无界分块算子矩阵的谱分布

齐雅茹^{①②}, 黄俊杰^①, 阿拉坦仓^{①③*}

① 内蒙古大学数学科学学院, 呼和浩特 010021;

② 内蒙古工业大学理学院, 呼和浩特 010051;

③ 呼和浩特民族学院, 呼和浩特 010051

E-mail: qiyaru2002@163.com, chunkitvong@yahoo.com, alatancangchen@gmail.com

收稿日期: 2013-07-04; 接受日期: 2014-05-09; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11061019 和 11261034)、高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20111501110001)、教育部“春晖”计划 (批准号: Z2009-1-01010)、内蒙古自然科学基金 (批准号: 2013ZD01 和 2013JQ01) 和内蒙古自治区高等学校青年科技英才支持计划 (批准号: NJYT-12-B06) 资助项目

摘要 本文首先给出次对角元有界的 2×2 阶无界算子矩阵的 Gershgorin 定理, 然后利用主对角元算子的谱和数值域刻画整个算子矩阵的谱分布. 特别地, 当次对角元算子互为共轭 (反共轭) 算子时, 结合二次数值域和 Gershgorin 定理对谱分布给出更精细的描述.

关键词 无界分块算子矩阵 谱 数值域 二次数值域

MSC (2010) 主题分类 47A10, 47A12

1 引言

无界分块算子矩阵为描述具有混合阶偏微分方程的耦合系统提供了有效方法, 从而具有重要的物理背景和广泛的实际应用. 例如, 具有乘积曲面度量的 Riemann 自旋流形上定义的 Dirac 算子是 2×2 阶无界自伴算子矩阵; 将量子力学、量子场论和弹性力学的基本方程导入 Hamilton 系统后得到的 Hamilton 算子是 2×2 阶的无界非自伴算子矩阵. 当无界算子矩阵为非自伴算子或每个元素均为无界时, 研究其谱性质较为困难^[1,2]. Atkinson 等人^[3] 研究了无界非自伴算子矩阵的本质谱; Langer 等人^[4] 研究了 Hamilton 算子的不变子空间和相应 Riccati 方程的解; Tretter^[5] 研究了无界算子矩阵的二次数值域和谱性质等.

当算子矩阵 T 自伴时, 其谱、数值域和二次数值域均为实数, 预解式 $(T - \lambda)^{-1}$ 可由 λ 到谱集的距离估计, 以及所有的特征值都是代数简单的 (没有 Jordan 链). 但当算子非自伴时, 谱集和数值域不再是实数, 预解式也不能由 λ 到谱集的距离刻画. 对于无界算子矩阵而言, 人们关注的热点问题有谱、数值域、二次数值域、不变子空间和分块对角化以及算子的特征值估计等. 在谱性质的研究中, 较为常用的研究方法有谱函数 (Reisz 投影函数)、Schur 补、二次补、数值域、二次数值域和 Gershgorin 定理等.

当算子矩阵有界时, 其谱包含在二次数值域的闭包和数值域的闭包内, 也可借助 Gershgorin 定理用其内部元素的谱去描述整个算子矩阵谱的范围. 不同于有界情形, 无界算子矩阵的谱不一定包含在二次数值域的闭包中, 甚至可以不包含在数值域的闭包中. 文献 [5] 应用二次数值域的方法刻画了无界自伴算子矩阵和无界 J -自伴算子矩阵谱的包含关系.

英文引用格式: Qi Y R, Huang J J, Alatancang. Spectral inclusion properties of some unbounded block operator matrices (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 1099–1110, doi: 10.1360/N012013-00104

1931 年, Gershgorin 提出矩阵特征值的圆盘估计定理, 即矩阵的特征值落在以对角元为圆心, 以对角元除外的矩阵行和为半径的圆盘内. 该定理称为 Gershgorin 定理, 在线性代数和数值分析中具有重要的应用. 文献 [6–8] 利用 Gershgorin 定理描述了矩阵的特征值和分块矩阵的特征值的范围; 文献 [9] 利用该方法刻画了有界分块算子矩阵的谱分布; 文献 [5] 分别应用二次数值域和 Gershgorin 定理给出了有界自伴算子矩阵的谱分布: 当主对角元的谱可分离时利用二次数值域的方法能得到更精细的范围, 在不可分离时此方法失效, 但仍可利用 Gershgorin 定理去刻画. 对某些算子矩阵, 可以通过重新进行空间分解使得其对角元算子具有分离的谱, 从而又可以用二次数值域得到相对精细的描述. 对一般的无界算子矩阵, Gershgorin 定理会失效, 因为需要算子矩阵中非对角元的有界性, 特别地, 在 2×2 阶情形即为次对角元的有界性. 我们发现, Gershgorin 定理是研究次对角元有界的 2×2 阶无界算子矩阵谱分布的好方法.

