, 由保险公司和再保险公司分别承担 $(1-a)Y$ 和 aY , 我们把这里的 $a \in [0, 1]$ 称为再保险分出比例. 那么, 到 t 时刻为止, 再保险公司承担的总损失为 $\sum_{n=1}^{N_t} aY_n$. 在方差保费准则下, 再保险公司收取的聚合保费为

$$c^a t := E\left(\sum_{n=1}^{N_t} aY_n\right) + \theta_2 D\left(\sum_{n=1}^{N_t} aY_n\right) = \lambda(a\mu_1 + \theta_2 a^2 \mu_2^2)t, \quad (2.2)$$

其中 c^a 是再保险公司保费收取速率, $\theta_2 \in (\theta_1, \infty)$ 是再保险公司费率参数. 保险公司在进入再保险合同后的盈余过程 $\{U_t^a\}_{t \geq 0}$ 满足

$$U_t^a = x + (c - c^a)t - \sum_{n=1}^{N_t} (1-a)Y_n. \quad (2.3)$$

为了问题的简化, 我们用一个与 U_t^a 的期望和方差都相等的漂移扩散过程 $\{X_t^a\}_{t \geq 0}$ 来对 (2.3) 进行近似处理, 即

$$X_t^a = x + \int_0^t (\theta_1 - \theta_2 a^2) \lambda \mu_2^2 ds + \int_0^t (1 - a) \sqrt{\lambda} \mu_2 dB_s, \quad (2.4)$$

其中 $X_0^a = x$, $\{B_t, t \geq 0\}$ 是一个标准 Brown 运动, 它关于自然流 $\mathcal{F}_t^B := \sigma\{B_s : 0 \leq s \leq t\}$ 可测. 对大型保险公司而言, 这样的近似处理较合理.

假设保险公司可以通过动态地调整分出比例 $a \in [0, 1]$ 来控制自身的风险暴露, 动态的分出比例 $\{a_t, t \geq 0\}$ 刻画了比例再保险策略. 我们用一系列递增的停时 $\{\varrho_n, n = 1, 2, \dots\}$ 表示历次分红时刻, 用非负随机变量序列 $\{\zeta_n, n = 1, 2, \dots\}$ 表示历次分红额, 到 t 时刻为止保险公司用于分发股东红利的总额可以表示为 $L_t = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{\varrho_n \leq t\}} \zeta_n$. 我们用一系列递增的停时 $\{\tau_n, n = 1, 2, \dots\}$ 表示历次注资时刻, 用一系列非负随机变量 $\{\eta_n, n = 1, 2, \dots\}$ 表示历次注资额, 到 t 时刻为止保险公司获得的注资总额可以表示为 $G_t = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{\tau_n \leq t\}} \eta_n$. 保险公司在策略 $\pi = (a^\pi; L^\pi; G^\pi)$ 控制下的盈余过程可表示为

$$X_t^\pi = x + \int_0^t (\theta_1 - \theta_2 (a_s^\pi)^2) \lambda \mu_2^2 ds + \int_0^t (1 - a_s^\pi) \sqrt{\lambda} \mu_2 dB_s - \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{\varrho_n^\pi \leq t\}} \zeta_n^\pi + \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{\tau_n^\pi \leq t\}} \eta_n^\pi, \quad (2.5)$$

其中 $X_0^\pi = x$.

定义 2.1 如果策略

$$\pi = (a^\pi; L^\pi; G^\pi) = (a^\pi; \varrho_1^\pi, \dots, \varrho_n^\pi, \dots; \zeta_1^\pi, \dots, \zeta_n^\pi, \dots; \tau_1^\pi, \dots, \tau_n^\pi, \dots; \eta_1^\pi, \dots, \eta_n^\pi, \dots)$$

满足如下条件:

- (i) 分出比例 $a^\pi = a_t^\pi$ 关于 $\mathcal{F}_t^B$ 可测, 且 $0 \leq a_t^\pi \leq 1$;
- (ii) $\{\varrho_n^\pi\}$ 是一列关于 $\mathcal{F}_t^B$ 的停时, 且 $0 \leq \varrho_1^\pi < \dots < \varrho_n^\pi < \dots$, a.s.;
- (iii) $0 \leq \zeta_n^\pi \leq X_{\varrho_n^\pi}^\pi, n = 1, 2, \dots$ 关于 $\mathcal{F}_{\varrho_n^\pi}^B$ 可测;
- (iv) $\{\tau_n^\pi\}$ 是关于 $\mathcal{F}_t^B$ 的停时, 且 $0 \leq \tau_1^\pi < \dots < \tau_n^\pi < \dots$, a.s.;
- (v) $\eta_n^\pi \geq 0, n = 1, 2, \dots$ 关于 $\mathcal{F}_{\tau_n^\pi}^B$ 可测;
- (vi) $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n^\pi < M) = 0, P(\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n^\pi < M) = 0, \forall M > 0$,

我们就称它为可行策略.

我们用 Π 表示所有可行策略构成的集合. 对任意策略 $\pi \in \Pi$, 定义保险公司的破产时刻 $T^\pi = \inf\{t \geq 0 : X_t^\pi < 0\}$, 它也是关于 $\mathcal{F}_t^B$ 的停时. 为充分考虑市场摩擦, 我们假设每次分红和注资都会消耗交易费用. 如果资金 ζ 元用于股东分红, 除去与分红额无关的固定费用 $K_1 > 0$ 元, 以及与分红额相关的比例费用 $(1 - \beta_1)\zeta$ 元之后, 股东实际能得到的红利为 $\beta_1\zeta - K_1$ 元, 其中 $1 - \beta_1$ 可视为红利税率, 称 β_1 为比例分红费用因子. 类似地, 如果公司需要融资 η 元, 其实际成本为 $\beta_2\eta + K_2$ 元, 其中 $\beta_2 > 1$ 是比例注资费用因子, $K_2 > 0$ 是与注资额大小无关的固定注资费用. 我们把策略 $\pi \in \Pi$ 下的公司价值定义为

$$V(x, \pi) = E^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta \varrho_n^\pi} (\beta_1 \zeta_n^\pi - K_1) I_{\{\varrho_n^\pi \leq T^\pi\}} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta \tau_n^\pi} (\beta_2 \eta_n^\pi + K_2) I_{\{\tau_n^\pi \leq T^\pi\}} \right), \quad (2.6)$$

它是破产前分红现值与注资现值之差的期望值, E^x 表示关于初值 $X_0^\pi = x$ 的条件期望, $\delta > 0$ 是折现因子.

问题 2.1 管理者的目标是最大化公司价值, 故需制定最优的策略 $\pi^* \in \Pi$ 使得

$$V(x) = V(x, \pi^*) = \max_{\pi \in \Pi} V(x, \pi). \quad (2.7)$$

我们把 $V(x)$ 称为值函数, 它是一个增函数.

3 值函数的性质

本节将给出值函数所具备的一些性质, 并且讨论最优的注资时刻.

