论文

基于伴随方法的网格自适应DG方法

王利, 周伟江*

中国航天空气动力技术研究院, 北京 100074

* E-mail: zwj7349@sohu.com

收稿日期: 2016-12-20; 接受日期: 2017-09-06; 网络出版日期: 2017-10-17

摘要 发展了一套基于伴随方法的Euler方程自适应网格DG求解方法, 采用当地网格上的输出变量的误差估计作为离散误差指示器驱动网格自适应. 在离散误差指示器的构造中, 采用GMRES方法求解伴随方程获得伴随变量, 将 p 阶流场变量和伴随变量映射到 $p+1$ 阶函数空间, 并进行有限次块对角Jacobi迭代得到近似 $p+1$ 阶细网格解. 壁面边界通量及输出变量计算仅依赖边界外侧值以保证伴随相容性. 首先采用NACA0012翼型不同精度的阻力系数结果验证了误差估计的可靠性, 然后对NACA0012翼型亚声速、跨声速流场和圆柱6马赫高超声速绕流进行了自适应加密计算研究. 研究结果表明, 基于伴随方法的网格自适应可有效提高阻力系数等输出变量的模拟准确性, 在亚声速NACA0012翼型计算中使用约17%的全局加密自由度获得了与全局加密精度相当的阻力系数.

关键词 网格自适应, DG方法, 伴随方法, 高阶方法

1 引言

随着航空航天飞行器设计对气动参数预测准确性要求越来越严格, 非结构网格上的高精度自适应方法得到了流体力学(computational fluid dynamics, CFD)研究者的普遍重视^[1,2]. DPW会议(Drag Prediction Workshop)的结果分析表明, 在工程计算中通常采用的网格尺度上, 二阶有限体积方法不能产生足够准确的计算结果^[2]. 可以预见的是, 随着CFD方法的不断发展, 将越来越强调软件的易用性和准确性. 高精度方法和自适应方法相结合, 在获得网格无关解、实现复杂外形自动化计算及多学科优化中具有广阔的应用前景. 在非结构网格高精度方法中, DG方法(discontinuous Galerkin method)具有模板紧凑、易于实现网格自适应的特点, 为流场的高精度自适应计算提供了一种十

分吸引人的方案.

自适应方法的核心思想是在网格单元中对误差进行平均分配, 最终目的是提高输出函数(如升力系数、阻力系数)的计算准确性, 其应用效果很大程度上取决于空间离散误差指示器的性能. 离散误差指示器的值暗示了空间离散误差的大小, 是网格自适应的基本依据. 非结构网格的离散误差指示器大部分基于流场特征建立(如变量梯度), 认为激波等变量梯度大的区域离散误差也较大, 需要进行网格加密. 这种假设有一定的合理性, 但是并不是所有的流动特征附近的误差都会对目标输出函数产生影响, 流动特征附近的加密并不意味着目标输出函数的误差一定会减小. 这就可能发生这样的现象, 尽管可以极大提高某些流动特征的分辨率, 但还是不能获得令人满意的输出结果. 耗费了巨大的计算量而不能有效提高输出量计算

引用格式: 王利, 周伟江. 基于伴随方法的网格自适应DG方法. 中国科学: 技术科学, 2017, 47: 1214–1224

Wang L, Zhou W J. An adjoint-based grid adaptive discontinuous Galerkin method (in Chinese). Sci Sin Tech, 2017, 47: 1214–1224, doi: [10.1360/N092016-00441](https://doi.org/10.1360/N092016-00441)

准确性, 是限制网格自适应方法在工程计算中广泛应用的主要因素之一.

基于伴随方法的网格自适应不是通过流动特征的识别来间接地指出对输出函数误差贡献大的区域, 而是通过求解伴随方程, 利用伴随变量直接对输出函数误差进行估计. 该方法能够准确定位流场中输出变量误差较大的区域, 确保网格加密和稀疏在正确的位置进行, 有效避免了过度的网格加密操作.

国外已经针对基于伴随方法的自适应开展了广泛的研究工作. 基于伴随方法的网格自适应最初在有限元框架下提出^[3], 随后扩展到有限体积方法^[4], 并在三维复杂外形的网格自适应计算中成功应用^[5]. 在非结构网格高精度DG方法研究中, 基于伴随方法的网格自适应得到了主要的DG方法研究团队的重视, 应用范围不断扩展, 从简单二维外形的无黏流动模拟逐步发展到三维湍流流场的模拟^[6-8]. Wang和Mavriplis^[6]从离散方程出发导出了伴随方程, 通过对粗网格解进行重构得到更精细的伴随变量和流场变量来进行输出变量误差估计, Fidkowski和Darmofal^[7]同样采用了重构方法得到细网格解. 重构方法在激波和曲边单元附近应用时面临精度损失和稳定性的问题, 对采用标准单元基函数的DG方法而言实现较为复杂. 伴随相容性是伴随方法研究中的重要研究内容, Lu^[15]证明了边界条件和输出变量若只依赖于边界外侧值则能够保证伴随相容性, 但是, 某些边界条件, 如特征边界, 很难构造只依赖于边界外侧值的形式, 给伴随方法的实现带来一定困扰. 在超声速和高超声速流场计算中, 激波的存在给基于伴随方法的网格自适应带来较大的挑战. 激波使高阶方法的收敛困难, 影响误差估计的准确性, 斜率限制器的应用并不能解决收敛性问题.