本文结合数值域、二次数值域和 Gershgorin 定理描述 2×2 阶无界稠定算子矩阵

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \oplus Y \rightarrow X \oplus Y \quad (1.1)$$

的谱分布, 其中 X 和 Y 是无穷维复 Hilbert 空间,

$$A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X, \quad B : \mathcal{D}(B) \subset Y \rightarrow X, \quad C : \mathcal{D}(C) \subset X \rightarrow Y, \quad D : \mathcal{D}(D) \subset Y \rightarrow Y$$

为线性算子. 本文首先给出 B 和 C 有界时无界算子矩阵 $\mathcal{A}$ 的 Gershgorin 定理, 在此基础上得到本文的主要结论:

(1) 当 A 和 D 为亚正规算子时, 利用 A 和 D 的谱刻画整个算子矩阵的谱分布, 即

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{dist}(\lambda, \sigma(A) \cup \sigma(D)) \leq \max\{\|B\|, \|C\|\}\};$$

(2) 当 A 和 D 为一般的无界算子时, 利用 A 和 D 的数值域刻画整个算子的谱分布, 即

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{dist}(\lambda, W(A) \cup W(D)) \leq \max\{\|B\|, \|C\|\}\};$$

(3) 当 $C = \pm B^*$ 时, 结合二次数值域和 Gershgorin 定理得到更加精细的结果 (见定理 2.6 和 2.7).

对于 Banach 空间 X 上的线性算子 T , 其定义域、值域和零空间分别记为 $\mathcal{D}(T)$ 、 $\mathcal{R}(T)$ 和 $\mathcal{N}(T)$. 对于 $\Omega \subset \mathbb{C}$, 我们记

$$\text{dist}(\lambda, \Omega) = \inf_{m \in \Omega} |\lambda - m|.$$

下面给出本文涉及的一些基本概念.

定义 1.1 设 T 为 Banach 空间 X 中的线性算子, 则 T 的正则集 $\rho(T)$ 定义为

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ 是单射}, \mathcal{R}(T - \lambda) = X, (T - \lambda)^{-1} \text{ 有界}\},$$

并称集合

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

为 T 的谱. 如果 T 是闭线性算子, 则由闭图像定理有

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ 是双射}\}.$$

定义 1.2^[10] 设 T 为 Banach 空间 X 中的线性算子, 则 T 的近似点谱 $\sigma_{ap}(T)$ 定义为

$$\sigma_{ap}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \{x_n\}_1^\infty \subset \mathcal{D}(T), \|x_n\| = 1 \text{ 使得 } (T - \lambda I)x_n \rightarrow 0\}.$$

记 T 的 1- 类剩余谱

$$\sigma_{r,1}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ 是单射, } \overline{\mathcal{R}(T - \lambda I)} \neq X, \mathcal{R}(T - \lambda I) \text{ 是闭的}\},$$

则对于闭线性算子 T , 根据闭图像定理, 我们有 $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_{r,1}(T)$.

定义 1.3^[11] 设 X 为 Hilbert 空间且具有内积 $(\cdot, \cdot)$, T 为 X 中定义的线性算子, 则数值域 $W(T)$ 定义为

$$W(T) := \{(Tx, x) : x \in \mathcal{D}(T), \|x\| = 1\}.$$

定义 1.4^[12] 设 $\mathcal{A}$ 为 $X \oplus Y$ 中由 (1.1) 定义 of 的无界分块算子矩阵. 对于 $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\|f\| = \|g\| = 1$, 定义

$$\mathcal{A}_{f,g} := \begin{pmatrix} (Af, f) & (Bg, f) \\ (Cf, g) & (Dg, g) \end{pmatrix},$$

则称集合

$$W^2(\mathcal{A}) := \bigcup_{\substack{\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \\ \|f\| = \|g\| = 1}} \sigma_p(\mathcal{A}_{f,g})$$

为 $\mathcal{A}$ 的二次数值域.

定义 1.5^[13] 称 Hilbert 空间 X 中的稠定线性算子 T 为亚正规算子, 如果

- (1) $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$;
- (2) $\|Tx\| \geq \|T^*x\|, x \in \mathcal{D}(T)$.

如果 $\|Tx\| \geq \|T^*x\|$ 或者 $\|Tx\| \leq \|T^*x\|$ 成立, 则称 T 为半正规算子. 如果 $TT^* = T^*T$, 则称 T 为正规算子.

定义 1.6^[14] 称 Hilbert 空间 X 中的稠定闭线性算子 T 为 Fredholm 算子, 如果 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的并且

$$n(T) < \infty, \quad d(T) < \infty,$$

其中 $n(T) = \dim \mathcal{N}(T)$, $d(T) = \dim \mathcal{R}(T)^\perp$. 若 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的并且 $n(T) < \infty$ 或者 $d(T) < \infty$, 则称 T 为半 Fredholm 算子. 此外, 称 $\text{ind}(T) = n(T) - d(T)$ 为算子 T 的指标.

