论 文

基于 Weyl 交互律的分布式差分空时码

王海泉*, 洪磊, 赵知劲, 赵宝峰

杭州电子科技大学通信工程学院, 杭州 310018

* 通信作者. E-mail: wanghq33@gmail.com

收稿日期: 2012-04-20; 接受日期: 2012-07-29

国家自然科学基金 (批准号: 60972049)、浙江省自然科学基金 (批准号: Y1090846) 及“钱江人才”计划项目和国家教育部留学归国人员科研启动基金资助项目

摘要 针对发送方、接收方及中继都不知道信道信息的无线中继网络系统, 已经证明, 分布式差分空时码 (distributed differential space time codes, DDSTC) 是一种有效的编码与解码方式. 本文针对 DDSTC, 首先基于接收到信号的密度函数的推导得到极大似然解码的具体公式, 以弥补现有文献中的不足. 其次, 为了满足设计准则中提出的矩阵相互可交换的要求, 我们通过利用 Weyl 交互律, 得到一种新的 DDSTC 设计方法, 并且将通过举例来说明我们所使用的方法比现有的方法更灵活, 尤其是在高维酉矩阵以及中继数量比较多的情况下, 更容易得到码本.

关键词 分布式差分空时码 ML-解码 Weyl 交互律 中继 无线网络 空时块状码 衰落信道

1 引言

近年来, 无线网络已经越来越受到人们的关注. 根据网络的结构可以把无线网络大致分为两类: 第一类, 存在基站或者主节点的网络, 例如蜂窝移动通信系统和卫星通信系统. 所有节点直接与基站或者主节点通信, 基站或者主节点控制所有传送过程和传送数据. 第二类, 不存在基站或者主节点的网络, 如 ad-hoc 网络和无线感知网络. 在这类网络中, 无线移动节点自组织形成网络, 节点可以通过其他节点协作完成通信. 通常把承担协作通信的节点称为中继, 并把这种网络称为无线中继网络. 本文是有关无线中继网络的.

考虑一个无线中继网络, 假设该网络包含 $M+2$ 个节点: 一个发送端, 一个接收端以及 M 个中继, 并且每个节点只配置单根天线. 由于发送端和接收端之间的距离较远, 无法直接通信, M 个中继就是要协助发送端和接收端之间的通信. 根据中继对信号进行的不同操作, 可分为两种协作方案: 放大—前传 (amplify-and-forward, AF) 方案, 即中继只对接收到的信号作简单处理就传输, 以及解码—前传 (decode-and-forward, DF) 方案, 即中继在解出接收到的信号后再进行传输. 显然, AF 方案比 DF 方案简单, 更适用于处理和传输能力有限的中继. 本文考虑 AF 方案.

对于 AF 方案, 根据发送端、接收端或中继对信道状态信息 (channel state information, CSI) 的掌握情况, 各种不同的编码—解码方案已被提出. 在文献 [1] 中, 作者假设在发送端与中继都不知道 CSI, 而接收端已知所有 CSI 的情况下, 借助于多天理论中的空时码 (space time codes, STC) 的概念及其方法, 提出了分布式空时码 (distributed space time codes, DSTC), 并证明了如果系统采用 DSTC, 则

引用格式: 王海泉, 洪磊, 赵知劲, 等. 基于 Weyl 交互律的分布式差分空时码. 中国科学: 信息科学, 2012, 42: 1293–1302, doi: 10.1360/112012-296

可达到满分集度. 但是实际中, 要使接收端知道所有的信道信息, 并不是一件容易的事. 因此, 文献 [2] 作者假设接收端只有中继到接收端的 CSI. 在此假设下提出了部分相干差分空时码 (partially-coherent distributed space-time codes with differential encoder and decoder), 并且推导了基于极大似然解码的成对错误概率的 chernoff 上界. 根据其上界, 提出了上述差分空时码的设计准则. 在此基础上, 利用循环可除代数给出了码的设计方法.

对于接收端不知道任何信道信息的情况, 文献 [3] 提出了一个差分编码及解码的方法. 在此方法中, 数据信息承载在 L 个酉矩阵 $\{U_1, U_2, \dots, U_L\}$ 上, 并且每个中继都有一个事先设计好的酉矩阵, 记为 $P_i, i = 1, 2, \dots, M$. 在 $t = 0$ 时刻, 发送端发送一个复向量 S_0 , 而在 t 时刻发送码本为 $U_{j_t} S_0$. 当第 i 个中继接收到信号后, 所转发的信号是接收到的信号与 P_i 的乘积. 最后, 当接收端接收到所有中继转发的信号后, 使用差分解码法进行解码. 为了能够成功地解码, 上述酉矩阵 U_j 和 P_i 必须相互可交换, 即 $U_j P_i = P_i U_j, j = 1, 2, \dots, L, i = 1, 2, \dots, M$. 另外, 为了获得更好的性能, 文献 [3,4] 提出了酉矩阵 U_j 和 P_i 的设计准则. 这里 $\{U_j, j = 1, \dots, L\}$ 和 $\{P_i, i = 1, 2, \dots, M\}$ 被称为分布式差分空时码 (DDSTC).

