论文

超网络的无标度特性研究

胡枫*, 李发旭, 赵海兴

青海师范大学计算机学院, 西宁 810008;

*联系人, E-mail: qhhuf@163.com

收稿日期: 2016-10-09; 接受日期: 2016-10-31; 网络出版日期: 2017-01-24

国家自然科学基金(编号: 61663041)、青海省科技计划项目(编号: 2015-ZJ-723)和教育部春晖计划项目(编号: Z2015058)资助

摘要 无标度模型是复杂网络的一个开创性的研究. 现实世界中的绝大多数网络都具有无标度特性, 复杂网络中无标度网络的形成机制基于增长和度优先连接机制. 本文基于超图理论对超网络的无标度形成机制进行了系统研究, 发现超网络无标度形成机制与超边不断增长和超度优先连接因素有关: 剔除其中的任意一个因素会导致超网络不再具有无标度特性, 二者缺一不可. 本文的研究结果对超网络的无标度特性的起因以及对现实超网络无标度特性的判断具有借鉴意义.

关键词 无标度, 超网络, 超图, 超度优先连接

PACS: 89.75.Fb, 02.10.0x, 89.75.-k, 89.20.Ff

1 引言

众所周知, 无标度模型是复杂网络的一个开创性研究, 自Watts和Strogatz^[1]提出小世界模型、Barabási和Albert (BA)^[2]提出无标度模型以来, 复杂网络的研究进入了空前的研究热潮^[3-11], 无标度模型被发现广泛存在于很多现实的网络中^[7-10], 如因特网、万维网、合作网络、生物网络等许多现实世界的大规模网络都是无标度网络. 现实网络中普遍存在的增长和度优先连接机制导致了无标度的涌现, Barabási和Albert^[2]已经证明了在这两个基本假定的基础上, 网络最终必然发展成无标度网络.

我们生活的世界存在着大量的复杂系统, 其中一部分可以通过典型的基于普通图的复杂网络加以描

述^[1-10], 随着网络规模的日益扩大和连接的复杂多变, 出现了许多超大规模的复杂网络^[11-15], 这些网络节点和边的数量众多, 结构越显复杂, 一般的复杂网络不能完全刻画这些真实世界网络的特征^[13], 因此超网络应运而生^[14]. 超网络作为研究复杂系统与复杂性问题的新方法, 在复杂网络研究成热潮后, 超网络研究开始受到关注, 并被广泛运用于解决实际问题^[15-25]. 在大数据浪潮的冲击下, 方锦清^[16]针对网络科学面临的最新前沿课题——超网络, 讨论了若干典型的超网络及研究进展, 并进一步提供了超网络发展的若干挑战性课题和研究机遇. 在大数据环境下, 对于大规模的数据不可能逐个进行检验, 网络建模既可以帮助理解网络的结构特征, 也可以在构建的模型上研究网络动力学. 因此, 对大数据建模仍旧是一个有效的科学方法, 鉴于

引用格式: 胡枫, 李发旭, 赵海兴. 超网络的无标度特性研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2017, 47: 060501
Hu F, Li F X, Zhao H X. The research on scale-free characteristics of hypernetworks (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2017, 47: 060501, doi: 10.1360/SSPMA2016-00426

超网络具有大数据、复杂性、多维性等特点^[16], 超网络的建模和分析无疑有助于大规模数据的系统分析.