定义 1.7^[14] 设 T 为 Banach 空间 X 到 Y 的闭线性算子, 则称

$$\gamma(T) = \inf\{\|Tx\| : \text{dist}(x, \mathcal{N}(T)) = 1, x \in \mathcal{D}(T)\}$$

为 T 的约化最小模.

当 $T = 0$ 时, 约定 $\gamma(T) = 0$. 对于闭算子 T , $\mathcal{R}(T)$ 闭当且仅当 $\gamma(T) > 0$ (参见文献 [14, 定理 IV.5.2]).

2 主要结论及其证明

为证明本文的主要结论, 先给出关于无界算子矩阵的 Gershgorin 定理.

定理 2.1 设

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

为 $X \oplus Y$ 中的线性算子, 其中 A_{12} 和 A_{21} 是有界算子. 令

$$G_i = \sigma(A_{ii}) \cup \{\lambda \in \rho(A_{ii}) : \|(A_{ii} - \lambda)^{-1}\|^{-1} \leq \|A_{ij}\|\}, \quad i, j = 1, 2,$$

则 $\sigma(\mathcal{A}) \subset G_1 \cup G_2$.

证明 设 $\lambda \notin G_1 \cup G_2$, 这等价于 $\lambda \in \rho(A_{11}) \cap \rho(A_{22})$ 且 $\{\|(A_{ii} - \lambda)^{-1}\|^{-1} > \|A_{ij}\|\}, i, j = 1, 2$. 我们只需证明 $\mathcal{A} - \lambda$ 具有有界逆. 记

$$T = \begin{pmatrix} A_{11} - \lambda & 0 \\ 0 & A_{22} - \lambda \end{pmatrix},$$

则

$$\mathcal{A} - \lambda = T(T^{-1}(\mathcal{A} - \lambda)).$$

显然,

$$T^{-1}(\mathcal{A} - \lambda) = I + M(\lambda),$$

其中

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & (A_{11} - \lambda)^{-1}A_{12} \\ (A_{22} - \lambda)^{-1}A_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

注意到 $\|M(\lambda)\| < 1$, 可知 $T^{-1}(\mathcal{A} - \lambda)$ 具有有界逆, 显然, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$. □

2.1 主对角元是亚正规算子的情形

本节考虑主对角元是亚正规算子时整个算子矩阵的谱分布. 为此, 我们回顾和讨论亚正规算子的谱性质.

引理 2.1 ^[15] 设 T 为 Hilbert 空间 X 中的有界亚正规算子, 则 T 的谱半径等于 $\|T\|$.

命题 2.1 设 T 为 Hilbert 空间 X 中的亚正规算子, 则对任意 $\lambda \in \rho(T)$ 有 $(T - \lambda)^{-1}$ 是有界亚正规算子且

$$\|(T - \lambda)^{-1}\|^{-1} = \text{dist}(\lambda, \sigma(T)).$$

证明 当 T 为亚正规算子时容易验证 $T - \lambda$ 也是亚正规算子. 由文献 [13, 命题 1], 对于 $\lambda \in \rho(T)$ 有 $(T - \lambda)^{-1}$ 是有界亚正规算子. 再由引理 2.1, $\|(T - \lambda)^{-1}\|$ 等于谱半径, 即

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda)^{-1}\| &= \sup\{|z| : z \in \sigma((T - \lambda)^{-1})\} = \frac{1}{\inf\{|z| : z \in \sigma(T - \lambda)\}} \\ &= \frac{1}{\inf\{|z - \lambda| : z \in \sigma(T)\}} = \frac{1}{\text{dist}(\lambda, \sigma(T))}. \end{aligned}$$

证毕. □

注 2.1 上述命题的结论对于半正规算子也仍然成立.

引理 2.2 ^[14] 设 T 为 Hilbert 空间 X 中的闭线性算子. 如果 $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$, 则对于 $\lambda \notin \overline{W(T)}$ 有

$$\|(T - \lambda)^{-1}\|^{-1} \geq \text{dist}(\lambda, W(T)).$$

定理 2.2 设

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

为 $X \oplus Y$ 中的稠定线性算子, 其中 A 和 D 是亚正规算子, B 和 C 是有界算子, 则

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{dist}(\lambda, \sigma(A) \cup \sigma(D)) \leq \max\{\|B\|, \|C\|\}\}.$$

证明 由定理 2.1,

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{A}) \subset & (\sigma(A) \cup \{\lambda \in \rho(A) : \|(A - \lambda)^{-1}\|^{-1} \leq \|B\|\}) \\ & \cup (\sigma(D) \cup \{\lambda \in \rho(D) : \|(D - \lambda)^{-1}\|^{-1} \leq \|C\|\}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