假设 $\{U_j, j = 1, \dots, L\}$ 和 $\{P_i, i = 1, 2, \dots, M\}$ 都是差分空时码, 那么我们可以利用差分空时码来设计分布式差分空时码. 根据这个思路, 文献 [3] 的作者们利用基于正交设计、矩阵以及循环矩阵的差分空时码来设计 DDSTCs. 而在文献 [4] 中, 作者改进了拟正交空时码使之得到的分布式差分空时码有更低的解码复杂度. 在文献 [5] 中, 作者则利用 Cayley 变换设计得到 DDSTC.

但是, 在利用差分空时码来设计 DDSTC 时, 我们将面对的一个难题, 就是所使用的两个差分空时码必须要满足相互交换. 为了克服这一难点, Kiran 等在文献 [2] 中尝试利用可交换代数理论来解决这个问题. 但是, 要想得到一个多维的不可交换的可除代数并不容易.

在文献 [6] 中, 作者提出了一种新的方法, 即利用 Weyl 交互律 (Weyl reciprocity) 来解决上述的问题. 由 Weyl 交互律可知, 对于 n 维的一般线性群 GL_n 及对称群 $\mathfrak{S}_m, GL_n$ 任意一个表示 (representation) 的 m 重张量积和 $\mathfrak{S}_m$ 在向量空间的 m 重张量积是满足相互交换的. 因而, 利用此性质, 我们可以构造 DDSTC. 通过与文献 [3] 中的方法比较发现, 这种方法更加灵活, 更容易得到高分集乘积的 DDSTC, 尤其是在酉矩阵维数较大以及中继数量较多的情况. 本文是文献 [6] 的补充与扩展, 主要的贡献在于以下两个方面. 第一, 我们仔细推导了 DDSTC 极大似然解码方法的公式. 值得注意的是, 在以前的文献中, 据我们所知, 严格的推导还不存在. 第二, 我们把文献 [6] 中的方法应用于新的表示群, 并得到了新的 DDSTC.

2 系统模型与分布式差分空时码

假设系统有一个发送端与一个接收端, 信号从发送端到接收端需要通过 M 个中继的转发而实现. 同时假设所有的无线信道为频率非选择性的 Rayleigh 平坦衰落信道, 即信道在数个时段内是不变的 (定义每 T 个时段为一个时段), 但信道的变化是独立的, 并服从相同的复高斯分布 $\mathcal{CN}(0, 1)$. 设定系统的发送端、接收端与中继都没有信道的瞬时信息, 因而采用 DDSTC 传送-接收方案. 以下是其方案的简介, 详细的步骤可参见文献 [3].

在 DDSTC 的方案中, 假设所有的数据信息都装载在 L 个 $T \times T$ 的酉矩阵 $\{U_1, U_2, \dots, U_L\}$ 上. 对于每一个中继, 都配有一个酉矩阵, 记为 $P_i, i = 1, 2, \dots, M$. DDSTC 的操作方案如下: 在第一个时段, 发送端发送的信号为 $s_{0,1}, s_{0,2}, \dots, s_{0,T}$ 给所有中继. 记 $S_0 = (s_{0,1}, s_{0,2}, \dots, s_{0,T})^T$, 这里, T 表示转

置, 下同. 注意, S_0 不带任何数据信息. 此时中继 i 接收到的信号 $R_{0,i}$ 可以表达成如下:

$$R_{0,i} = \sqrt{\rho_1 T} f_i S_0 + V_{0,i}, \quad (1)$$

其中, f_i 表示发送端到第 i 个中继的瞬时信道, ρ_1 是中继接收到的信噪比, 而 $V_{0,i}$ 是均值为 0, 方差为单位阵的复高斯白噪声向量.

在第二个时段, 第 i 个中继将接收到的信号乘上矩阵 P_i 后转发到接收端. 记转发的信号向量为 $X_{0,i}$, 则有

$$X_{0,i} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1 + 1}} P_i R_{0,i} = \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2 T}{\rho_1 + 1}} f_i P_i S_0 + \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1 + 1}} P_i V_{0,i}, \quad (2)$$

其中 ρ_2 是接收端接收到的信噪比.

最后, 在接收端接收到的信号 Y_0 可以表示为

$$Y_0 = \sum_{i=1}^M g_i X_{0,i} + W_0 = \sum_{i=1}^M \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1 + 1}} g_i P_i R_{0,i} + W_0, \quad (3)$$

这里, g_i 表示第 i 个中继到接收端的瞬时信道, W_0 也为均值为 0, 方差为单位阵的复高斯白噪声向量.