引理 3.1 值函数满足不等式

$$\beta_1(x - y) - K_1 \leq V(x) - V(y) \leq \beta_2(x - y) + K_2, \quad 0 \leq y \leq x, \quad (3.1)$$

且

$$V(x) \leq \beta_1 \left(x + \frac{\theta_1 \lambda \mu_2^2}{\delta} \right). \quad (3.2)$$

证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在可行策略 π_1 使得 $V(y, \pi_1) \geq V(y) - \varepsilon$. 对任意初始盈余 $x \geq y$, 我们可以定义如下可行策略: 将 $x - y$ 立即作为红利分发给股东, 则公司盈余立即变为 y , 然后按照策略 π_1 控制资产. 那么, 对 $\varepsilon > 0$, 我们有

$$V(x) \geq \beta_1(x - y) - K_1 + V(y, \pi_1) \geq \beta_1(x - y) - K_1 + V(y) - \varepsilon.$$

由于 ε 是任意值, 故 $V(x) - V(y) \geq \beta_1(x - y) - K_1$. (3.1) 的另一个不等式也可同样证明. 由 (2.4) 知,

$$\mathbb{E}^x \left[\int_0^{T^\pi} e^{-\delta s} dX_s^a \right] = \mathbb{E}^x \left[\int_0^{T^\pi} e^{-\delta s} (\theta_1 - \theta_2 a^2) \lambda \mu_2^2 ds \right] \leq \frac{\theta_1 \lambda \mu_2^2}{\delta}.$$

根据 Itô 公式得

$$e^{-\delta T^\pi} X_{T^\pi}^\pi = x - \delta \int_0^{T^\pi} e^{-\delta s} X_s^\pi ds + \int_0^{T^\pi} e^{-\delta s} dX_s^\pi.$$

既然 $X_{T^\pi}^\pi = 0$ 且对 $t \leq T^\pi$ 有 $X_t^\pi \geq 0$ 成立, 那么, 对上式两边取期望得

$$-\mathbb{E}^x \left[\int_0^{T^\pi} e^{-\delta s} dX_s^\pi \right] = x - \mathbb{E}^x \left[\delta \int_0^{T^\pi} e^{-\delta s} X_s^\pi ds \right] \leq x.$$

显然,

$$\begin{aligned} V(x, \pi) &\leq \mathbb{E}^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta \varrho_n^\pi} (\beta_1 \zeta_n^\pi) I_{\{\varrho_n^\pi \leq T^\pi\}} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta \tau_n^\pi} (\beta_2 \eta_n^\pi) I_{\{\tau_n^\pi \leq T^\pi\}} \right) \\ &\leq \beta_1 \mathbb{E}^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta \varrho_n^\pi} \zeta_n^\pi I_{\{\varrho_n^\pi \leq T^\pi\}} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta \tau_n^\pi} \eta_n^\pi I_{\{\tau_n^\pi \leq T^\pi\}} \right) \\ &= \beta_1 \left\{ \mathbb{E}^x \left[\int_0^{T^\pi} e^{-\delta s} dX_s^a \right] - \mathbb{E}^x \left[\int_0^{T^\pi} e^{-\delta s} dX_s^\pi \right] \right\} \\ &\leq \beta_1 \left(x + \frac{\theta_1 \lambda \mu_2^2}{\delta} \right). \end{aligned}$$

引理 3.2 只有当公司盈余达到 0 时, 注资才可能是最优的.

证明 由于货币的时间价值, 公司应尽量延迟注资. 证明过程可参见文献 [11, 引理 3.2], 此处省略. $\square$

4 拟变分不等式 (QVI)

本节首先给出值函数对应的 QVI, 然后根据边界条件分多种情况讨论 QVI 的解. 为便于表述, 我们先定义一些算子. 对任意函数 $\omega(x) \in \mathbb{C}^2$, 我们定义如下算子:

(i) 分红算子:

$$\mathcal{D}\omega(x) = \max_{\zeta \geq 0} \{\omega(x - \zeta) + \beta_1 \zeta - K_1\};$$

(ii) 注资算子:

$$\mathcal{C}\omega(x) = \max_{\eta \geq 0} \{\omega(x + \eta) - \beta_2 \eta - K_2\};$$

(iii) 微分算子:

$$\mathcal{A}^a \omega(x) = \frac{1}{2}(1-a)^2 \lambda \mu_2^2 \omega''(x) + (\theta_1 - \theta_2 a^2) \lambda \mu_2^2 \omega'(x) - \delta \omega(x).$$

根据经典的随机控制理论, 我们给出如下定义, 它刻画了值函数 $V(x)$ 满足的性质.

定义 4.1 假设 $v(x) : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ 是连续可导的增函数, 且 $v(x)$ 除有限点外是二次连续可导. 我们称 $v(x)$ 满足控制问题所对应的 QVI, 如果对任意 $x \geq 0$ 有如下关系式成立:

$$\max_{0 \leq a \leq 1} \{\mathcal{A}^a v(x)\} \leq 0, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{D}v(x) - v(x) \leq 0, \quad (4.2)$$

$$\mathcal{C}v(x) - v(x) \leq 0, \quad (4.3)$$

$$\left(\max_{0 \leq a \leq 1} \{\mathcal{A}^a v(x)\} \right) (\mathcal{D}v(x) - v(x)) (\mathcal{C}v(x) - v(x)) = 0, \quad (4.4)$$

$$\max\{\mathcal{C}v(0) - v(0), -v(0)\} = 0. \quad (4.5)$$

接下来根据边界条件 (4.5) 成立的两种情形讨论 v 的表达式.

4.1 无注资情形

当盈余达到临界点 0 时, 如果最优的决策是任其破产不予注资, 那么, 相应的边界条件是 $v(0) = 0$ 且 $\mathcal{C}v(0) - v(0) \leq 0$. 如果函数 $w(x)$ 是 $v(x)$ 的解, 我们猜想它应该满足如下方程组:

$$\max_{0 \leq a \leq 1} \{\mathcal{A}^a w(x)\} = 0, \quad 0 < x < u_2, \quad (4.6)$$

$$\mathcal{D}w(x) - w(x) = 0, \quad x \geq u_2, \quad (4.7)$$

$$w(0) = 0, \quad (4.8)$$

$$\mathcal{C}w(0) - w(0) \leq 0, \quad (4.9)$$

其中 $u_2 \in (0, \infty)$ 为待定参数. 对 (4.6) 关于 a 求导并令导函数为 0, 即得

$$\frac{w''(x)}{w'(x)} = -2\theta_2 \frac{a(x)}{1-a(x)}. \quad (4.10)$$

将 (4.10) 代入 (4.6) 得

$$\lambda \mu_2^2 (\theta_1 - \theta_2 a(x)) w'(x) = \delta w(x). \quad (4.11)$$

对 (4.11) 关于 x 求导并再次利用 (4.10), 我们得到

$$a'(x) = -\frac{2\lambda\theta_2\mu_2^2 a(x)(\theta_1 - \theta_2 a(x)) + \delta(1 - a(x))}{\lambda\theta_2\mu_2^2(1 - a(x))}. \quad (4.12)$$

利用 (4.8) 和 (4.11) 可知,

$$a(0) = \frac{\theta_1}{\theta_2} < 1. \quad (4.13)$$

我们定义函数如下:

$$Q(x) = \int_x^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} \frac{\lambda\theta_2\mu_2^2(1-z)}{2\lambda\theta_2\mu_2^2 z(\theta_1 - \theta_2 z) + \delta(1-z)} dz, \quad 0 \leq x \leq \frac{\theta_1}{\theta_2}. \quad (4.14)$$

注意到 (4.14) 中被积函数是正数, 因此, $Q(x)$ 在 $[0, \frac{\theta_1}{\theta_2}]$ 上严格递减, 它在 $[0, \frac{\theta_1}{\theta_2}]$ 上的反函数 $Q^{-1}(x)$ 存在. 所以, (4.12) 的解可表示为 $a(x) = Q^{-1}(x + d)$, 其中 d 是待定参数. 根据 (4.13) 和 $Q^{-1}(0) = \frac{\theta_1}{\theta_2}$ 可知, $d = 0$, 故

$$a(x) = Q^{-1}(x) \in \left[0, \frac{\theta_1}{\theta_2}\right], \quad 0 \leq x \leq x_0, \quad (4.15)$$

其中 $x_0 = Q(0) < \infty$. 对 $0 \leq x \leq x_0$, 由方程 (4.10) 推知,

$$w'(x) = k \exp \left\{ \int_x^{x_0} 2\theta_2 \frac{a(z)}{1 - a(z)} dz \right\}, \quad (4.16)$$

其中 $k > 0$ 为待定参数. 结合条件 $a(x_0) = Q^{-1}(x_0) = 0$, 则有

$$w'(x_0) = k, \quad (4.17)$$

$$w''(x_0) = -2\theta_2 \frac{a(x_0)}{1 - a(x_0)} w'(x_0) = 0. \quad (4.18)$$

利用边界条件 $w(0) = 0$, 进一步求解 (4.16) 得

$$w(x) = k \int_0^x \exp \left\{ \int_y^{x_0} 2\theta_2 \frac{a(z)}{1 - a(z)} dz \right\} dy.$$