近年来, 基于超图的超网络研究主要集中在均匀超网络模型构建和基于现实世界的超网络特性研究上^[17-25]. Liu等人^[17]构建了基于超网络的知识传播模型, 结合知识传播特点提出知识产生和知识扩散模型. Zhang等人^[18]建立了一种基于用户背景知识和对象、标签双重优先连接机制的三均匀超网络模型, 裴伟东等人^[19]也研究了基于一类三角形结构的均匀动态网络结构的演化模型, Wang等人^[20]提出了一种基于超边的增长和超度优先连接机制的 $(m+1)$ 型的均匀超网络动态演化模型, 胡枫等人^[21]提出了每次增加一个节点与网络中的 m 个旧节点组成超边的 $(1+m)$ 型均匀超网络模型. 郭进利等人^[22]构建了超网络和复杂网络的统一演化模型, 利用Poisson过程理论和连续化方法对模型进行分析, 获得了网络稳态平均度分布的解析表达式, 另外, 他们^[23]还建立了非线性择优连接非均齐超网络演化模型, 研究了非均齐超网络演化机制和拓扑性质. 基于现实世界超网络特性分析方面Estrada等人^[14]对复杂超网络的子图中心度和聚集系数进行了研究, Ghoshal等人^[24]针对随机三部超图及它们的应用进行了研究, Zlatić等人^[25]研究了三部超图模型的统计特性, 刘强等人^[26]对层次超网络展开了研究, 潘旭伟等人^[27]构建了以标签为节点、以标注活动为超边的社会化标注行为超网络, Guo等人^[28]建立了加权超网络模型, 研究加权超网络上的无标度行为.

那么无标度特性在超网络中是否普遍存在? 超网络中的什么因素会导致无标度特性? 本文将基于这两点考虑, 系统研究超网络的无标度形成机制. 将BA模型在普通图上的演化过程扩展到超图中, 提出了超边不断增长和超度优先连接机制的超网络模型, 从而研究分析导致超网络无标度特性的因素.

2 通用超网络模型

BA无标度网络中每次增加一个新节点和网络中已有的 m 个老节点按照度优先连接, 每条边连接的是两个节点. 在超网络中的超边允许包含多个节点, 超边中只有两个节点, 便是普通图, 所以, 超图是普通图的推广. 故本文提出一种通用的超网络模型: 在每个时间步 t 内增加 l 个新节点和网络中已有的 m 个老节点组成超边, 每次选取老节点的概率与该老节点的超度成正比. 随着时间增长, 网络不断添加新节点和超边, 按照超度优先连接逐步演化, 当每次加入到超边中的节点数为2时, 超图退化为普通图, 得到的演化模型即为BA模型. 该超网络模型的构建采取的是在BA模型上的一种扩展构建方法, 契合于超图是图的一种推广.

2.1 模型构建算法

第1步: 初始化. 假设初始时超网络有 m_0 个节点 $v_1, v_2, \dots, v_{m_0}$, 以及包含这 m_0 个节点的一条超边 $E_0 = \{v_1, v_2, \dots, v_{m_0}\}$.

第2步: 增长. 在 t 时间内, 每次增加 $l(l \geq 1)$ 个新的节点, 与网络中已经存在的 $m(m \geq m_0)$ 个节点组成一条新的超边.

第3步: 超度优先连接. 从超网络中已经存在的节点中选取 m 个老节点, 与新加入的 l 个节点组成超边. 每次选取老节点 i 的概率为

$$\Pi d_H(i) = \frac{d_H(i)}{\sum_j d_H(j)}, \quad (1)$$

其中分子 $d_H(i)$ 等于节点 i 的超度, 分母是 t 时刻所有节点的超度之和.

经过 t 时刻后, 超网络中有 $t+1$ 条超边, m_0+lt 个节点, 所有节点的超度总和为 $m_0+(m+l)t$. 图1显示了 $m_0=4$,

图1 (网络版彩图)超网络演化过程示意图

Figure 1 (Color online) Illustration of the evolving process of hypernetwork model.

$m=2, l=2$ 时超网络动态演化到第4步的过程. 其中空心圆为新加入的节点, 虚曲线为新生成的超边.