注意到 A 和 D 是亚正规算子有

$$\|(A - \lambda)^{-1}\|^{-1} = \text{dist}(\lambda, \sigma(A)), \quad \|(D - \lambda)^{-1}\|^{-1} = \text{dist}(\lambda, \sigma(D)),$$

从而,

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{dist}(\lambda, \sigma(A) \cup \sigma(D)) \leq \max\{\|B\|, \|C\|\}\}.$$

证毕. □

推论 2.1 在定理 2.2 中, 若 $C = \pm B^*$ 时仍有同样的结论. 特别地, 当 $C = B^*$, A 和 D 是自伴算子时 $\mathcal{A}$ 是 Dirac 算子, 具有重要的物理应用.

推论 2.2 设

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

为 $X \oplus Y$ 中的稠定线性算子, 其中 A 和 D 是亚正规算子, B 和 C 是有界算子. 如果

$$\text{dist}(0, \sigma(A) \cup \sigma(D)) > \max\{\|B\|, \|C\|\},$$

则 $\mathcal{A}$ 具有有界逆.

推论 2.3 设

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}$$

为 $X \oplus X$ 中的 Hamilton 算子, 其中 A 是有界算子. 如果 $\text{dist}(0, \sigma(B) \cup \sigma(-C)) > \|A\|$, 则 $\mathcal{A}$ 具有有界逆.

证明 因为 $\mathcal{A}' = J\mathcal{A}$ 是 Dirac 算子, 其中

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

再由推论 2.2 易得证明. □

2.2 具有一般主对角元的情形

本节研究当主对角元是一般的无界算子时算子矩阵的谱分布.

引理 2.3^[14] 设 T 为半 Fredholm 算子, S 相对于 T 有界, 有

$$\|Su\| \leq a\|u\| + b\|Tu\|,$$

其中 a 和 b 满足 $a < (1-b)\gamma(T)$, 则 $T+S$ 是半 Fredholm 算子且

$$n(T+S) \leq n(T), \quad d(T+S) \leq d(T), \quad \text{ind}(T+S) = \text{ind}(T).$$

定理 2.3 设

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : X \oplus Y \rightarrow X \oplus Y$$

是有界线性算子, 则

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{dist}(\lambda, W(A) \cup W(D)) \leq \max\{\|B\|, \|C\|\}\}.$$

证明 由定理 2.1 和引理 2.2 容易得到证明. □

定理 2.4 设

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(D) \rightarrow X \oplus Y$$

为线性算子, 其中 A 和 D 是闭算子, B 和 C 是有界算子. 如果 A^* 和 D^* 为亚正规算子, 则

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{dist}(\lambda, W(A) \cup W(D)) \leq \max\{\|B\|, \|C\|\}\}.$$

证明 对于无界算子 A 和 D , 有 $\sigma_{ap}(A) \subset \overline{W(A)}$ 和 $\sigma_{ap}(D) \subset \overline{W(D)}$. 若 $\lambda \in \sigma_{r,1}(A)$ 有 $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$, 即存在 $x \in \mathcal{D}(A^*)$, $x \neq 0$ 使得 $(A^* - \bar{\lambda})x = 0$. 由于 A^* 为亚正规算子, 所以,

$$\|(A^* - \bar{\lambda})x\| \geq \|(A - \lambda)x\|,$$

即

$$\|(A - \lambda)x\| = 0,$$

这与 $\lambda \in \sigma_{r,1}(A)$ 矛盾, 于是 $\sigma_{r,1}(A) = \emptyset$. 同理可得 $\sigma_{r,1}(D) = \emptyset$. 又因为 A 和 D 是闭算子, 所以, $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$ 且 $\sigma(D) \subset \overline{W(D)}$, 再由引理 2.2 得

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{dist}(\lambda, W(A) \cup W(D)) \leq \max\{\|B\|, \|C\|\}\}.$$

证毕. □

定理 2.5 设

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(D) \rightarrow X \oplus Y$$

为线性算子, 其中 A 和 D 为闭算子, B 和 C 是有界算子. 如果 $\mathbb{C} \setminus \overline{W(A)}$ 的每个连通分支都包含至少一个 $\rho(A)$ 中的点, $\mathbb{C} \setminus \overline{W(D)}$ 的每个连通分支都包含至少一个 $\rho(D)$ 中的点, 则

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{dist}(\lambda, W(A) \cup W(D)) \leq \max\{\|B\|, \|C\|\}\}.$$