猜想 $x_0 < u_2$, 并且当 $x \in [x_0, u_2]$ 时最优的分出比例 $a(x) \equiv 0$, 即原保险公司退出再保险合同并承担所有潜在损失. 将 $a(x) = 0$ 代入 (4.6) 得

$$\frac{1}{2} \lambda \mu_2^2 w''(x) + \theta_1 \lambda \mu_2^2 w'(x) - \delta w(x) = 0.$$

这个微分方程的解为

$$w(x) = k_1 e^{r_+(x-x_0)} + k_2 e^{r_-(x-x_0)}, \quad x_0 \leq x \leq u_2, \quad (4.19)$$

其中

$$r_+ = -\theta_1 + \frac{1}{\lambda \mu_2^2} \sqrt{\theta_1^2 \lambda^2 \mu_2^4 + 2\delta \lambda \mu_2^2} > 0, \quad r_- = -\theta_1 - \frac{1}{\lambda \mu_2^2} \sqrt{\theta_1^2 \lambda^2 \mu_2^4 + 2\delta \lambda \mu_2^2} < 0.$$

假设 $w'(x)$ 和 $w''(x)$ 在 x_0 点处是连续的, 则

$$k_1 r_+ + k_2 r_- = k, \quad k_1 r_+^2 + k_2 r_-^2 = 0.$$

因此,

$$k_1 = k c_1, \quad k_2 = k c_2,$$

其中

$$c_1 = \frac{r_-}{r_+(r_- - r_+)} > 0, \quad c_2 = \frac{r_+}{r_-(r_+ - r_-)} < 0.$$

对 $x \geq u_2$, 存在 $u_1 \in [0, u_2]$ 使得

$$w(x) = \mathcal{D}w(x) = w(u_1) + \beta_1(x - u_1) - K_1, \quad x \geq u_2, \quad (4.20)$$

并且最优的分出比例 $a(x)$ 取区间 $[0, 1]$ 上任意值皆可. 综上所述, 方程组 (4.6)–(4.9) 的解应有如下形式:

$$w(x) = \begin{cases} k \int_0^x \exp \left\{ \int_y^{x_0} 2\theta_2 \frac{a(z)}{1-a(z)} dz \right\} dy, & 0 \leq x \leq x_0, \\ k(c_1 e^{r_+(x-x_0)} + c_2 e^{r_-(x-x_0)}), & x_0 \leq x \leq u_2, \\ w(u_1) + \beta_1(x - u_1) - K_1, & x \geq u_2, \end{cases} \quad (4.21)$$

其中 $a(x) = Q^{-1}(x)$, 最优分出比例是

$$a^{\pi^*}(x) = \begin{cases} Q^{-1}(x), & 0 \leq x \leq x_0, \\ 0, & x_0 \leq x \leq u_2, \\ \text{任意值}, & x > u_2. \end{cases} \quad (4.22)$$

为了确定参数 k, u_1 和 u_2 , 我们需要定义一个新的函数

$$H(x) = \begin{cases} \exp \left\{ \int_x^{x_0} 2\theta_2 \frac{a(z)}{1-a(z)} dz \right\}, & 0 < x < x_0, \\ c_1 r_+ e^{r_+(x-x_0)} + c_2 r_- e^{r_-(x-x_0)}, & x > x_0, \end{cases} \quad (4.23)$$

其中 $a(x) = Q^{-1}(x)$. 易知, $H(x)$ 是连续可导的凸函数, 且具有如下性质:

$$\begin{aligned} H(x_0) &= \inf_{0 \leq x < \infty} H(x) = 1, \quad H'(x_0) = 0, \\ H(x_0) &= 1 < \rho := H(0) < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = \infty. \end{aligned}$$

接下来将分情况讨论 k, u_1 和 u_2 的解, 函数 $H(x)$ 对问题的解决起着关键作用.

情形 1 $0 < K_1 < I_1(\beta_1/\rho)$, 函数 $I_1(\cdot)$ 定义如下:

$$I_1(k) := \int_{u_1^k}^{u_2^k} (\beta_1 - kH(y)) dy,$$

这里 $k \in [\beta_1/\rho, \beta_1]$, $0 < u_1^k < x_0 < u_2^k$ 满足

$$kH(u_1^k) = kH(u_2^k) = \beta_1. \quad (4.24)$$

考虑到函数 $H(x)$ 的性质, $u_1^k \leq u_2^k$ 实际上是函数 $y = kH(x)$ 与直线 $y = \beta_1$ 的两个交点的横坐标, 且分别是 k 的增函数和减函数. 特别地, 当 $k = \beta_1/\rho$ 时, $u_1^k = 0$; 当 $k = \beta_1$ 时, $u_1^k = x_0 = u_2^k$. $I_1(k)$ 在 $[\beta_1/\rho, \beta_1]$ 上关于变量 k 严格递减, 其最大值是 $I_1(\beta_1/\rho)$, 最小值为 $I_1(\beta_1) = 0$. 因此, 存在 $k_1^* \in (\beta_1/\rho, \beta_1)$ 使得

$$I_1(k_1^*) = \int_{u_1^{k_1^*}}^{u_2^{k_1^*}} (\beta_1 - k_1^* H(y)) dy = K_1.$$

显然, 令 $k = k_1^*$, $u_1 = u_1^{k_1^*} > 0$ 和 $u_2 = u_2^{k_1^*} > 0$, 那么, $w(x)$ 和 $a^{\pi^*}(x)$ 满足 (4.6) 和 (4.8). 另外, 我们有

$$w'(x) = \begin{cases} k_1^* H(x), & 0 < x \leq u_2^{k_1^*}, \\ \beta_1, & x \geq u_2^{k_1^*}. \end{cases} \quad (4.25)$$

对 $x \geq u_2^{k_1^*}$, 计算可得

$$\begin{aligned} \mathcal{D}w(x) - w(x) &= \max_{\zeta \geq 0} \{w(x - \zeta) + \beta_1 \zeta - K_1\} - w(x) \\ &= \max_{\zeta \geq 0} \left\{ \int_{x-\zeta}^x (\beta_1 - w'(x)) dx \right\} - K_1 \\ &= \int_{u_1^{k_1^*}}^{u_2^{k_1^*}} (\beta_1 - w'(x)) dx - K_1 = 0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

从而, (4.7) 成立. 考虑到

$$w'(0) = k_1^* H(0) = k_1^* \exp \left\{ \int_0^{x_0} 2\theta \frac{a(z)}{1 - a(z)} dz \right\} < \infty, \quad (4.27)$$

我们需要在两种不同情形下验证不等式 (4.9).

(i) 如果 $w'(0) = k_1^* H(0) = k_1^* \rho > \beta_2$, 那么, 存在唯一的 $\eta^{k_1^*} \in (0, u_1^{k_1^*})$ 满足 $w'(\eta^{k_1^*}) = k_1^* H(\eta^{k_1^*}) = \beta_2$. 为便于理解, 我们在图 1 中给出 $v'(x) = w'(x)$ 的图像. 定义积分函数

$$J(k_1^*) := \int_0^{\eta^{k_1^*}} (k_1^* H(x) - \beta_2) dx = w(\eta^{k_1^*}) - w(0) - \beta_2 \eta^{k_1^*} > 0. \quad (4.28)$$

易知, 不等式 (4.9) 成立当且仅当

$$K_2 \geq J(k_1^*). \quad (4.29)$$

我们将在 4.2 节中讨论 $K_2 < J(k_1^*)$ 的情形.

(ii) 如果 $w'(0) = k_1^* H(0) = k_1^* \rho \leq \beta_2$, 那么, 对所有的 $x \geq 0$ 有 $w'(x) \leq \beta_2$ 成立. 因此,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}w(0) - w(0) &= \max_{\eta \geq 0} \{w(\eta) - \beta_2 \eta - K_2\} - w(0) \\ &= \max_{\eta \geq 0} \left\{ \int_0^\eta (w'(s) - \beta_2) ds \right\} - K_2 \\ &= -K_2 < 0, \end{aligned} \quad (4.30)$$

故 (4.9) 成立. 请参照图 2 中 $v'(x) = w'(x)$ 的图像.