在采用以上的超边增长和超度优先连接机制所生成的超网络, 由于每个时间步内生成 l 个新节点, 和网络中已有的 m 个节点组成超边, 每条超边中元素的个数皆为 $(l+m)$, 所以得到的是 $(l+m)$ 均匀超图, 故称该模型为 $(l+m)$ 型超网络模型. 特别地, 当 $l=1$, 该模型是胡枫等人^[21]构建的超网络模型; 当 $m=1$, 即为Zhang等人^[18]和Wang等人^[20]构建的超网络模型; 当 $l=m=1$ 时, 可视为BA模型^[2]的等价模型. 因此, 把该模型也称为通用超网络模型.

以上构建的通用超网络模型的超度分布是否服从幂律分布? 网络的超度分布和那些参数有关? 可以通过仿真和理论分析系统研究这些问题.

2.2 通用超网络模型的分析与仿真

为了验证超网络无标度形成的机制, 对超网络的演化机制分3种情形仿真实验:

情形1: 超网络具有不断增长和超度优先连接机制.

按照2.1节的模型构建算法, 每个时间步 t 内增加 l 个新节点, 依据(1)式所给的概率选择网络中已经存在的 m 个节点组成超边. 即网络随着时间 t 的增长, 不断添加新的节点和超边, 按照超度优先连接机制逐步演化.

为了对比起见, 取初始值 $m_0=3, 5, 7$, 每个时间步内增加的新节点数 $l=2, 3, 4$, 选取的旧节点的个数相应的取值为 $m=1, 2, 3$, 分别构造出了3-均匀超网络、5-均匀超网络和7-均匀超网络. 图2为这3种超网络的超边总数增加到10000时, 计算机仿真得到双对数坐标下的超度分布图. 为了结果的合理有效, 实验结果取了50次的平均值. 实验结果表明通用超网络的超度分布显示出与BA无标度网络一样的特性, 即服从幂律分布, 具有无标度特性. 该特性的形成与初始值、网络规模和新旧节点参数无关.

情形2: 超网络不具有超度优先连接机制, 保持增长机制.

每个时间步 t 内, 增加 l 个新节点, 与等概率选取网络中已经存在的 m 个老节点组成超边. 即节点 i 被选择的概率

$$\Pi d_H(i) = 1 / (m_0 + tl),$$

分母为 t 时刻网络中的节点总数. 为了和情形1比较, 参

数的取值与图2相同, 唯一的区别是每次选择的老节点不再是超度优先, 而是依据 t 时刻的节点总数等概率选取. 计算机仿真结果如图3所示. 实验结果表明超网络不采取超度优先连接机制时, 超度分布的幂律特性就消失, 不具有无标度特性, 而为指数分布

$$P(d_H) = \exp(-\beta d_H).$$

情形3: 超网络不具有增长特性, 只有超度优先连接机制.

网络初期演化与情形1相同, 采取增长和超度优先连接机制, 当网络规模增长到固定的 N 值后不再增长, 每个时间步内仍旧以(1)式的概率选取 m 个节点组合成超边. 实验结果表明同BA一样, 在初期展示为无标度特性, 随着时间的不断增加, 当 $T \sim N^2$ 网络规模与

图2 (网络版彩图)情形1在双对数坐标下的超度分布图
Figure 2 (Color online) The log-log distribution of hyperdegree for situation 1.

图3 (网络版彩图)情形2在双对数坐标下的超度分布图
Figure 3 (Color online) The log-log distribution of hyperdegree for situation 2.

时间等同时, 系统达到了一个稳态. 图4即为超网络 $m=2, l=3$ 时, N 固定在100, t 增加到10000时不具有增长特性, 只具有超度优先连接机制的超度分布图. 为了对比起见, 给出了 $m=1, l=1$ 时, 即BA网络中不具有增长的度分布图.