在第三个时段, 发送端发送的信号为向量 $U_{j_1} S_0$, 这里矩阵 U_{j_1} 带有数据信息. 则同上, 第 i 个中继节点接收到的信号为

$$R_{1,i} = \sqrt{\rho_1 T} f_i U_{j_1} S_0 + V_{1,i}. \quad (4)$$

而转发的信号向量为 $X_{1,i} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1 + 1}} P_i R_{1,i}$. 最终接收端接收到的信号 Y_1 为

$$Y_1 = \sum_{i=1}^M g_i X_{1,i} + W_1 = \sum_{i=1}^M \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2 T}{\rho_1 + 1}} f_i g_i P_i U_{j_1} S_0 + \sum_{i=1}^M \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1 + 1}} g_i P_i V_{1,i} + W_1, \quad (5)$$

这里, W_1 同样为均值为 0, 方差为单位阵的复高斯白噪声向量.

假设矩阵 P_i 与 U_j 互相可交换, 则由式 (3) 可知, Y_1 可以写成

$$Y_1 = U_{j_1} Y_0 + \hat{W}_1, \quad (6)$$

其中 $\hat{W}_1 = \sum_{i=1}^M \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1 + 1}} g_i P_i (V_{1,i} - U_{j_1} V_{0,i}) + W_1 - U_{j_1} W_0$.

重复上面的步骤, 接收端在 $2t$ 阶段接收到的信号可表示如下:

$$Y_t = U_{j_t} Y_{t-1} + \hat{W}_t, \quad (7)$$

其中,

$$\hat{W}_t = \sum_{i=1}^M \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1 + 1}} g_i P_i (V_{t,i} - U_{j_t} V_{t-1,i}) + W_t - U_{j_t} W_{t-1}. \quad (8)$$

注意到在上述方程中, Y_t 与 Y_{t-1} 是接收到的信号, 对接收端来说是已知的. 因此, 假如把 $\hat{W}_t$ 看成噪声, 则可解出所要的信号 U_{j_t} . 而事实上, 我们有以下结论.

定理 1 假设发送端与接收端都不知道任何的信道信息, 则以上的发送 — 接收方式的极大似然解码为

$$\arg \min_{j=1,2,\dots,L} \|Y_t - U_j Y_{t-1}\|.$$

定理 1 的详细证明见附录 A.

很明显, 在上述的解码中不需要知道任何的信道信息. 这自然是个优点, 但比起解码方已知信道信息的情况, 性能会有损失.

根据上述, 我们需要设计酉矩阵 $U_j, j = 1, 2, \dots, L$ 和 $P_i, i = 1, 2, \dots, M$, 使它们满足以下可交换条件:

$$(C1) \quad U_j P_i = P_i U_j, j = 1, 2, \dots, L; i = 1, 2, \dots, M.$$

另外, 为了使系统能获得更好的性能, 按照文献 [3,4], 酉矩阵 $U_j, j = 1, 2, \dots, L$ 还应该满足如下条件:

$$(C2) \quad \min_{1 \leq i \neq j \leq L} |\det(U_i - U_j)| \text{ 越大越好}.$$

对于上面的两个条件, 我们对 (C2) 比较熟悉, 因为它也是设计差分空时码的一个准则. 而对于条件 (C1), 它要求两组酉矩阵能相互交换, 这在数学上来说是一个很苛刻的条件, 因为由文献 [7] 可知, 能与所有的酉矩阵相互交换的只能是单位阵或者是它与一个数的乘积. 根据这个结论可知, 如果矩阵 $\{U_1, U_2, \dots, U_L\}$ 所生成的线性空间是整个矩阵空间, 那么矩阵 $\{P_1, P_2, \dots, P_L\}$ 只能是单位阵与数的乘积. 由此可知, 要构造出有较好性能的码是很难的. 尽管如此, 我们可以利用表示论中的 Weyl 交互律来解决这个问题. 在此之前, 我们先定义

$$\zeta \triangleq \min_{1 \leq i \neq j \leq L} |\det(U_i - U_j)|^{1/T},$$

并称此为码本 $\{U_1, U_2, \dots, U_L\}$ 分集乘积.