图 1 $0 < K_1 \leq I_1(\beta_1/\rho)$, $k_1^* \rho > \beta_2$ 且 $K_2 \geq J(k_1^*)$ 图 2 $0 < K_1 \leq I_1(\beta_1/\rho)$ 且 $k_1^* \rho < \beta_2$

情形 2 如果 $K_1 \geq I_1(\beta_1/\rho)$, 我们定义函数

$$I_2(k) = \int_0^{u_2^k} (\beta_1 - kH(y))dy, \quad k \in \left(0, \frac{\beta_1}{\rho}\right], \quad (4.31)$$

其中 $u_2^k > x_0$ 是下面方程的唯一解,

$$kH(u_2^k) = \beta_1, \quad (4.32)$$

那么, $I_2(k)$ 是关于变量 k 的严格减函数, 且有 $\lim_{k \rightarrow 0} I_2(k) = \infty$ 和 $I_2(\beta_1/\rho) = I_1(\beta_1/\rho) \leq K_1$. 因此, 存在唯一的 $k_2^* \in (0, \beta_1/\rho]$ 满足如下方程:

$$I_2(k_2^*) = \int_0^{u_2^{k_2^*}} (\beta_1 - k_2^* H(y))dy = K_1. \quad (4.33)$$

显然, 如果令 $k = k_2^*$, $u_1 = u_1^{k_2^*} = 0$ 和 $u_2 = u_2^{k_2^*}$, 那么, $w(x)$ 和 $a^{\pi^*}(x)$ 满足 (4.6) 和 (4.8). 结合图 3 中

图 3 $K_1 > I_1(\beta_1/\rho)$

$v'(x) = w'(x)$ 的图像, 我们同样可以证明 (4.7) 和 (4.9) 成立.

通过以上分析, 我们给出了 (4.6)–(4.9) 的解 $w(x)$ 和 $a^{\pi^*}(x)$, 并且 $w(x)$ 是区间 $(0, \infty)$ 上递增的连续可导函数, 除了个别点外, 它是二阶连续可导的. 但是, 我们还需要进一步验证它们确实满足 (4.1)–(4.5), 验证过程可参照第 4.2 节对 $\tilde{w}(x)$ 相关性质的处理.

4.2 不允许破产情形

我们还需要在下面最后一种情形下讨论 (4.6)–(4.9) 的解,

$$0 < K_1 < I_1\left(\frac{\beta_1}{\rho}\right), \quad k_1^* \rho > \beta_2 \quad \text{且} \quad K_2 < J(k_1^*). \quad (4.34)$$

在第 4.1 节分析中我们已经知道在 (4.34) 情形下, 不等式 $\mathcal{C}w(0) - w(0) \leq 0$ 不成立, 此时, $w(x)$ 不满足 QVI. 实际上, 这意味着, 当盈余达到 0 时不予注资不再是最优的选择, 而是应该适当注资以避免破产, 此时, 对应的边界条件是 $v(0) \geq 0$ 和 $\mathcal{C}v(0) - v(0) = 0$. 我们猜测 $v(x)$ 的解 $\tilde{w}(x)$ 应当满足

$$\max_{0 \leq a \leq 1} \{\mathcal{A}^a \tilde{w}(x)\} = 0, \quad 0 < x < b_2, \quad (4.35)$$

$$\mathcal{D}\tilde{w}(x) - \tilde{w}(x) = 0, \quad x \geq b_2, \quad (4.36)$$

$$\tilde{w}(0) \geq 0, \quad (4.37)$$

$$\mathcal{C}\tilde{w}(0) - \tilde{w}(0) = 0, \quad (4.38)$$

其中 $0 < b_2 < \infty$ 是待定参数. 对比 (4.6)–(4.9) 的结构, 我们容易想到, 存在某个常数 $d^* \geq 0$ 使得

$$\tilde{w}(x) = w(x + d^*) = \begin{cases} k_1^* \int_0^{x+d^*} \exp\left\{\int_y^{x_0} 2\theta_2 \frac{a(z)}{1-a(z)} dz\right\} dy, & 0 \leq x \leq x_0 - d^*, \\ k_1^* (c_1 e^{r+(x+d^*-x_0)} + c_2 e^{r-(x+d^*-x_0)}), & x_0 - d^* \leq x \leq u_2^{k_1^*} - d^*, \\ w(u_1^{k_1^*}) + \beta_1(x + d^* - u_1^{k_1^*}) - K_1, & x \geq u_2^{k_1^*} - d^*, \end{cases} \quad (4.39)$$

其中 $a(x) = Q^{-1}(x)$, 即 $\tilde{w}(x)$ 是通过 $w(x)$ 向左平移 d^* 个单位得来. 相应地, 最优的分出比例是

$$\tilde{a}^{\pi^*}(x) = a^{\pi^*}(x + d^*) = \begin{cases} Q^{-1}(x + d^*), & 0 \leq x \leq x_0 - d^*, \\ 0, & x_0 - d^* \leq x \leq u_2^{k_1^*} - d^*, \\ \text{任意值}, & x \geq u_2^{k_1^*} - d^*. \end{cases} \quad (4.40)$$

令 $b_1 = b_1^{k_1^*} := u_1^{k_1^*} - d^*$, $b_2 = b_2^{k_1^*} := u_2^{k_1^*} - d^*$, 可以很容易地验证 $\tilde{w}(x)$ 满足 (4.35) 和 (4.37). 为方便起见, 我们记

$$\tilde{w}'(x) = \begin{cases} k_1^* H(x + d^*), & 0 < x \leq b_2^{k_1^*}, \\ \beta_1, & x \geq b_2^{k_1^*}. \end{cases}$$

图 4 给出了 $v'(x) = \tilde{w}'(x)$ 的图像. 类似于 (4.26), 我们也可以验证对任意 $x \geq b_2 = b_2^{k_1^*}$ 有 $\mathcal{D}\tilde{w}(x) - \tilde{w}(x) = 0$, 即 (4.36) 成立. 现在, 我们需要确定常数 d^* 并验证 (4.38) 成立. 定义关于变量 d 的函数 $\psi(d)$ 如下:

$$\psi(d) := w(\eta^{k_1^*}) - w(d) - \beta_2(\eta^{k_1^*} - d) - K_2, \quad 0 \leq d \leq \eta^{k_1^*}.$$

图 4 $0 < K_1 \leq I_1(\beta_1/\rho)$, $k_1^* \rho > \beta_2$ 且 $K_2 < J(k_1^*)$

由 (4.34) 可知,

$$\psi(0) = w(\eta^{k_1^*}) - w(0) - \beta_2 \eta^{k_1^*} - K_2 = J(k_1^*) - K_2 > 0. \quad (4.41)$$

另外, 易知

$$\psi(\eta^{k_1^*}) = -K_2 < 0, \quad (4.42)$$

$$\psi'(d) = \beta_2 - w'(d) < 0, \quad 0 \leq d \leq \eta^{k_1^*}. \quad (4.43)$$

因此, 存在唯一的常数 $d^* \in (0, \eta^{k_1^*})$ 使得 $\psi(d^*) = 0$, 即

$$w(\eta^{k_1^*}) - w(d^*) - \beta_2(\eta^{k_1^*} - d^*) - K_2 = 0, \quad (4.44)$$

或者, 等价地表述为

$$\tilde{w}(\eta^*) - \tilde{w}(0) - \beta_2 \eta^* - K_2 = 0, \quad (4.45)$$

其中 $\eta^* := \eta^{k_1^*} - d^*$. 注意到 $\tilde{w}'(\eta^*) = w'(\eta^{k_1^*}) = \beta_2$, 故有

$$\mathcal{C}\tilde{w}(0) = \max_{\eta \geq 0} \{\tilde{w}(\eta) - \beta_2 \eta - K_2\} = \tilde{w}(\eta^*) - \beta_2 \eta^* - K_2 = \tilde{w}(0), \quad (4.46)$$

即 (4.38) 成立. 易知 d^* 是关于 K_2 的减函数.