国内在有限体积框架下对基于伴随方法的网格自适应开展了一些研究工作^[9,10], 在无黏及黏性流模拟中取得了令人满意的效果, 而在DG方法研究方面, 网格自适应多基于流场特征进行^[11,12], 基于伴随方法的网格自适应研究工作报道较少.

我们针对二维Euler方程DG方法的求解, 发展了基于伴随方法的网格自适应方法, 在细网格解的构造、伴随相容性保证和强激波捕捉等方面开展了一些有益的尝试. 首先采用NACA0012翼型阻力系数计算对误差估计的可靠性进行了验证, 然后对NACA0012翼型亚声速、跨声速和圆柱高超声速绕流进行了网格

自适应计算, 证明了基于伴随方程的网格自适应方法在减小输出变量空间离散误差方面的有效性.

2 Euler方程DG求解方法

定义有限元空间 $V_h = \{v_h \in L^\infty(\Omega) : v_h|_{\tau_k} = V(k); \forall k \in \tau_h\}$, 其中 τ_h 为计算域三角形或四边形单元离散, $V(k)$ 为单元 k 上的 p 阶多项式函数空间. 在单元 k 上对守恒形式Euler方程乘 $V(k)$ 上的基函数 φ_i 并分部积分, 可得Euler方程弱形式:

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial u_h}{\partial t} \varphi_i \mathrm{d}v + \int_{\partial\Omega_k} F \varphi_i \cdot \mathrm{d}s - \int_{\Omega_k} \nabla \varphi_i \cdot F \mathrm{d}v = 0, \quad (1)$$

其中, $u_h \in V_h$ 为近似解, 由单元局部多项式展开表示:

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_p} U_i \varphi_i. \quad (2)$$

近似解的精度取决于多项式阶数 p , N_p 为 p 阶多项式空间基函数的个数, U_i 为近似解自由度. 为了解方程(1), 需要选择合适的基函数形式, 这里采用的是标准单元上的层次正交基函数. 在单元边界处, 守恒变量不连续, 为了满足解的收敛性和熵条件, 将式(1)边界积分中的通量函数替换为Lax-Friedrichs数值通量. 最终可以得到半离散方程:

$$M \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + R_h(U) = 0, \quad (3)$$

其中, $R_h(U) = \int_{\partial\Omega_k} H(u_h^+, u_h^-) \varphi_i \cdot \mathrm{d}s - \int_{\Omega_k} \nabla \varphi_i \cdot F \mathrm{d}v$ 为稳态残差, M 为质量矩阵. 上标“+”和“-”表示边左右两侧的变量.

为了提高计算效率, 采用隐式方法求解式(3). 对方程(3)进行Euler一阶后差离散并关于 U^n 进行线性化得到如下的线性方程系统:

$$\left(\frac{M}{\Delta t} + \frac{\partial R_h(U^n)}{\partial U^n} \right) \Delta U^n = -R_h(U^n). \quad (4)$$

对上式采用预处理GMRES方法进行求解. GMRES方法的计算效率很大程度上取决于预处理矩阵的性能, 本文采用Gauss-Seidel迭代法作为预处理矩阵.

目前DG方法用于捕捉激波的技术主要有限制器及人工黏性方法. 限制器方法借鉴了有限体积与有限差分法中的成熟技术, 应用到DG方法中的突出问题是不能达到全场一致高精度, 一般需要配合采用激波

探测器使用. 限制器对间断区域的流场解进行降阶处理会不同程度地带来收敛性问题, 在伴随方法的应用中是不希望看到的. 人工黏性方法通过在原方程中添加耗散项进行间断捕捉, 不会对流场解进行突然地降阶处理, 对流场收敛性有一定改善作用. Persson和Peraire^[13]提出的人工黏性方法在DG方法中应用较多, 该方法在Euler方程中添加了如下的人工黏性项:

$$\frac{\partial u_h}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} - \nabla \cdot (\varepsilon_e \nabla u_h) = 0, \quad (5)$$