3 Weyl 交互律简介

Weyl 交互律是李群表示论的重要内容之一. 在这一节中, 我们只选取此理论和本文相关的一部分. 假设 V 是一个 n 维的复欧氏空间, $V^{\otimes m}$ 是它的 m 重张量积, 即

$$V^{\otimes m} = V \otimes V \otimes \dots \otimes V. \quad (9)$$

假设 GL_n 是 V 上的一般线性群, 可以理解为所有行列式不为零的 $n \times n$ 矩阵所组成的集合. 对于任意的 $g \in GL_n$, 定义 $\rho_n(g)$ 在 V 上的线性映射如下:

$$\rho_n(g)(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_m) = g(v_1) \otimes g(v_2) \otimes \dots \otimes g(v_m). \quad (10)$$

根据以上定义, ρ_n 是群 GL_n 的一个表示. 通常, 这个表示是可约的. Weyl 交互律就是利用阶数为 m 的对称群, 记为 $\mathfrak{S}_m$, 在 $V^{\otimes m}$ 的作用 ϕ 给出了此表示的不可约分解. 作用 ϕ 可定义如下:

$$\phi(\xi)(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_m) = v_{\xi(1)} \otimes v_{\xi(2)} \otimes \dots \otimes v_{\xi(m)}, \quad (11)$$

其中 $\xi \in \mathfrak{S}_m$.

对于上述作用, 有以下结论.

定理 2 对于任意的 $g \in GL_n$ 和 $\xi \in \mathfrak{S}_m$, 关系式 $\rho(g)\phi(\xi) = \phi(\xi)\rho(g)$ 成立.

由此定理可知, 对于任意的 $g \in GL_n$ 和 $\xi \in \mathfrak{S}_m$, ρ_n 和 ϕ 在 n^m 维复空间 $V^{\otimes m}$ 上的作用是可以相互交换的. 如果将此作用表示成矩阵的形式, 定理 2 就相当于第 2 节中的条件 (C1). 因此, 我们可以利用此性质来设计分布式差分空时码.

需要注意的是, 上述的矩阵的维数只能是 n^m 的形式. 为了改进这个缺陷, 我们可以利用 Weyl 交互律来对空间进行分解. 在进行分解之前, 以便于节省空间我们将引用文献 [7] 第 6 节中的符号. 假设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k), k \leq n$ 是一个大小为 m 的 Young 表, m_λ 是与 λ 相对应的不可约表示的维数. 另外定义 $S_\lambda V$ 是 GL_n 的不可约表示. 根据文献 [7] 中的定理 6.3 以及公式 4.11, 我们可以得到:

- 定理 3**
1. $m_\lambda = \frac{m!}{l_1! l_2! \cdots l_k!} \prod_{i < j} (l_i - l_j)$, 其中 $l_i = \lambda_i + k - i$;
 2. $\dim S_\lambda V = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}$;
 3. $V^{\otimes m} \cong \bigoplus_\lambda (S_\lambda V)^{m_\lambda}$.

根据以上结论可知, 子空间 $(S_\lambda V)^{m_\lambda}$ 是表示 ρ_n 和 ϕ 的不可变空间. 并且, 这些表示是可以相互交换的. 因此, 如果我们将 ρ_n 和 ϕ 限制在这个子空间里, 那么就可以得到这两个矩阵组相互交换的性质. 此外, 这些矩阵的维数都是 $m_\lambda \dim(S_\lambda V)$. 例如, 当 $n = 3, m = 5$, 那么 Young 表分别为 (5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1) 和 (2, 2, 1), 对应的矩阵维数分别为 21, 96, 75, 36 和 15.

在下一节中, 我们将利用上面的结论来设计分布式差分空时码.

4 基于 Weyl 交互律的分布式差分空时码

为了设计出好的分布式差分空时码, 我们需要找到两组满足条件 (C1) 和 (C2) 的西矩阵. 正如在上面的章节中所提到的, 重要的是应考虑如何选取西矩阵使其能满足条件 (C1). 现在, 我们可以利用第 3 节中的定理 2 和定理 3 来解决这个难题.

由定理 2 可知, 对于任意的 $g \in GL_n$ 及 $\xi \in \mathfrak{S}_m$, $\rho_n(g)$ 和 $\phi(\xi)$ 可以相互交换. 因而, 为了满足条件 (C1), 应选择合适的 g 和 ξ , 使得 $\rho_n(g)$ 和 $\phi(\xi)$ 都是西矩阵. 由于 ξ 是一个置换, 所以对于任意的 $\xi \in \mathfrak{S}_m$, $\phi(\xi)$ 为西矩阵. 为了确保 $\rho_n(g)$ 也是西矩阵, 应使 g 为酉变换, 因为当且仅当 g 是酉变换, $\rho_n(g)$ 才是西矩阵.

然而, 我们很难找到满足条件 (C2) 的方法. 但是可以参考差分空时码的设计方法来达到我们的目的. 下面, 我们将给出几个例子来说明设计分布式差分空时码的方法.

4.1 基于酉矩阵群的分布式差分空时码

在本小节中, 我们将利用酉矩阵群 (有限的或无限的) 以及它们的张量积来设计分布式差分空时码.