我们已经证明了在 (4.34) 条件下, $\tilde{w}(x)$ 和 $\tilde{a}^{\pi^*}(x)$ 满足 (4.35)–(4.38). 最后, 我们尚需验证它们确实满足 QVI. 结合图 4 中 $v'(x) = \tilde{w}'(x)$ 的图像, 我们给出如下证明.

第 1 步 证明 $\max_{0 \leq a \leq 1} \{\mathcal{A}^a \tilde{w}(x)\} \leq 0$, $x \in (0, b_2^{k_1^*}) \cup (b_2^{k_1^*}, \infty)$.

(i) 当 $0 \leq x < x_0 - d^*$ 时, 由 (4.35) 知,

$$\max_{0 \leq a \leq 1} \{\mathcal{A}^a \tilde{w}(x)\} = \mathcal{A}^{\tilde{a}^{\pi^*}} \tilde{w}(x) = 0.$$

(ii) 当 $x_0 - d^* \leq x < b_2^{k_1^*}$ 时, 我们有 $\tilde{w}'(x) > 0$ 和 $\tilde{w}''(x) > 0$. 观察其结构可知, (4.35) 左端的最大值在 $a = 0$ 处取得. 这表明,

$$\max_{0 \leq a \leq 1} \{\mathcal{A}^a \tilde{w}(x)\} = \mathcal{A}^{\tilde{a}^{\pi^*}} \tilde{w}(x) = 0.$$

(iii) 当 $x > b_2^{k_1^*}$ 时, 我们有 $\tilde{w}(x) \geq \tilde{w}(b_2^{k_1^*})$, $\tilde{w}'(x) = \beta_1$ 和 $\tilde{w}''(x) = 0$ 成立. 因此, 对任意 $a \in [0, 1]$ 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^a \tilde{w}(x) &= \frac{1}{2}(1-a)^2 \lambda \mu_2^2 \tilde{w}''(x) + (\theta_1 - \theta_2 a^2) \lambda \mu_2^2 \tilde{w}'(x) - \delta \tilde{w}(x) \\ &= (\theta_1 - \theta_2 a^2) \lambda \mu_2^2 \tilde{w}'(x) - \delta \tilde{w}(x) \\ &\leq \theta_1 \lambda \mu_2^2 \tilde{w}'(b_2^{k_1^*}+) - \delta \tilde{w}(b_2^{k_1^*}+). \end{aligned} \quad (4.47)$$

注意到

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq a \leq 1} \{\mathcal{A}^a \tilde{w}(b_2^{k_1^*}-)\} &= \mathcal{A}^0 \tilde{w}(b_2^{k_1^*}-) \\ &= \frac{1}{2} \lambda \mu_2^2 \tilde{w}''(b_2^{k_1^*}-) + \theta_1 \lambda \mu_2^2 \tilde{w}'(b_2^{k_1^*}-) - \delta \tilde{w}(b_2^{k_1^*}-) \\ &= \frac{1}{2} \lambda \mu_2^2 \tilde{w}''(b_2^{k_1^*}-) + \theta_1 \lambda \mu_2^2 \tilde{w}'(b_2^{k_1^*}+) - \delta \tilde{w}(b_2^{k_1^*}+) = 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

结合 $\tilde{w}''(b_2^{k_1^*}-) > 0$, 我们有

$$\theta_1 \lambda \mu_2^2 \tilde{w}'(b_2^{k_1^*}+) - \delta \tilde{w}(b_2^{k_1^*}+) < 0. \quad (4.49)$$

那么, (4.47) 和 (4.49) 表明, $\max_{0 \leq a \leq 1} \{\mathcal{A}^a \tilde{w}(x)\} < 0$ 成立.

第 2 步 证明 $\mathcal{D}\tilde{w}(x) - \tilde{w}(x) \leq 0$, $x \in (0, b_2^{k_1^*}) \cup (b_2^{k_1^*}, \infty)$. 我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\tilde{w}(x) - \tilde{w}(x) &= \max_{\zeta \geq 0} \{\tilde{w}(x - \zeta) + \beta_1 \zeta - K_1\} - \tilde{w}(x) \\ &= \max_{\zeta \geq 0} \left\{ \int_{x-\zeta}^x (\beta_1 - \tilde{w}'(s)) ds \right\} - K_1. \end{aligned} \quad (4.50)$$

(i) 当 $x \leq b_1^{k_1^*}$ 时,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\tilde{w}(x) - \tilde{w}(x) &= \max_{\zeta \geq 0} \left\{ \int_{x-\zeta}^x (\beta_1 - \tilde{w}'(s)) ds \right\} - K_1 \\ &= \int_{x-0}^x (\beta_1 - \tilde{w}'(s)) ds - K_1 = -K_1 < 0; \end{aligned} \quad (4.51)$$

(ii) 当 $b_1^{k_1^*} \leq x \leq b_2^{k_1^*}$ 时,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\tilde{w}(x) - \tilde{w}(x) &= \max_{\zeta \geq 0} \left\{ \int_{x-\zeta}^x (\beta_1 - \tilde{w}'(s)) ds \right\} - K_1 \\ &= \int_{x-(x-b_1^{k_1^*})}^x (\beta_1 - \tilde{w}'(s)) ds - K_1 < 0; \end{aligned} \quad (4.52)$$

(iii) 当 $x > b_2^{k_1^*}$ 时,

$$\mathcal{D}\tilde{w}(x) - \tilde{w}(x) = \max_{\zeta \geq 0} \left\{ \int_{x-\zeta}^x (\beta_1 - \tilde{w}'(s)) ds \right\} - K_1$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{\zeta > 0} \left\{ \int_{x-\zeta}^{b_2^{k_1^*}} (\beta_1 - \tilde{w}'(s)) ds \right\} - K_1 \\
&= \int_{b_1^{k_1^*}}^{b_2^{k_1^*}} (\beta_1 - \tilde{w}'(s)) ds - K_1 = 0.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

第 3 步 证明 $\mathcal{C}\tilde{w}(x) - \tilde{w}(x) \leq 0$, $x \in (0, b_2^{k_1^*}) \cup (b_2^{k_1^*}, \infty)$. 注意到

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\tilde{w}(x) - \tilde{w}(x) &= \max_{\eta \geq 0} \{ \tilde{w}(x+\eta) - \beta_2\eta - K_2 \} - \tilde{w}(x) \\
&= \max_{\eta \geq 0} \left\{ \int_x^{x+\eta} (\tilde{w}'(s) - \beta_2) ds \right\} - K_2.
\end{aligned}$$

(i) 当 $0 < x < \eta^*$ 时, 有 $\tilde{w}'(x) - \beta_2 > 0$ 成立; 反之, $\tilde{w}'(x) - \beta_2 \leq 0$ 对 $x \geq \eta^*$ 成立. 从而,

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\tilde{w}(x) - \tilde{w}(x) &= \max_{\eta \geq 0} \left\{ \int_x^{x+\eta} (\tilde{w}'(s) - \beta_2) ds \right\} - K_2 \\
&\leq \int_0^{\eta^*} (\tilde{w}'(s) - \beta_2) ds - K_2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

(ii) 当 $x \in [\eta^*, \infty)$ 时, 不等式 $\tilde{w}'(x) - \beta_2 \leq 0$ 成立, 从而,

$$\mathcal{C}\tilde{w}(x) - \tilde{w}(x) = \max_{\eta \geq 0} \left\{ \int_x^{x+\eta} (\tilde{w}'(s) - \beta_2) ds \right\} - K_2 = -K_2 < 0. \tag{4.55}$$

第 4 步 证明 $(\max_{0 \leq a \leq 1} \{ \mathcal{A}^a \tilde{w}(x) \}) (\mathcal{D}\tilde{w}(x) - \tilde{w}(x)) (\mathcal{C}\tilde{w}(x) - \tilde{w}(x)) = 0$.