其中, ε_e 为人工黏性系数, 为了在捕捉激波的同时减小人工黏性对流场的污染, 必须采取适当手段控制人工黏性系数的大小, 一般要求其在间断区域保持恰当值而在光滑区域为0. 不同的人工黏性方法最主要的区别就在人工黏性系数的计算方式上, Persson和Peraire^[13]基于解的展开系数衰减速度提出了如下的间断探测机制:

$$S_e = \frac{(u_h - \hat{u}_h, u_h - \hat{u}_h)_e}{(u_h, u_h)_e}, \quad (6)$$

其中, $\hat{u}_h = \sum_{i=1}^{N_p-1} U_i \varphi_i$, S_e 的尺度约为 $1/p^4$. 人工黏性系数可按式计算:

$$\varepsilon_e = \begin{cases} 0, & s_e < s_0 - \kappa, \\ \frac{\varepsilon_0}{2} \left(1 + \sin \frac{\pi(s_e - s_0)}{2\kappa} \right), & s_0 - \kappa \leq s_e \leq s_0 + \kappa, \\ \varepsilon_0, & s_e > s_0 + \kappa, \end{cases} \quad (7)$$

其中, $s_e = \log_{10} S_e$, $\varepsilon_0 = Ch/p$, $s_0 = -4\log_{10} p$, h 为单元尺度, C 和 κ 为经验参数.

黏性项离散采用BR2^[14]格式, 分别尝试了包含和不包含面积分项两种实现方式, 数值经验表明包含面积分项的实现方式对提高计算的稳定性和流场的光滑性更有好处.

3 基于伴随方法的网格自适应

3.1 误差估计方法

假设方程(1)在 p 阶多项式函数空间 V_H 上的稳态解为 $\mathbf{u}_H$, 特定的输出函数为 $J_H(\mathbf{u}_H)$, 同时在 $p+1$ 阶多项式函数空间上存在解 $\mathbf{u}_h$ 和输出函数 $J_h(\mathbf{u}_h)$, 且 $V_H \subset V_h$, 为

后文叙述方便称 $\mathbf{u}_H$ 为粗网格解, $\mathbf{u}_h$ 为细网格解. 我们希望利用伴随方法估计 $J_h(\mathbf{u}_h)$ 和 $J_H(\mathbf{u}_H)$ 间的差异, 构造网格离散误差指示器.

伴随变量 ψ_h 表示输出变量对残差波动的敏感程度, 满足如下伴随方程^[15]:

$$\mathbf{J}'_h[\mathbf{u}_h](\mathbf{v}_h) = \mathbf{R}'_h[\mathbf{u}_h](\mathbf{v}_h, \psi_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \quad (8)$$

其中, $\mathbf{R}'_h[\mathbf{u}_h](\cdot, \cdot)$ 和 $\mathbf{J}'_h[\mathbf{u}_h](\cdot)$ 表示对稳态残差和输出变量关于 u_h 进行线化后得到的线性函数. 式(8)便于进行数学分析, 但不便于伴随方法的实现, 为此, 直接对稳态残差 $\mathbf{R}_h(\mathbf{u}_h)$ 和输出变量 $J_h(\mathbf{u}_h)$ 关于 u_h 进行线化得到如下的伴随方程:

$$\{\mathbf{R}'_h[\mathbf{u}_h]\}^\top \boldsymbol{\Psi}_h = \{\mathbf{J}'_h[\mathbf{u}_h]\}^\top, \quad (9)$$

其中, $\boldsymbol{\Psi}_h$ 为伴随变量自由度, $\psi_h = \sum_{i=1}^{N_p} \boldsymbol{\Psi}_i \varphi_i$.

对细网格输出变量 $J_h(\mathbf{u}_h)$ 在 $\mathbf{u}_h^H$ 处展开并利用方程式(8)可以得到基于流动控制方程残差的输出变量误差估计式(10), 这里 $\mathbf{u}_h^H$ 为粗网格解向密网格解的映射, $\delta \mathbf{u}_h = \mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^H$.

$$\begin{aligned} J_h(\mathbf{u}_h) - J_H(\mathbf{u}_H) &\approx \mathbf{J}'_h[\mathbf{u}_h^H](\delta \mathbf{u}_h) \\ &= \mathbf{R}'_h[\mathbf{u}_h^H](\delta \mathbf{u}_h, \psi_h) \\ &\approx \mathbf{R}_h(\mathbf{u}_h, \psi_h) - \mathbf{R}_h(\mathbf{u}_h^H, \psi_h) \\ &= -\mathbf{R}_h(\mathbf{u}_h^H, \psi_h). \end{aligned} \quad (10)$$