假设 $A_1, A_2, \dots, A_u$ 是 $n \times n$ 的酉矩阵. 令 $\mathcal{G}$ 是由这些矩阵所组成的群, 即

$$\mathcal{G} = \{A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_s}; 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_s \leq u\}. \quad (12)$$

为了演示我们的方法, 我们仅选择 $\mathcal{G}$ 的一个子集 $\mathcal{A}$ 作为研究对象, $\mathcal{A}$ 的定义如下:

$$\mathcal{A} = \{A_1^{q_1} A_2^{q_2} \cdots A_u^{q_u}; q_j = 0, 1, \dots, v_j - 1, j = 1, 2, \dots, u\}. \quad (13)$$

其中, u 和 $v_j, j = 1, 2, \dots, u$ 是任意的整数.

对于任意的 $g \in \mathcal{A}$, 则 $\rho_n(g)$ 可以表示为 $g \otimes g \otimes \cdots \otimes g$, 其中 $\otimes$ 是矩阵的 Kronecker 积. 记 g 的特征值为 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. 则 ρ_n 的特征值为

$$\{\mu_{t_1}(g) \mu_{t_2}(g) \cdots \mu_{t_m}(g); 1 \leq t_1, t_2, \dots, t_m \leq n\}. \quad (14)$$

为了确保这些矩阵能达到满分集度, 即分集乘积大于零, 以下的定理给出了充分必要条件.

引理 1 矩阵集合 $\{\rho_n(g), g \in \mathcal{A}\}$ 达到满分集度的充分必要条件是: 对于任意的 $g_1, g_2 \in \mathcal{A}, g_1 \neq g_2$, $\rho_n(g_1^{-1}g_2)$ 的任意一个特征值都不等于 1, 即 $\mu_{t_1}(g_1^{-1}g_2)\mu_{t_2}(g_1^{-1}g_2)\cdots\mu_{t_m}(g_1^{-1}g_2) \neq 1$, 其中 $1 \leq t_1, t_2, \dots, t_m \leq n$.

由于这个定理的证明比较简单, 在此省略. 下面我们将给出几个例子来详细说明上面的方法.

例 1 令

$$A_1 = \begin{pmatrix} \varsigma & 0 \\ 0 & \varsigma^{-1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\varsigma = \exp(i\alpha)$, α 是一个待定的参数, 以满足引理 1 的条件; i 是虚数单位.

取定 $v_2 = 4$, 而让 v_1 待定. 则

$$\mathcal{A} = \{A_1^{q_1} A_2^{q_2}; q_1 = 0, 1, \dots, v_1, q_2 = 0, 1, 2, 3\}.$$

对于这一集合, 通过计算, 容易得到满足引理 1 的充分必要条件是对任意的整数 r , $(-v_1 \leq r \leq v_1)$, 以下 3 个条件同时满足: (i) $(2r - m)v_1\alpha \neq 2k_1\pi$; (ii) $m\pi + (2r - m)v_1\alpha \neq 2k_2\pi$; (iii) $(3m/2 - r) \neq 2k_3$; 其中 k_1, k_2, k_3 是任意的整数. 当 m 为奇数, $\alpha = \beta\pi$ (β 是无理数) 时, 以上 3 个条件都满足. 例如, 令 $m = 3$, $v_1 = 4$ 及 $\beta = 1/\sqrt{3}$ 时, 可以得到 16 个 8 阶酉矩阵, 其乘积分集为 0.6207. 又例如, 取 $v_1 = 64$, 可以得到 256 个酉矩阵, 乘积分集为 0.0459.

接下来我们将考虑置换矩阵 $P_j, j = 1, 2, \dots, M$ 的设计. 取 $m = 3$ 作为一个例子. 根据 Weyl 交互律, 可得到置换群 $\mathfrak{S}_3$. 而对于任意的 $\xi \in \mathfrak{S}_3$, 其表示式如下:

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix},$$

其中 j_1, j_2, j_3 是数字 1, 2, 3 的任意一个置换. 通过计算, 不难得到 ρ_3 的 6 个置换. 它们的矩阵表示式如下:

$$\begin{aligned} P_1 &= I_8; & P_2 &= [e(1)e(3)e(2)e(4)e(5)e(7)e(6)e(8)]; \\ P_3 &= [e(1)e(2)e(5)e(6)e(3)e(4)e(7)e(8)]; & P_4 &= [e(1)e(3)e(5)e(7)e(2)e(4)e(6)e(8)]; \\ P_5 &= [e(1)e(5)e(2)e(6)e(3)e(7)e(4)e(8)]; & P_6 &= [e(1)e(5)e(3)e(7)e(2)e(6)e(4)e(8)]; \end{aligned}$$

其中 I_8 是 8 阶单位矩阵, 而 $e(i)$ 表示 8 维列向量, 其中第 i 个元素为 1, 剩余的都是 0.