(i) 当 $x = 0$ 时, 已知 (4.38) 成立, 即 $\mathcal{C}\tilde{w}(x) - \tilde{w}(x) = 0$;

(ii) 当 $0 < x < b_2^{k_1^*}$ 时, 由 (4.35) 知, $\max_{0 \leq a \leq 1} \{ \mathcal{A}^a \tilde{w}(x) \} = 0$;

(iii) 当 $x \geq b_2^{k_1^*}$ 时, 由 (4.36) 知, $\mathcal{D}\tilde{w}(x) - \tilde{w}(x) = 0$.

第 5 步 证明 $\max\{\mathcal{C}\tilde{w}(0) - \tilde{w}(0), -\tilde{w}(0)\} = 0$.

在 (4.34) 条件下, 我们有 (4.38) 成立, 即 $\mathcal{C}\tilde{w}(0) - \tilde{w}(0) = 0$. 另外, 既然 $w(x)$ 是一个递增函数, 那么, $\tilde{w}(0) = w(d^*) > w(0) = 0$ 成立. 当然, $\tilde{w}(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上连续可导是显然的.

5 值函数与最优策略

在以上分析的基础上, 本节将确定值函数和最优策略的明确表达式.

定理 5.1 我们分别在以下 4 种不同情形下给出了值函数 $V(x)$ 及其最优策略 π^* 的解:

(i) 当 $0 < K_1 < I_1(\beta_1/\rho)$, $k_1^*\rho > \beta_2$ 且 $K_2 \geq J(k_1^*)$ 时, $V(x)$ 等于

$$w(x) = \begin{cases} k_1^* \int_0^x \exp \left\{ \int_y^{x_0} 2\theta_2 \frac{a(z)}{1-a(z)} dz \right\} dy, & 0 \leq x \leq x_0, \\ k_1^* (c_1 e^{r+(x-x_0)} + c_2 e^{r-(x-x_0)}), & x_0 \leq x \leq u_2^{k_1^*}, \\ w(u_1^{k_1^*}) + \beta_1(x - u_1^{k_1^*}) - K_1, & x \geq u_2^{k_1^*}, \end{cases} \tag{5.1}$$

其中 $a(x) = Q^{-1}(x)$. 最优策略 $\pi^* = (a^{\pi^*}; L^{\pi^*}; G^{\pi^*})$ 控制下的盈余过程可表示为

$$\begin{cases} X_t^{\pi^*} = x + \int_0^t (\theta_1 - \theta_2(a^{\pi^*}(X_s^{\pi^*}))^2) \lambda \mu_2^2 ds + \int_0^t (1 - a^{\pi^*}(X_s^{\pi^*})) \sqrt{\lambda} \mu_2 dB_s - \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{\varrho_n^{\pi^*} \leq t\}} \zeta_n^{\pi^*}, \\ X_t^{\pi^*} \leq u_2^{k_1^*}. \end{cases} \tag{5.2}$$

最优的分红策略 L^{π^*} 可作如下刻画:

$$\begin{cases} \int_0^{T^{\pi^*}} I_{\{t: X_t^{\pi^*} < u_2^{k_1^*}\}} dL_t^{\pi^*} = 0, \\ \varrho_1^{\pi^*} = \inf\{t \geq 0 : X_{t-}^{\pi^*} \geq u_2^{k_1^*}\}, \\ \varrho_n^{\pi^*} = \inf\{t > \varrho_{n-1}^{\pi^*} : X_{t-}^{\pi^*} = u_2^{k_1^*}\}, \quad n = 2, 3, \dots, \\ \zeta_1^{\pi^*} = u_2^{k_1^*} - u_1^{k_1^*}, & \text{若 } 0 < x \leq u_2^{k_1^*}, \\ \zeta_1^{\pi^*} = x - u_1^{k_1^*}, & \text{若 } x \geq u_2^{k_1^*}, \\ \zeta_n^{\pi^*} \equiv u_2^{k_1^*} - u_1^{k_1^*}, & n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (5.3)$$

在任何情况下都不应该注资, 即

$$G_t^{\pi^*} \equiv 0. \quad (5.4)$$

最优的再保险分出比例为

$$a^{\pi^*}(x) = \begin{cases} Q^{-1}(x), & 0 \leq x \leq x_0, \\ 0, & x_0 \leq x \leq u_2^{k_1^*}, \\ \text{任意值}, & x > u_2^{k_1^*}. \end{cases} \quad (5.5)$$

(ii) 当 $0 < K_1 < I_1(\beta_1/\rho)$ 且 $k_1^* \rho < \beta_2$, 值函数 $V(x)$ 及最优策略 π^* 的解与 (i) 相同.

(iii) 当 $K_1 \geq I_1(\beta_1/\rho)$ 时, 值函数 $V(x)$ 等于

$$w(x) = \begin{cases} k_2^* \int_0^x \exp\left\{\int_y^{x_0} 2\theta_2 \frac{a(z)}{1-a(z)} dz\right\} dy, & 0 \leq x \leq x_0, \\ k_2^*(c_1 e^{r+(x-x_0)} + c_2 e^{r-(x-x_0)}), & x_0 \leq x \leq u_2^{k_2^*}, \\ \beta_1 x - K_1, & x \geq u_2^{k_2^*}, \end{cases} \quad (5.6)$$

其中 $a(x) = Q^{-1}(x)$. 最优策略 $\pi^* = (a^{\pi^*}; L^{\pi^*}; G^{\pi^*})$ 控制下的盈余过程满足

$$\begin{cases} X_t^{\pi^*} = x + \int_0^t (\theta_1 - \theta_2(a^{\pi^*}(X_s^{\pi^*}))^2) \lambda \mu_2^2 ds + \int_0^t (1 - a^{\pi^*}(X_s^{\pi^*})) \sqrt{\lambda} \mu_2 dB_s - \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{\varrho_n^{\pi^*} \leq t\}} \zeta_n^{\pi^*}, \\ X_t^{\pi^*} \leq u_2^{k_2^*}. \end{cases} \quad (5.7)$$

最优的分红策略 L^{π^*} 可作如下刻画:

$$\begin{cases} \int_0^{T^{\pi^*}} I_{\{t: X_t^{\pi^*} < u_2^{k_2^*}\}} dL_t^{\pi^*} = 0, \\ \varrho_1^{\pi^*} = \inf\{t \geq 0 : X_{t-}^{\pi^*} \geq u_2^{k_2^*}\}, \\ \varrho_n^{\pi^*} = \infty, & n = 2, 3, \dots, \\ \zeta_1^{\pi^*} = u_2^{k_2^*}, & \text{若 } 0 \leq x \leq u_2^{k_2^*}, \\ \zeta_1^{\pi^*} = x, & \text{若 } x \geq u_2^{k_2^*}, \\ \zeta_n^{\pi^*} \equiv 0, & n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (5.8)$$

这意味着一旦盈余 x 超过 $u_2^{k_2^*}$ 就立即把盈余全部作为红利分发给股东, 并宣告破产; 当盈余 x 小于等于 $u_2^{k_2^*}$ 时不分红; 当盈余 x 等于 0 时立即破产. 在任何情况下都不应该注资, 即

$$G_t^{\pi^*} \equiv 0. \quad (5.9)$$

最优再保险分出比例为

$$a^{\pi^*}(x) = \begin{cases} Q^{-1}(x), & 0 \leq x \leq x_0, \\ 0, & x_0 \leq x \leq u_2^{k_2^*}, \\ \text{任意值}, & x \geq u_2^{k_2^*}. \end{cases} \quad (5.10)$$

(iv) 当 $0 < K_1 < I_1(\beta_1/\rho)$, $k_1^*\rho > \beta_2$ 且 $K_2 < J(k_1^*)$ 时, 值函数 $V(x)$ 等于

$$\tilde{w}(x) = \begin{cases} k_1^* \int_0^{x+d^*} \exp \left\{ \int_y^{x_0} 2\theta_2 \frac{a(z)}{1-a(z)} dz \right\} dy, & 0 \leq x \leq x_0 - d^*, \\ k_1^* (c_1 e^{r+(x+d^*-x_0)} + c_2 e^{r-(x+d^*-x_0)}), & x_0 - d^* \leq x \leq u_2^{k_1^*} - d^*, \\ \tilde{w}(u_1^{k_1^*} - d^*) + \beta_1(x + d^* - u_1^{k_1^*}) - K_1, & x \geq u_2^{k_1^*} - d^*, \end{cases} \quad (5.11)$$