2.3 平均场理论解析

为了验证我们的演化模型仿真的超度分布结果, 本文利用平均场理论对节点的超度分布进行理论分析. 初始假设有 m_0 个节点且有一条包含这 m_0 个初始节点的超边, 所以每个节点的超度为1. 增长到 t 时间步后, 超网络中有 $t+1$ 条超边, m_0+lt 个节点, 所有节点的超度总和为 $m_0+(l+m)t$. 每个 t 时间步内, 新增加的 l 节点与已经存在的 m 个节点组合, 生成一条新的超边. 令 $d_H(t)$ 表示在 t 时间步结束时节点 i 的超度, 而节点 i 是在第 t_i 时刻加入网络的, $\Pi(d_H(i))$ 由(1)式定义, 每个时间步 t 内选择 m 个旧节点, 因此, 根据连续场理论, 把 $d_H(i)$ 看作连续动力学函数, 节点 i 的超度 $d_H(i)$ 应该近似地满足下述动力学方程:

$$\frac{\partial d_H}{\partial t} \approx m \Pi(d_H(i)) \approx m \frac{d_H(t)}{\sum_j d_H(j)}, \quad (2)$$

分母求和是在 t 时刻超网络中所有已有节点的超度的总和. 当 m_0 较小, t 较大时可得

$$\sum_j d_H(j) = m_0 + t(m+l) \approx t(m+l),$$

代入(2)式得

图4 (网络版彩图)情形3在双对数坐标下的超度分布图
Figure 4 (Color online) The log-log distribution of hyperdegree for situation 3.

$$\frac{\partial d_H}{\partial t} \approx m \Pi(d_H(i)) \approx \frac{m d_H(t)}{t(m+l)}. \quad (3)$$

每个节点加入超网络时, 节点的超度的初始值 $d_H(i)=1$, 则解偏微分(3)式得

$$d_H(t) = \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{m}{m+l}}.$$

由于超网络中加入超边中的节点是随机选择的, 因此节点具有超度 d_H 的概率为

$$P(d_H(t) < d_H) = P\left(t_i > \frac{t}{d_H^{(m+l)/m}}\right). \quad (4)$$

假设在相同的时间间隔, 添加 l 个新节点, 则其中的新节点 i 应该在 lt 个新加入的节点中服从均匀分布, 即 t_i 值具有常数的概率密度 $\rho(t_i)=1/lt$, 代入(4)式得

$$\begin{aligned} P\left(t_i > \frac{t}{d_H^{(m+l)/m}}\right) &= 1 - P\left(t_i \leq \frac{t}{d_H^{(m+l)/m}}\right) \\ &= 1 - \frac{t}{d_H^{(m+l)/m} \cdot lt}. \end{aligned}$$

因此, 网络的瞬时超度分布 $P(d_H, t)$ 为

$$P(d_H, t) = \frac{\partial P(d_H(t) < d_H)}{\partial d_H} = \frac{m+l}{m} l d_H^{-(2+l/m)},$$

即节点超度分布

$$P(d_H) = \frac{m+l}{m} l d_H^{-(2+l/m)}. \quad (5)$$

(5)式说明通用超网络模型的超度分布是幂律的, 而幂指数 $\gamma=2+l/m$, 其中 l 为每次新加入的节点数, m 为每次选取的旧节点数. 取 $l=3, m=2$ 时, 计算机仿真和理论解析的超度分布结果如图5所示, 其中正方形表示模拟结果, 而圆形是将 l 和 m 带入(5)式的理论解析结果, 最终发现理论解析值能很好地和模拟值吻合.

3 结果与分析

通过数值模拟与理论解析说明通用超网络的超度分布服从幂律分布, 具有无标度特性, 幂指数为 $\gamma=2+l/m$, 其中 l 为每次新增节点数, m 为每次选取的旧节点数, 这表明无标度超网络的幂指数与新旧节点的比率成正比, 即新增节点越多, 其幂指数越大, 反之亦然, 如果旧

图5 (网络版彩图) 双对数坐标下的模拟与理论解析超度分布图

Figure 5 (Color online) The log-log distribution of hyperdegree of simulation result and theoretical analysis.