证明 设 $\Delta = \mathbb{C} \setminus \overline{W(A)}$, 因为 $\overline{W(A)}$ 是闭的凸集合, 则 Δ 是一个连通集合或者由两个半平面 Δ_1 和 Δ_2 组成. 若存在 $\lambda \in \rho(A) \cap \Delta$ (Δ_1 或 Δ_2), 则 $A - \lambda$ 是 Fredholm 算子且 $n(A - \lambda) = 0$, $d(A - \lambda) = 0$, $\text{ind}(A - \lambda) = 0$. 此外, $A - \lambda$ 的约化最小模满足 $\gamma(A - \lambda) \geq \delta$, 其中 $\delta = \text{dist}(\lambda, \overline{W(A)}) > 0$. 考虑 $\lambda + \delta/2$, 注意到 $\lambda + \delta/2 \in \Delta$ (Δ_1 或 Δ_2), 所以有 $n(A - \lambda - \delta/2) = 0$ 以及 $\mathcal{R}(A - \lambda - \delta/2)$ 是闭的. 由引理 2.3, $A - \lambda - \delta/2$ 是半 Fredholm 算子且 $\text{ind}(A - \lambda) = \text{ind}(A - \lambda - \delta/2)$, 从而,

$$d\left(A - \lambda - \frac{\delta}{2}\right) = -\text{ind}\left(A - \lambda - \frac{\delta}{2}\right) = 0,$$

进而有 $\lambda + \delta/2 \in \rho(A)$. 由 Δ (Δ_1 或 Δ_2) 的连通性有 $\Delta \subset \rho(A)$, 即 $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$. 同理可证, 当 $\mathbb{C} \setminus \overline{W(D)}$ 的每个连通分支都包含至少一个 $\rho(D)$ 中的点时有 $\sigma(D) \subset \overline{W(D)}$. 应用引理 2.2 可得

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{dist}(\lambda, W(A) \cup W(D)) \leq \max\{\|B\|, \|C\|\}\}.$$

证毕. □

推论 2.4 在定理 2.4 和 2.5 中, 如果 $\text{dist}(0, W(A) \cup W(D)) > \max\{\|B\|, \|C\|\}$, 则算子 $\mathcal{A}$ 具有有界逆.

2.3 $C = \pm B^*$ 情形

当 $C = \pm B^*$ 时, 以下结合算子 $\mathcal{A}$ 的二次数值域和 Gershgorin 定理刻画 $\mathcal{A}$ 的谱分布.

引理 2.4 ^[16] 设 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ 满足 $\text{Re } d < 0 < \text{Re } a$ 且 $bc \geq 0$, 则矩阵

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

的特征值 λ_1 和 λ_2 具有下述性质:

- (1) $\text{Re } \lambda_2 \leq \text{Re } d < 0 < \text{Re } a \leq \text{Re } \lambda_1$;
- (2) $\min\{\text{Im } a, \text{Im } d\} \leq \text{Im } \lambda_1, \text{Im } \lambda_2 \leq \max\{\text{Im } a, \text{Im } d\}$;
- (3) $\lambda_1, \lambda_2 \in \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \max\{|\arg a|, \pi - |\arg d|\}\}$.

引理 2.5 设 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ 满足 $\text{Re } d < \text{Re } a$ 且 $bc \leq 0$, λ_1 和 λ_2 为矩阵

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

的特征值, 则 $\text{Re } d \leq \text{Re } \lambda_2 \leq \text{Re } \lambda_1 \leq \text{Re } a$.

证明 若 $\text{Re } \lambda < \text{Re } d$ 或 $\text{Re } \lambda > \text{Re } a$, 则 $(a - \lambda)(d - \lambda) = bc > 0$, 这与假设相矛盾. 事实上, 将 a, d, λ 的实部和虚部分别代入上式左端整理得

$$(\text{Re } a - \text{Re } \lambda)(\text{Im } d - \text{Im } \lambda) = -(\text{Re } d - \text{Re } \lambda)(\text{Im } a - \text{Im } \lambda),$$

从而, $\text{Im } a - \text{Im } \lambda$ 与 $\text{Im } d - \text{Im } \lambda$ 的符号相反. 而

$$\text{Re } (a - \lambda)(d - \lambda) = -(\text{Im } a - \text{Im } \lambda)(\text{Im } d - \text{Im } \lambda) + (\text{Re } a - \text{Re } \lambda)(\text{Re } d - \text{Re } \lambda),$$

显然, $bc > 0$. □

定理 2.6 设

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(D) \rightarrow X \oplus Y$$

为线性算子, 其中 A 和 D 为闭算子, B 为有界算子. 对给定的 $\omega \in [0, \pi)$, 定义复平面上的扇形区域

$$\Sigma_\omega := \{re^{i\phi} : r \geq 0, |\phi| \leq \omega\}.$$

如果存在 $\alpha, \beta > 0$ 和 $\varphi, \vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 使得

$$W(D) \subset \{\lambda \in -\Sigma_\varphi : \operatorname{Re} \lambda \leq -\beta\}, \quad W(A) \subset \{\lambda \in \Sigma_\vartheta : \operatorname{Re} \lambda \geq \alpha\}.$$