其中 $a(x) = Q^{-1}(x)$. 最优策略 $\pi^* = (\tilde{a}^{\pi^*}; L^{\pi^*}; G^{\pi^*})$ 控制下的盈余过程满足

$$\begin{cases} X_t^{\pi^*} = x + \int_0^t (\theta_1 - \theta_2(\tilde{a}^{\pi^*}(X_s^{\pi^*}))^2) \lambda \mu_2^2 ds + \int_0^t (1 - \tilde{a}^{\pi^*}(X_s^{\pi^*})) \sqrt{\lambda} \mu_2 dB_s \\ \quad + \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{\tau_n^{\pi^*} \leq t\}} \eta_n^{\pi^*} - \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{\varrho_n^{\pi^*} \leq t\}} \zeta_n^{\pi^*}, \\ 0 \leq X_t^{\pi^*} \leq u_2^{k_1^*} - d^*. \end{cases} \quad (5.12)$$

最优分红策略 L^{π^*} 可作如下刻画:

$$\begin{cases} \int_0^{T^{\pi^*}} I_{\{t: X_t^{\pi^*} < u_2^{k_1^*} - d^*\}} dL_t^{\pi^*} = 0, \\ \varrho_1^{\pi^*} = \inf\{t \geq 0 : X_{t-}^{\pi^*} \geq u_2^{k_1^*} - d^*\}, \\ \varrho_n^{\pi^*} = \inf\{t > \varrho_{n-1}^{\pi^*} : X_{t-}^{\pi^*} = u_2^{k_1^*} - d^*\}, \quad n = 2, 3, \dots, \\ \zeta_1^{\pi^*} = u_2^{k_1^*} - u_1^{k_1^*}, & \text{若 } 0 \leq x \leq u_2^{k_1^*} - d^*, \\ \zeta_1^{\pi^*} = x + d^* - u_1^{k_1^*}, & \text{若 } x \geq u_2^{k_1^*} - d^*, \\ \zeta_n^{\pi^*} \equiv u_2^{k_1^*} - u_1^{k_1^*}, & n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (5.13)$$

当且仅当公司盈余达到 0 时注资最优, 不允许破产发生, 最优注资策略 G^{π^*} 可作如下刻画:

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} I_{\{t: X_t^{\pi^*} > 0\}} dG_t^{\pi^*} = 0, \\ \tau_1^{\pi^*} = \inf\{t \geq 0 : X_{t-}^{\pi^*} = 0\}, \\ \tau_n^{\pi^*} = \inf\{t > \tau_{n-1}^{\pi^*} : X_{t-}^{\pi^*} = 0\}, \quad n = 2, 3, \dots, \\ \eta_n^{\pi^*} \equiv \eta^* = \eta^{k_1^*} - d^*, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.14)$$

最优再保险分出比例为

$$\tilde{a}^{\pi^*}(x) = \begin{cases} Q^{-1}(x + d^*), & 0 \leq x \leq x_0 - d^*, \\ 0, & x_0 - d^* \leq x \leq u_2^{k_1^*} - d^*, \\ \text{任意值}, & x > u_2^{k_1^*} - d^*. \end{cases} \quad (5.15)$$

证明 我们仅证明 (iv) 中的结论, (i)–(iii) 可用类似方法证明. 前面分析已知函数 $\tilde{w}(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上连续可导, $\tilde{w}''$ 在 $(0, b_2^{k_1^*}) \cup (b_2^{k_1^*}, \infty)$ 上连续, 仅在点 $x = b_2^{k_1^*}$ 处不连续. 给定任意策略 $\pi = (a^\pi; L^\pi; G^\pi) \in \Pi$, 根据 Itô 公式得

$$\begin{aligned} e^{-\delta(t \wedge T^\pi)} \tilde{w}(X_{t \wedge T^\pi}^\pi) - \tilde{w}(x) &= \int_0^{t \wedge T^\pi} e^{-\delta s} (\mathcal{A}^{a^\pi} \tilde{w}(X_s^\pi)) ds + \int_0^{t \wedge T^\pi} e^{-\delta s} (1 - a^\pi) \sqrt{\lambda} \mu_2 \tilde{w}'(X_s^\pi) dB_s \\ &\quad + \sum_{X_{s-}^\pi \neq X_s^\pi, 0 \leq s \leq t \wedge T^\pi} e^{-\delta s} (\tilde{w}(X_s^\pi) - \tilde{w}(X_{s-}^\pi)) \\ &\leq \int_0^{t \wedge T^\pi} e^{-\delta s} (1 - a^\pi) \sqrt{\lambda} \mu_2 \tilde{w}'(X_s^\pi) dB_s \\ &\quad + \sum_{X_{s-}^\pi \neq X_s^\pi, 0 \leq s \leq t \wedge T^\pi} e^{-\delta s} (\tilde{w}(X_s^\pi) - \tilde{w}(X_{s-}^\pi)), \end{aligned} \quad (5.16)$$

由 (4.1) 知, 不等式在 $(0, b_2^{k_1^*}) \cup (b_2^{k_1^*}, \infty)$ 上成立. 考虑到区间 $[0, \infty)$ 上有 $\tilde{w}'(x) \in [k_1^*, k_1^* H(d^*)]$, 我们可知,

$$\int_0^{t \wedge T^\pi} e^{-\delta s} (1 - a^\pi) \sqrt{\lambda} \mu_2 \tilde{w}'(X_s^\pi) dB_s \quad (5.17)$$

是一个鞅. 对 (5.16) 两边求期望得

$$\mathbf{E}^x(e^{-\delta(t \wedge T^\pi)} \tilde{w}(X_{t \wedge T^\pi}^\pi)) - \tilde{w}(x) \leq \mathbf{E}^x \left(\sum_{X_{s-}^\pi \neq X_s^\pi, 0 \leq s \leq t \wedge T^\pi} e^{-\delta s} (\tilde{w}(X_s^\pi) - \tilde{w}(X_{s-}^\pi)) \right). \quad (5.18)$$

因为 $\{s : X_{s-}^\pi \neq X_s^\pi\} = \{\varrho_1^\pi, \dots, \varrho_n^\pi, \dots; \tau_1^\pi, \dots, \tau_n^\pi, \dots\}$, 所以,

$$\begin{aligned} \sum_{X_{s-}^\pi \neq X_s^\pi, 0 \leq s \leq t \wedge T^\pi} e^{-\delta s} (\tilde{w}(X_s^\pi) - \tilde{w}(X_{s-}^\pi)) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta \varrho_n^\pi} (\tilde{w}(X_{\varrho_n^\pi}^\pi) - \tilde{w}(X_{\varrho_n^\pi-}^\pi)) I_{\{\varrho_n^\pi \leq t \wedge T^\pi\}} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta \tau_n^\pi} (\tilde{w}(X_{\tau_n^\pi}^\pi) - \tilde{w}(X_{\tau_n^\pi-}^\pi)) I_{\{\tau_n^\pi \leq t \wedge T^\pi\}}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

因为 $\tilde{w}(x)$ 满足 (4.2) 和 (4.3), 所以,

$$e^{-\delta \varrho_n^\pi} (\tilde{w}(X_{\varrho_n^\pi}^\pi) - \tilde{w}(X_{\varrho_n^\pi-}^\pi)) \leq -e^{-\delta \varrho_n^\pi} (\beta_1 \zeta_n^\pi - K_1), \quad \text{若 } \varrho_n^\pi \leq t \wedge T^\pi, \quad (5.20)$$

$$e^{-\delta \tau_n^\pi} (\tilde{w}(X_{\tau_n^\pi}^\pi) - \tilde{w}(X_{\tau_n^\pi-}^\pi)) \leq e^{-\delta \tau_n^\pi} (\beta_2 \eta_n^\pi + K_2), \quad \text{若 } \tau_n^\pi \leq t \wedge T^\pi. \quad (5.21)$$