例 2 令

$$A = \frac{e^{5\pi i/4}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

假设取 $G = \{A^q P^j Q^p; q = 0, 1, \dots, v, j = 0, 1, 2, 3, p = 0, 1\}$. 则可以证明, 当 $mv \neq 0$ 时, 引理 1 的条件可以满足. 而置换矩阵可以和例 1 中相同.

4.2 基于差分空时码的分布式差分空时码

我们同样可以利用一些现有的差分空时码以及它们的张量积来设计分布式差分空时码. 下面我们通过例子来说明此方法.

例 3 文献 [8] 中给出了大小为 32 和 64 的差分空时码. 而且, 这些码具有最好的分集乘积. 在本例子中, 我们选择其中大小为 32 的差分空时码, 同时利用其张量积来设计分布式差分空时码.

令 $Q_j, j = 1, 2, \dots, 32$ 是文献 [8] 的西矩阵. 取 $m = 3$, 同时定义

$$U_i = Q_i \otimes Q_i \otimes Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, 32.$$

则 U_i 是一个 8 阶酉矩阵. 并且, 这个集合的分集乘积为 0.2976. 而对于置换矩阵 P_i 的设计, 可同例 1.

4.3 基于 Weyl 分解的分布式差分空时码

在上面的例子中, 矩阵的维数都被限制于 n^m 的形式. 但是, 我们可以利用定理 3 中的 Weyl 分解来破除这个限制.

例 4 假设 V 是二维的复 Euclid 空间. 取 $m = 4$. 考虑 Young 表 $\lambda = (3, 1)$. 由定理 3 可知, $m_\lambda = 3$, $\dim(S_\lambda V) = 3$, $\dim(S_\lambda V)^{\otimes m_\lambda} = 9$.

假定 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. 则经过计算可知, 表示 $\rho_2(g)$ 在 $S_\lambda V$ 上限制的矩阵形式为

$$E(g) \triangleq \det(g) \begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2ac & ad + bc & 2bd \\ c^2 & cd & d^2 \end{pmatrix}.$$

因此, $\rho_2(g)$ 在 $(S_\lambda V)^{\otimes m_\lambda}$ 上限制的矩阵形式为 $\text{diag}(E(g), E(g), E(g))$.

选取文献 [9] 中的 16 个矩阵作为 $g_i, i = 1, 2, \dots, 16$. 同时令 $U_j = \exp(i2\pi j/17)\rho_2(g_j)$. 则 $\{U_j, j = 1, 2, \dots, 16\}$ 是一个酉矩阵集合, 且具有分集乘积 0.6427. 另一方面, 置换矩阵可定义如下:

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 &= I_9; \quad \bar{P}_2 = [e(4)e(5)e(6)e(1)e(2)e(3)e(7)e(8)e(9)]; \\ \bar{P}_3 &= [e(1)e(2)e(3)e(7)e(8)e(9)e(4)e(5)e(6)]; \quad \bar{P}_4 = [e(7)e(8)e(9)e(4)e(5)e(6)e(1)e(2)e(3)]; \\ \bar{P}_5 &= [e(7)e(8)e(9)e(1)e(2)e(3)e(4)e(5)e(6)]; \quad \bar{P}_6 = [e(4)e(5)e(6)e(7)e(8)e(9)e(1)e(2)e(3)]; \end{aligned}$$

其中 I_9 是 9 阶单位矩阵, 而 $e(i)$ 表示 9 维列向量, 其中第 i 个元素为 1, 剩余的都是 0.

5 仿真结果

在这节中, 我们通过计算机仿真来验证本文设计的分布式差分空时码的性能. 第一个仿真是根据例 1, 并选取其中的 24 个酉矩阵以及 6 个置换矩阵; 第二个仿真是根据例 2, 选取 16 个酉矩阵及 6 个置换矩阵; 第三个仿真是根据例 3, 我们使用跟上面相同方法选取 16 个酉矩阵, 唯一的区别是这 16 个 2×2 矩阵来自文献 [9], 6 个置换矩阵同第一个仿真. 对于前面 3 个仿真, 我们假设 $T = 8$, 中继个数为 6. 其能量分配是根据文献 [4] 设置的, 也就是说在发送端的能量为 $T\rho$, 而在每个中继端的能量为 $\rho/(R(\rho + 1))$, 其中 ρ 是系统总能量. 对于第 4 个仿真, 其酉矩阵和置换矩阵都选自 4.3 小节中的例 4, 这里我们假设 $T = 9$, 中继数为 6 个, 其能量分配同上. 所有的仿真结果由图 1 所示.

图 1 基于 Weyl 交互律的 DDSTC 仿真及其比较

Figure 1 Simulations and comparisons on DDSTC based on Weyl reciprocity (relay number 6, and $T = 8$ or 9)

为了与现有的研究结果进行比较, 我们选取文献 [4] 第 IV.D 小节中的分布式差分空时码. 同时定义 $T = 8$, $u_{2j-1} = -\exp(i\pi(2j-1)/8)$, $u_{2j} = \exp(i\pi(2j)/8)$, 其中 $j = 1, 2, \dots, 8$. 这样就得到了 16 个酉矩阵及 8 个循环矩阵. 在这个例子中, 中继个数为 8, 能量分配同上面的例子. 仿真结果也在图 1 所示.