节点数增加越多, 其幂指数越小. 特别是, 当 $l=m=1$ 时, 通用超网络模型退化为BA模型, 幂指数 $\gamma=2+l/m=3$, 与BA模型的幂指数值完全吻合.

依据2.2节仿真分析得出超网络只增长、不超度优先连接或超度优先连接、不增长情形下, 均不具有无标度特性, 仅当超网络既具有不断增长又有超度优

先连接时才具有无标度特性. 理论解析结果与仿真分析一致.

4 结束语

本文主要讨论了超网络的无标度特性形成的机制. 通过构建一种基于超边不断增长和超度优先连接机制的通用超网络模型, 分3种情形模拟超网络演化过程, 发现超网络无标度形成的机制与超边不断增长和超度优先连接因素有关, 当剔除其中的任意一个因素, 会导致超网络不再具有无标度特性, 二者缺一不可. 当超边中的节点数为2时, 超图退化为普通图, 得到的演化模型即为BA模型, 因此, BA中剔除边增长和度优先连接的任意一个因素会导致BA网络不再具有无标度特性, 这与Barabási与Albert在文献[2]中得出的结论一致. 进一步通过理论解析得出无标度超网络的幂指数 $\gamma=2+l/m$, 其中 l 为新加入的节点数, m 为老节点数, 因此, 只要适当控制新旧节点的比率, 可得具有任意标度指数的无标度超网络. 本文的研究结果对分析超网络无标度形成的起因以及对判断现实超网络是否具有无标度特性具有借鉴意义.

参考文献

- Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of “small-world” networks. *Nature*, 1998, 393: 440–442
- Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, 286: 509–512
- Albert R, Barabási A L. Statistical mechanics of complex networks. *Rev Mod Phys*, 2002, 74: 47–97
- Dorogovtsev S N, Mendes J F F, Samukhin A N. Structure of growing networks with preferential linking. *Phys Rev Lett*, 2000, 85: 4633–4636
- Dorogovtsev S N, Mendes J F F. Evolution of networks. *Adv Phys*, 2002, 51: 1079–1187
- Newman M E J. Models of the small world. *J Statistical Phys*, 2000, 101: 819–841
- Barabási A L, Albert R, Jeong H. Mean-field theory for scale-free random networks. *Physica A*, 1999, 272: 173–187
- Faloutsos M, Faloutsos P, Faloutsos C. On power-law relationships of the internet topology. *SIGCOMM Comput Commun Rev*, 1999, 29: 251–262
- Adamic L A, Huberman B A, Barabási A L, et al. Power-law distribution of the world wide web. *Science*, 2000, 287: 2115
- Newman M E J. The structure of scientific collaboration networks. *Proc Natl Acad Sci*, 2001, 98: 404–409
- Jeong H, Tombor B, Albert R, et al. The large-scale organization of metabolic networks. *Nature*, 2000, 407: 651–654
- Neubauer N, Obermayer K. Hyperincident connected components of tagging networks. In: *Proceedings of the 20th ACM Conference on Hypertext and Hypermedia*. New York: ACM press, 2009. 229–238
- Nagurney A, Dong J, Zhang D. A supply chain network equilibrium model. *Transp Res Part E-Logist Transp Rev*, 2002, 38: 281–303
- Estrada E, Rodríguez-Velázquez J A. Subgraph centrality and clustering in complex hyper-networks. *Physica A*, 2006, 364: 581–594
- Wang Z P, Wang Z T. *Hypernetworks theory and application* (in Chinese). Beijing: Beijing Science Press, 2008 [王志平, 王众托. 超网络理论及其应用. 北京: 科学出版社, 2008]
- Fang J Q. Network science and engineering faced with a new challenge and developing opportunity under the wave impact of big data (in Chinese). *Chin J Nat*, 2013, 35: 345–354 [方锦清. 大数据浪潮下网络科学与工程面临的挑战和机遇. 自然科学-科学进展. 2013, 35: 345–354]
- Liu J G, Yang G Y, Hu Z L. A knowledge generation model via the hypernetwork. *PLoS One*, 2014, 9: e89746