结合 (5.18)–(5.21) 可得

$$\mathbf{E}^x[e^{-\delta(t \wedge T^\pi)} \tilde{w}(X_{t \wedge T^\pi}^\pi)] - \tilde{w}(x)$$

$$\leq -\mathbb{E}^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta \varrho_n^\pi} (\beta_1 \zeta_n^\pi - K_1) I_{\{\varrho_n^\pi \leq t \wedge T^\pi\}} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta \tau_n^\pi} (\beta_2 \eta_n^\pi + K_2) I_{\{\tau_n^\pi \leq t \wedge T^\pi\}} \right). \quad (5.22)$$

因为 $\tilde{w}(x) = w(x + d^*) > 0$, 故 (5.22) 左端第一项是正数, 从而,

$$-\tilde{w}(x) \leq -\mathbb{E}^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta \varrho_n^\pi} (\beta_1 \zeta_n^\pi - K_1) I_{\{\varrho_n^\pi \leq t \wedge T^\pi\}} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta \tau_n^\pi} (\beta_2 \eta_n^\pi + K_2) I_{\{\tau_n^\pi \leq t \wedge T^\pi\}} \right). \quad (5.23)$$

对 (5.23) 两边取 $t \rightarrow \infty$ 并整理不等式得

$$\tilde{w}(x) \geq \mathbb{E}^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta \varrho_n^\pi} (\beta_1 \zeta_n^\pi - K_1) I_{\{\varrho_n^\pi \leq T^\pi\}} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta \tau_n^\pi} (\beta_2 \eta_n^\pi + K_2) I_{\{\tau_n^\pi \leq T^\pi\}} \right) = V(x, \pi), \quad (5.24)$$

因此, $\tilde{w}(x) \geq V(x)$. 当采用 (5.12)–(5.15) 中所给出的策略 $\pi^* \in \Pi$ 时, 以上所有不等号都变为等号, 即

$$\tilde{w}(x) = V(x, \pi^*).$$

这表明, $\tilde{w}(x) \leq V(x)$. 综合可知, $\tilde{w}(x) = V(x) = V(x, \pi^*)$. $\square$

注 5.1 定理 5.1 表明, 当且仅当 $0 < K_1 < I_1(\beta_1/\rho)$, $k_1^* \rho > \beta_2$ 且 $K_2 < J(k_1^*)$ 时保险公司才会在濒临破产时选择注资. 结合图 4 我们作如下分析:

(1) $I_1(\beta_1/\rho)$ 是保险公司选择注资时能够承受的最大分红固定费用. 由 $I_1(\beta_1/\rho)$ 的定义可知, 它关于比例分红费用因子 β_1 递增, 即当税率降低后, 保险公司愿意承受更多的固定分红费用.

(2) $J(k_1^*)$ 是保险公司选择注资时能够承受的最大固定注资费用. 当 $K_1 \in (0, I_1(\beta_1/\rho))$ 增加时, k_1^* 和 $\eta^{k_1^*}$ 递减, $J(k_1^*)$ 随之减小. 这说明, 当固定分红费用增加时, 保险公司愿意承受的固定注资费用相应减小. 另外易验证, $J(k_1^*)$ 关于 β_2 是递减的, 即当比例注资费用减少时, 保险公司能够承受更多的固定注资费用; $J(k_1^*)$ 关于 β_1 是递增的, 即当比例分红费用减少时, 保险公司能够承受更多的固定注资费用.

(3) 当 K_1 增加时, k_1^* , $\eta^{k_1^*}$ 和 $b_1^{k_1^*}$ 会逐渐减小, 而分红临界值 $b_2^{k_1^*}$ 和分红额度 $b_2^{k_1^*} - b_1^{k_1^*}$ 相应增大.

(4) 当 K_2 减小时, $b_1^{k_1^*}$ 和 $b_2^{k_1^*}$ 会逐渐变小, 但两者之差不变, 即固定注资费用的降低会影响到分红临界值 $b_2^{k_1^*}$, 但是不影响分红额度 $b_2^{k_1^*} - b_1^{k_1^*}$.

注 5.2 当 $\theta_2 = \theta_1$ 时, $H(0+) = \infty$, 定理 5.1 中讨论的四种情形将退化为两种. 进一步, 令 $K_1, K_2 \rightarrow 0$, $\beta_1 \rightarrow 1$, 则模型简化为文献 [14] 中的形式. 这些特殊情形下的值函数和最优策略可视为定理 5.1 的极限形式.

致谢 衷心感谢匿名审稿人提出的宝贵改进意见.

参考文献

- 1 De Finetti B. Su un'ipostazione alternativa della teoria collettiva del rischio. In: Proceedings of the Transactions of the XVth International Congress of Actuaries. New York: Congrès International d'Actuaires, 1957, 2: 433–443
- 2 Løkka A, Zervos M. Optimal dividend and issuance of equity policies in the presence of proportional costs. Insurance Math Econom, 2008, 42: 954–961
- 3 Sethi S P, Taksar M. Optimal financing of a corporation subject to random returns. Math Finance, 2002, 12: 155–172
- 4 Paulsen J. Optimal dividend payments and reinvestments of diffusion processes with both fixed and proportional costs. SIAM J Control Optim, 2008, 47: 2201–2226
- 5 Kulenko N, Schmidli H. Optimal dividend strategies in a Cramér-Lundberg model with capital injections. Insurance Math Econom, 2008, 43: 270–278

- 6 Yao D J, Yang H L, Wang R M. Optimal dividend and capital injection problem in the dual model with proportional and fixed transaction costs. *Eur J Oper Res*, 2011, 211: 568–576
- 7 张帅琪, 刘国欣. 复合 Poisson 模型带比例与固定交易费用的最优分红与注资. *中国科学: 数学*, 2012, 42: 827–843
- 8 Jin Z, Yang H L, Yin G. Numerical methods for optimal dividend payment and investment strategies of regime-switching jump diffusion models with capital injections. *Automatica*, 2013, 49: 2317–2329
- 9 He L, Liang Z X. Optimal financing and dividend control of the insurance company with proportional reinsurance policy. *Insurance Math Econom*, 2008, 42: 976–983
- 10 Meng H, Siu T. On optimal reinsurance, dividend and reinvestment strategies. *Econ Model*, 2011, 28: 211–218
- 11 Peng X F, Chen M, Guo J Y. Optimal dividend and equity issuance problem with proportional and fixed transaction costs. *Insurance Math Econom*, 2012, 51: 576–585
- 12 Wu Y D, Guo J Y. Optimal dividend and dynamic reinsurance strategies with capital injections and proportional costs. *Acta Math Appl Sin Engl Ser*, 2012, 28: 505–524
- 13 Guan H Q, Liang Z X. Viscosity solution and impulse control of the diffusion model with reinsurance and fixed transaction costs. *Insurance Math Econom*, 2014, 54: 109–122
- 14 Zhou M, Yuen K C. Optimal reinsurance and dividend for a diffusion model with capital injection: Variance premium principle. *Econ Model*, 2012, 29: 198–207
- 15 Yao D J, Yang H L, Wang R M. Optimal risk and dividend control problem with fixed costs and salvage value: Variance premium principle. *Econ Model*, 2014, 37: 53–64

Optimal dividend, capital injection and reinsurance strategies with variance premium principle

YAO DingJun, WANG RongMing & XU Lin

Abstract This paper considers the combined optimal dividend, capital injection and reinsurance strategies for an insurance company. The proportion reinsurance is taken as a risk control, the variance principle is adopted by the insurer and the reinsurer with different parameter respectively. Furthermore, the insurer can control its surplus by paying dividends and injecting capitals, which incur both proportional and fixed costs. The value of the company is defined as the difference between the expected discounted dividends and the expected discounted capital injections until the time of bankruptcy. To maximize the value of the company, by solving the impulse problem, we obtain explicit solutions for value function and optimal strategy.

Keywords variance premium principle, dividend payment, capital injection, proportional reinsurance, transaction cost

MSC(2010) 62P05, 93E20, 97M30

doi: 10.1360/012014-45