从图 1 可知, 尽管我们的方案中的中继个数比循环码方案少 2 个, 但性能却比它们更好.

6 总结

基于 Weyl 交互律, 文献 [6] 得到了一种新的分布式差分空时码的设计方法. 本文对此进行了补充与扩展. 通过使用交互律, 在设计分布式差分空时码中要求的相互交换的问题, 很容易得到解决. 本文所举的例子说明我们所使用的方法比现存的方法更灵活, 尤其是在多维酉矩阵以及中继数量比较多的情况下, 更容易得到码本.

参考文献

- 1 Jing Y, Hassibi B. Distributed space-time coding in wireless relay networks. *IEEE Trans Wirel Commun*, 2006, 5: 3524–3536
- 2 Kiran T, Rajan B. Partially-coherent distributed space-time codes with differential encoder and decoder. *IEEE J Sel Areas Commun*, 2007, 25: 426–433
- 3 Jing Y, Jafarkhani H. Distributed differential space-time coding for wireless relay networks. *IEEE Trans Commun*, 2008, 56: 1092–1100
- 4 Rajan G, Rajan B. Algebraic distributed differential space time codes with low decoding complexity. *IEEE Trans Wirel Commun*, 2008, 7: 3962–3971
- 5 Oggier F, Lequeu E. Differential distributed space time coding based on Cayley codes. In: *Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory*, Toronto, 2008. 2548–2552
- 6 Wang H Q, Zhao Z J. Distributed differential space-time codes based on Weyl's reciprocity. In: *Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory*, Seoul, 2009. 2828–2832
- 7 Fulton W, Harris J. *Representation Theory: A First Course (Graduate Texts in Mathematics)*. New York: Springer-Verlag New York Inc, 1991

- 8 Wang H, Wang G, Xia X G. Some 2×2 unitary space time codes from sphere packing theory with optimal diversity product of code size 6. IEEE Trans Inf Theory, 2004, 50: 3361-3368
- 9 Liang X B, Xia X G. Unitary signal constellations for differential space-time modulation with two transmit antennas: parametric codes, optimal designs, and bounds. IEEE Trans Inf Theory, 2002, 48: 2291-2322

附录 A 定理 1 的证明

为了证明定理 1, 我们需要以下结论.

引理 A1 假设 X 和 Y 是两个连续的, 实的随机变量, 它们的联合密度函数为 $f_{X,Y}(x,y)$, 则 $V = XY$ 的密度函数为

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, \frac{v}{x}) \frac{1}{|x|} dx.$$

此结论的证明可见 Rohatg 的文献¹⁾.

利用此结论, 我们很容易得到以下结果.

引理 A2 假设 $X_1 = X_{11} + iX_{12}$ 和 $X_2 = X_{21} + iX_{22}$ 服从零均值, 方差分别为 σ_1^2 和 σ_2^2 复高斯分布, 且相互独立. 令 $Y = X_1 X_2 = Y_1 + iY_2$. 则 Y_1 和 Y_2 的密度函数为

$$f_{Y_1}(y) = f_{Y_2}(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi^2 \sigma_1^2 \sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \exp\left(-\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2(x_1^2 + x_2^2)}\right)\right) dx.$$

利用以上引理, 我们可以开始证明定理 1. 由第 2 节中的 DDSTC 可以知道, 第 $2t$ 时段所接收到的信号是式 (7) 和 (8). 从式 (7) 可知, 如果 U_{jt} 和 Y_{t-1} 给定, Y_t 的密度函数完全由 $\hat{W}_t$ 所确定, 即由式 (8) 所给的随机变量的密度函数所确定. 因而我们主要考虑 $\hat{W}_t$ 的密度函数.

由假设可知, $V_{t,i} - U_{jt} V_{t-1,i}$ 服从复的高斯分布. 又由于 P_i 是固定的酉矩阵, $P_i(V_{t,i} - U_{jt} V_{t-1,i})$ 任然是服从复的高斯分布. 另一方面, g_i 也服从复的高斯分布. 因而, 由以上引理及极坐标的积分变换, 我们可以知道随机变量 $g_i P_i(V_{t,i} - U_{jt} V_{t-1,i})$ 的实部与虚部的密度函数如下:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(r^2 + \frac{y^2}{r^2}\right)\right) dr.$$

这样, 随机变量 $\sum_{i=1}^M g_i P_i(V_{t,i} - U_{jt} V_{t-1,i})$ 的实部与虚部的密度函数为

$$\frac{2^M}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} \frac{r_1 r_2 \cdots r_M}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_M^2}} \exp\left(-\left(r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_M^2 + \frac{y^2}{r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_M^2}\right)\right) dr_1 dr_2 \cdots dr_M.$$

在 $\hat{W}_t$ 中, 还剩下的是 $W_t - U_{jt} W_{t-1}$. 由于 W_t 与 W_{t-1} 都是服从复的高斯分布, 且相互独立, 因此 $W_t - U_{jt} W_{t-1}$ 也是高斯分布.