- 18 Zhang Z K, Liu C. A hypergraph model of social tagging networks. *J Stat Mech*, 2010, 2010: P10005, arXiv: [1003.1931](#)
- 19 Pei W D, Xia W, Wang Q L, et al. Study of a class of dynamic complex network evolving models with a triangular structure (in Chinese). *J Univ Sci Tech China*, 2010, 40: 1186–1190 [裴伟东, 夏玮, 王全来, 等. 一类三角形结构动态复杂网络演化模型分析. 中国科学技术大学学报, 2010, 40: 1186–1190]
- 20 Wang J W, Rong L L, Deng Q H, et al. Evolving hypernetwork model. *Eur Phys J B*, 2010, 77: 493–498
- 21 Hu F, Zhao H X, Ma X J. An evolving hypernetwork model and its properties (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2013, 43: 16–22 [胡枫, 赵海兴, 马秀娟. 一种超网络模型构建及特性分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, 43: 16–22]
- 22 Guo J L, Zhu X Y. Emergence of scaling in hypernetworks (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2014, 63: 090207 [郭进利, 祝昕昀. 超网络中标度律的涌现. 物理学报, 2014, 63: 090207]
- 23 Guo J L. Emergence of scaling in non-uniform hypernetworks—Does “the rich get richer” lead to a power-law distribution (in Chinese)? *Acta Phys Sin*, 2014, 63: 208901 [郭进利. 非均匀超网络中标度律的涌现—富者愈富导致幂律分布吗? 物理学报, 2014, 63: 208901]
- 24 Ghoshal G, Zlatić V, Caldarelli G, et al. Random hypergraphs and their applications. *Phys Rev E*, 2009, 79: 066118, arXiv: [0903.0419](#)
- 25 Zlatić V, Ghoshal G, Caldarelli G. Hypergraph topological quantities for tagged social networks. *Phys Rev E*, 2009, 80: 036118, arXiv: [0905.0976](#)
- 26 Liu Q, Fang J Q, Li Y. Some characteristics of three-layer supernetwork evolution model (in Chinese). *Complex Syst Complex Sci*, 2015, 12: 64–71 [刘强, 方锦清, 李永. 三层超网络演化模型特性研究. 复杂系统与复杂性科学, 2015, 12: 64–71]
- 27 Pan X W, Fu Q M. Exploring behavior social tagging by hypernetwork (in Chinese). *Syst Eng*, 2015, 33: 78–83 [潘旭伟, 傅青苗. 基于超网络的社会化标注行为. 系统工程, 2015: 78–83]
- 28 Guo J L, Suo Q. Brand effect versus competitiveness in hypernetworks. *Chaos*, 2015, 25: 023102, arXiv: [1407.2416](#)

The research on scale-free characteristics of hypernetworks

HU Feng^{*}, LI FaXu & ZHAO HaiXing

College of Computer, Qinghai Normal University, Xining 810008, China

The scale-free model is a pioneering study on complex networks. In the real world, most networks display the scale-free characteristics. The formation mechanism of the scale-free networks in complex ones is based on two generic mechanisms: growth and degree preferential attachment. In this paper, it systematically studied the scale-free hypernetwork formation mechanism on the basis of the hypergraph theory. As a result, it also finds that the scale-free hypernetwork has something to with hyperedge growth and hyperdegree preferential attachment. These two factors are indispensable. This result can be used as a reference for the cause of the scale-free hypernetwork and the judgment of the scale-free hypernetwork in reality.

scale-free, hypernetwork, hypergraph, hyperdegree preferentially attachment

PACS: 89.75.Fb, 02.10.0x, 89.75.-k, 89.20.Ff

doi: [10.1360/SSPMA2016-00426](#)