若 $\rho(A) \cap \rho(D) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : -\beta < \operatorname{Re} \lambda < \alpha\} \neq \emptyset$, 则对于 $\theta := \max\{\varphi, \vartheta\}$ 有

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{A}) &\subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(\lambda, W(A) \cup W(D)) \leq \|B\|\} \\ &\cap (\{\lambda \in -\Sigma_\theta : \operatorname{Re} \lambda \leq -\beta\} \cup \{\lambda \in \Sigma_\theta : \operatorname{Re} \lambda \geq \alpha\}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

证明 因为对任意 $f \in \mathcal{D}(A), g \in \mathcal{D}(D)$ 且 $\|f\| = \|g\| = 1$ 有

$$\mathcal{A}_{f,g} = \begin{pmatrix} (Af, f) & (Bg, f) \\ (B^*f, g) & (Dg, g) \end{pmatrix}$$

满足引理 2.4 的条件, 从而容易得到 $W^2(\mathcal{A}) \subset \Xi$, 其中

$$\Xi = \{\lambda \in -\Sigma_\theta : \operatorname{Re} \lambda \leq -\beta\} \cup \{\lambda \in \Sigma_\theta : \operatorname{Re} \lambda \geq \alpha\}.$$

由文献 [17, 定理 4.2] 可知, $\mathcal{A}$ 的近似点谱 $\sigma_{ap}(\mathcal{A}) \subset \overline{W^2(\mathcal{A})}$. 因此, 由文献 [5, 定理 2.5.15] 可知, 要证 $\sigma(\mathcal{A}) \subset \overline{W^2(\mathcal{A})}$, 只需证明 $\mathbb{C} \setminus \Xi$ 包含 $\rho(\mathcal{A})$ 中的点即可. 事实上, $i\mathbb{R} \cap \rho(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, 其中 $i\mathbb{R} = \{i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$. 为叙述方便, 记

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}.$$

由题设, 存在 $\mu \in \rho(A) \cap \rho(D) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : -\beta < \operatorname{Re} \lambda < \alpha\}$, 从而, $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$, $\sigma(D) \subset \overline{W(D)}$ 且

$$\begin{aligned} \|(T - i\mu)^{-1}\| &\leq \max \left\{ \frac{1}{\operatorname{dist}(i\mu, W(A))}, \frac{1}{\operatorname{dist}(i\mu, W(D))} \right\} \\ &\leq \frac{(\cos \theta)^{-1}}{|\mu|}, \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

由文献 [5, 推论 2.1.5], 对 $R > 0$ 有 $\{i\mu : |\mu| \geq R\} \subset \rho(T + S) = \rho(\mathcal{A})$, 进一步有

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in -\Sigma_\theta : \operatorname{Re} \lambda \leq -\beta\} \cup \{\lambda \in \Sigma_\theta : \operatorname{Re} \lambda \geq \alpha\}.$$

再由 $\mu \in \rho(A) \cap \rho(D) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : -\beta < \operatorname{Re} \lambda < \alpha\}$, 利用定理 2.5, 我们有

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(\lambda, W(A) \cup W(D)) \leq \|B\|\}.$$

证毕. □

下面关于 Dirac 算子的结论是定理 2.6 的直接结果.

推论 2.5 设定理 2.6 中的算子矩阵 $\mathcal{A}$ 为 Dirac 算子. 若存在 $\alpha, \beta > 0$ 满足 $\sup W(D) = -\beta$, $\inf W(A) = \alpha$, 则

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in (-\infty, -\beta] \cup [\alpha, +\infty) : \text{dist}(\lambda, \sigma(A) \cup \sigma(D)) \leq \|B\|\}. \quad (2.4)$$

定理 2.7 设

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & D \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(D) \rightarrow X \oplus Y$$

为线性算子, 其中 A 和 D 为闭算子, B 为有界算子. 如果 $\sigma_{r,1}(\mathcal{A}) = \emptyset$ 且存在

$$a = \inf \operatorname{Re} W(A), \quad b = \inf \operatorname{Re} W(D)$$

使得 $\rho(A) \cap \rho(D) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < \min\{a, b\}\} \neq \emptyset$, 则

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{dist}(\lambda, W(A) \cup W(D)) \leq \|B\|\} \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq \min\{a, b\}\}. \quad (2.5)$$

证明 由引理 2.5 可知, $\operatorname{Re} W^2(\mathcal{A}) \subset [\min\{a, b\}, \infty)$. 对算子 $\mathcal{A}$ 应用文献 [17, 定理 4.2], 有 $\sigma_{ap}(\mathcal{A}) \subset \overline{W^2(\mathcal{A})}$. 注意到 $\sigma_{r,1}(\mathcal{A}) = \emptyset$, 便有 $\sigma(\mathcal{A}) \subset \overline{W^2(\mathcal{A})}$, 即 $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq \min\{a, b\}\}$. 由假设 $\rho(A) \cap \rho(D) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < \min\{a, b\}\} \neq \emptyset$ 和定理 2.5 易知,

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{dist}(\lambda, W(A) \cup W(D)) \leq \|B\|\}.$$

结论得证. □

注 2.2 如果 $\sup \operatorname{Re} W(A)$ 和 $\sup \operatorname{Re} W(D)$ 存在, 我们可以类似地得到谱包含关系.