最后, 如果把 Y_t 分成实部与虚部, 即令 $Y_t = [y_{t,1,R} + iy_{t,1,I}, \dots, y_{t,M,R} + iy_{t,M,I}]^t$, 则可以得到其密度函数为

$$\begin{aligned} f(y_{t,1,R}, y_{t,1,I}, \dots, y_{t,M,R}, y_{t,M,I}) = \\ c \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} \prod_{i=1}^M \frac{r_{t,i,R}^{2M-1}}{\sqrt{a + r_{t,i,R}^2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^M \left(r_{t,i,R}^2 + \frac{\|(Y_t - U_{jt} Y_{t-1})_R\|^2}{a + r_{t,i,R}^2}\right)\right) \\ \times \prod_{i=1}^M \frac{r_{t,i,I}^{2M-1}}{\sqrt{a + r_{t,i,I}^2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^M \left(r_{t,i,I}^2 + \frac{\|(Y_t - U_{jt} Y_{t-1})_I\|^2}{a + r_{t,i,I}^2}\right)\right) dr_{t,1,R} \cdots dr_{t,M,I}, \end{aligned}$$

其中 a, c 是只与 ρ_1, ρ_2 有关的常数, 而 $(Y_t - U_{jt} Y_{t-1})_R$ 和 $(Y_t - U_{jt} Y_{t-1})_I$ 分别为 $Y_t - U_{jt} Y_{t-1}$ 的实部和虚部.

这样, 密度函数的极小, 即极大似然解码就等价于

$$\arg \min_{j=1,2,\dots,L} \|Y_t - U_j Y_{t-1}\|.$$

由此, 定理 1 得证.

1) Rohatgi V K. An introduction to probability theory and mathematical statistics. New York: John Wiley & Sons, 1976

Weyl's reciprocity and distributed differential space-time codes

WANG HaiQuan*, HONG Lei, ZHAO ZhiJin & ZHAO BaoFeng

School of Communications Engineering, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China

*E-mail: wanghq33@gmail.com

Abstract For a relay network in which receivers and relays have channel state information, or partial channel information, distributed space time block codes (DSTBC) are proposed to achieve full diversity of the system, and different DSTBC are well-designed. For a relay network in which transmitters, receivers and relays do not have any channel state information, it is proved that distributed differential space time codes (DDSTC) are an efficient way to transmit signals for transmitters and to forward signals for relays, while some basic issues for this DDSTC are still unclear. To make up these issues, in this paper, firstly, ML-decoding is derived rigorously based on calculation of density function of received signals. Secondly, by using Weyl reciprocity appearing in Representation of Finite Groups, a new designing method of DDSTC is proposed to satisfy the commuting property of codes required in the designing criteria. Thirdly, designing examples are given based on this designing method and representations of finite groups. These examples show that the proposed methods are more flexible, and easier to get codes than existing methods, especially in a case with high-dimensional unitary matrices and a large number of relays. Furthermore, simulations show that our codes have better performances than existing codes.

Keywords distributed differential space time codes, ML-decoder, Weyl reciprocity, relays, wireless network, space time block codes, fading channels

WANG HaiQuan received the M.S. degree in Nankai University, in 1989, and the Ph.D. degree in Kyoto University, Japan, in 1997, both in mathematics, and the Ph.D. degree in University of Delaware, Newark, in 2005, in electrical engineering. He has joined the College of Communications Engineering, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou, since July 2008 as a faculty member. His current research interests are signal processing and wireless communications.

HONG Lei was born in 1988. He is a postgraduate student in School of Communication Engineering, Hangzhou Dianzi University. His research interests include wireless relay network and wireless communications.

ZHAO ZhiJin received the M.S. degree in electronic engineering and the Ph.D. degree in communication and information system from Xidian University, Xi'an. Since 1984, she has been teaching adaptive signal processing and digital signal processing in Hangzhou Dianzi University, where she is currently a Professor. Her research interests include adaptive digital signal processing, communication signal processing, blind source separation, and cognitive radio. She is a member of the Institution Engineering Technology.

ZHAO BaoFeng was born in 1987. He received his B.S. degree in communication engineering from Zhejiang University of Science and Technology in 2010. Currently, he is a postgraduate in communication engineering in Hangzhou Dianzi University. His research interest is wireless communication.