推论 2.6 设

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & D \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(D) \rightarrow X \oplus Y$$

为线性算子, 其中 A 和 D 为自伴算子, B 为有界算子. 如果 $a := \inf W(A)$ 和 $b := \inf W(D)$ 存在, 则

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{dist}(\lambda, \sigma(A) \cup \sigma(D)) \leq \|B\|\} \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq \min\{a, b\}\}. \quad (2.6)$$

证明 由引理 2.5, 我们得到 $\operatorname{Re} W^2(\mathcal{A}) \subset [\min\{a, b\}, \infty)$. 对于算子 $\mathcal{A}$, 由文献 [5, 定理 2.5.15], 要证明 $\sigma(\mathcal{A}) \subset \overline{W^2(\mathcal{A})}$, 只需证明 $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < \min\{a, b\}\} \cap \rho(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ 即可. 为了证明需要记

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B^* & 0 \end{pmatrix}.$$

事实上, 对于取定的 $\lambda_0 \in (-\infty, \min\{a, b\})$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 有 $\lambda_0 + i\mu \in \rho(A) \cap \rho(D)$, 根据文献 [14, 定理 V.3.2], 可有下面的估计:

$$\begin{aligned} \|(T - (\lambda_0 + i\mu))^{-1}\| &\leq \max \left\{ \frac{1}{\text{dist}(\lambda_0 + i\mu, W(A))}, \frac{1}{\text{dist}(\lambda_0 + i\mu, W(D))} \right\} \\ &\leq \frac{1}{|\mu|}, \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

注意到 S 相对于 $T - \lambda_0$ 有界且阶为 0, 由文献 [5, 推论 2.1.5], 存在 $R > 0$ 使得

$$\{\lambda_0 + i\mu : |\mu| \geq R\} \subset \rho(T + S) = \rho(\mathcal{A}),$$

从而, $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq \min\{a, b\}\}$, 再由定理 2.2 得到结论. $\square$

推论 2.7 设

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & D \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(D) \rightarrow X \oplus Y$$

为线性算子, 其中 A 和 D 为非负自伴算子, B 为有界算子, 则

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}^+ : \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A) \cup \sigma(D)) \leq \|B\|\}, \quad (2.8)$$

其中 $\mathbb{C}^+$ 表示右半闭平面.

最后, 我们以下面的例子说明本文结果的有效性.

例 2.1 设 $X = L^2[0, 1]$. 定义

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

其中 $Au = -u''$, $B = I$,

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in X : u, u' \text{ 绝对连续}, u'' \in X, u(0) = u(1) = 0\}.$$

- (1) 当 $C = I$, $D = \pm A$ 时, 容易验证 $\mathcal{A}$ 为自伴算子, 显然, $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}$;
- (2) 当 $C = -I$, $D = -A$ 时, 由定理 2.2 可知, $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| \leq 1\}$;
- (3) 当 $C = -I$, $D = A$ 时, 由推论 2.7 可知, $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}^+ : |\operatorname{Im} \lambda| \leq 1\}$.

例 2.2 设 $X = L^2[a, b]$. 定义

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

其中 $B = I$, $C = iI$, $Du = u''$, $Au = p_0(x)u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u$, 这里 $p_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ 为实的, p_0' , p_1' 和 p_2 在 $[a, b]$ 上连续且 $p_0(x) < 0$,

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(D) = \{u \in X : u, u' \text{ 绝对连续}, u'' \in X, u(a) = u(b) = 0\}.$$

对 $u \in \mathcal{D}(A)$, 有

$$\begin{aligned} (Au, u) &= \int_a^b (P_0 u'' + P_1 u' + P_2 u) \bar{u} dx \\ &= - \int_a^b P_0 |u'|^2 dx + \int_a^b [(P_1 - P_0') u' + P_2 u] \bar{u} dx. \end{aligned} \quad (2.9)$$

由于存在正数 m_0 , M_1 和 M_2 满足 $-p_0(x) \geq m_0 > 0$, $|p_1(x) - p_0'(x)| \leq M_1$ 和 $|p_2(x)| \leq M_2$, 由文献 [14, 例 V.3.34], 对给定的 $k > 0$, 取 $\varepsilon > 0$ 满足 $m_0 - \varepsilon(1+k)M_1 \geq 0$, 并取负数

$$\eta = - \left(\frac{(1+k)M_1}{4\varepsilon} + M_2 \right),$$

可有

$$\operatorname{Re}(Au, u) - k|\operatorname{Im}(Au, u)| \geq \eta(u, u),$$

即

$$|\operatorname{Im}(Au, u)| \leq \frac{1}{k} \operatorname{Re}((A - \eta)u, u).$$

取 $\theta = \arctan(\frac{1}{k})$, 便有

$$W(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq \eta, |\arg(\lambda - \eta)| \leq \theta\}.$$

对充分大的实数 λ , 我们断言 $n((A + \lambda)^*) = 0$, 进而 $d(A + \lambda) = 0$. 事实上, 可类似证明 $W(A^*)$ 包含于某个扇形区域内, 从而, 对于充分大的实数 λ 有 $-\lambda \notin \sigma_p(A^*)$. 注意到 $\mathbb{C} \setminus \overline{W(A)}$ 的连通性, 可知 $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < \eta\} \subset \rho(A)$. 而对于算子 D , 有 $W(D) \subset \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \leq 0\}$ 且 $\rho(D) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{W(D)}) \neq \emptyset$. 于是, 由定理 2.5 可得

$$\sigma(A) \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq \eta - \frac{1}{\sin \theta}, |\arg(\lambda - \eta)| \leq \theta \right\} \cup \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \leq 1\}.$$

参考文献

- 1 黄俊杰, 阿拉坦仓, 范小英. 无穷维 Hamilton 算子的谱结构. 中国科学 A 辑, 2008, 38: 71–78
- 2 吴德玉, 阿拉坦仓. 无穷维 Hamilton 算子的可逆性及其应用. 中国科学: 数学, 2010, 40: 921–928
- 3 Atkinson F V, Langer H, Mennicken R, et al. The essential spectrum of some matrix operators. Math Nachr, 1994, 167: 5–20
- 4 Langer H, Ran A C M, van de Rotten B A. Invariant subspaces of infinite dimensional Hamiltonians and solutions of the corresponding Riccati equations. Oper Theory Adv Appl, 2002, 130: 235–254
- 5 Tretter C. Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. London: Imperial College Press, 2008
- 6 Brauer A. Limits for the characteristic roots of a matrix, I–VII. Duke Math J, 1946, 1947, 1948, 1952, 1955, 1958, 13, 14, 15, 19, 22, 25: 387–395, 21–26, 871–877, 75–91, 553–562, 253–261, 583–590
- 7 Varga R S. Gershgorin and His Circles. Springer Series in Comp Math, vol. 36. Berlin: Springer, 2004
- 8 Feingold D G, Varga R S. Block diagonally dominant matrices and generalizations of the Gershgorin circle theorem. Pacific J Math, 1962, 12: 1241–1250
- 9 Salas H N. Gershgorin's theorem for matrices of operators. Linear Algebra Appl, 1999, 291: 15–36
- 10 Conway J B. A Course in Functional Analysis. New York: Springer, 1985
- 11 Gohberg I, Goldberg S, Kaashoek M A. Classes of Linear Operators, I. New York: Springer, 1990
- 12 Langer H, Markus A S, Matsaev V I, et al. A new concept for block operator matrices: The quadratic numerical range. Linear Algebra Appl, 2001, 330: 89–112
- 13 Janas J. On unbounded hyponormal operators. Arkiv för Matematik, 1989, 27: 273–281
- 14 Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. Classics in Mathematics. Berlin: Springer, 1995
- 15 Stampfli J G. Hyponormal operators. Pacific J Math, 1962, 4: 1453–1458
- 16 Langer H, Tretter C. Spectral decomposition of some nonselfadjoint block operator matrices. J Operator Theory, 1998, 39: 339–359
- 17 Tretter C. Spectral inclusion for unbounded block operator matrices. J Funct Anal, 2009, 256: 3806–3829

Spectral inclusion properties of some unbounded block operator matrices

Qi YaRu, HUANG JunJie & Alatancang

Abstract In this paper, we give the Gershgorin's theorem of the 2×2 unbounded block operator matrix with bounded off-diagonal entries, and use the spectrum and the numerical range of diagonal entries to investigate

the spectral inclusion properties of some unbounded block operator matrices. In particular, for unbounded block operator matrices with symmetric (anti-symmetric) corners, we give more exact localization of spectrum by the quadratic numerical range and the Gershgorin's theorem.

Keywords unbounded block operator matrix, spectrum, numerical range, quadratic numerical range

MSC(2010) 47A10, 47A12

doi: 10.1360/N012013-00104