定义伴随残差,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_h^\psi[\mathbf{u}_h^H](\delta \mathbf{u}_h, \psi_H) &\equiv \\ \mathbf{R}'_h[\mathbf{u}_h^H](\delta \mathbf{u}_h, \psi_H) - \mathbf{J}'_h[\mathbf{u}_h^H](\delta \mathbf{u}_h), \end{aligned}$$

可以导出基于伴随方程残差的输出变量误差估计式:

$$\begin{aligned} J_h(\mathbf{u}_h) - J_H(\mathbf{u}_H) &\approx \mathbf{J}'_h[\mathbf{u}_h^H](\delta \mathbf{u}_h) \\ &= -\mathbf{R}_h^\psi[\mathbf{u}_h^H](\delta \mathbf{u}_h, \psi_H) + \mathbf{R}'_h[\mathbf{u}_h^H](\delta \mathbf{u}_h, \psi_H) \\ &\approx -\mathbf{R}_h^\psi[\mathbf{u}_h^H](\delta \mathbf{u}_h, \psi_H) + \mathbf{R}_h(\mathbf{u}_h, \psi_H) - \mathbf{R}_h(\mathbf{u}_h^H, \psi_H) \\ &= -\mathbf{R}_h^\psi[\mathbf{u}_h^H](\delta \mathbf{u}_h, \psi_H). \end{aligned} \quad (11)$$

利用式(10)和(11)均可以对输出变量误差进行估计, 但在非线性问题中采用二者平均值可得到更准确的误差估计结果^[16]:

$$\begin{aligned} J_h(\mathbf{u}_h) - J_H(\mathbf{u}_H) &= \\ \frac{1}{2} [-\mathbf{R}_h^\psi[\mathbf{u}_h^H](\delta \mathbf{u}_h, \psi_H) - \mathbf{R}_h(\mathbf{u}_h^H, \psi_H)]. \end{aligned} \quad (12)$$

输出变量误差估计结果是整个流场误差的累积, 不能直接用于构造离散误差指示器. 将式(12)限制到任意单元 k 上可以很方便地得到各个单元对输出变量误差的贡献量, 取其绝对值, 构造如下的离散误差指示器:

$$I_k = \frac{1}{2} \left[\left| \mathbf{R}_h(\mathbf{u}_h^H|_k, \boldsymbol{\psi}_h|_k) \right| + \left| \mathbf{R}_h^v[\mathbf{u}_h^H](\delta \mathbf{u}_h|_k, \boldsymbol{\psi}_h|_k) \right| \right]. \quad (13)$$

3.2 方法实现

采用与主方程求解相同的GMRES方法求解伴随方程式(9), 获得当前求解空间上的伴随变量 $\boldsymbol{\Psi}_h$. 精确计算 $\mathbf{u}_h$ 和 $\boldsymbol{\Psi}_h$ 的花费过大, 多数研究中^[6,8]通过对 $\mathbf{u}_h$ 和 $\boldsymbol{\Psi}_h$ 进行最小二乘重构获得其近似结果 $\tilde{\mathbf{u}}_h$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_h$. 在标准单元上进行最小二乘重构比较困难, 且该方法并未考虑流场的输运性质, 在边界曲边单元处精度难以保证. 此外, 激波附近的变量重构容易引起非物理波动, 必须采用限制措施, 也增加了方法实现复杂性. 我们这里采用对粗网格向细网格的映射解进行有限次块对角Jacobi迭代光滑操作的方式获得近似精确解. 具体方法如下, 对流场解 $\mathbf{u}_h$, 进行如下操作:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h^0 &= \mathbf{u}_h^H = \sum_{i=1}^{N_{p+1}} \mathbf{U}_i \varphi_i, \\ \text{for } k &= 0, N, \\ \mathbf{u}_h^{k+1} &= \mathbf{u}_h^k - [\mathbf{D}]^{-1} \mathbf{R}_h(\mathbf{u}_h^k), \\ \mathbf{u}_h &= \mathbf{u}_h^N, \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{D}$ 为Jacobian矩阵的主对角矩阵.

对高阶伴随变量 $\boldsymbol{\Psi}_h$ 进行类似的操作:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_h^0 &= \boldsymbol{\Psi}_h^H = \sum_{i=1}^{N_{p+1}} \boldsymbol{\Psi}_i \varphi_i, \\ \text{for } k &= 0, N, \\ \boldsymbol{\Psi}_h^{k+1} &= \boldsymbol{\Psi}_h^k - [\mathbf{D}^T]^{-1} \mathbf{R}_h^v(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\Psi}_h^k), \\ \boldsymbol{\Psi}_h &= \boldsymbol{\Psi}_h^N. \end{aligned}$$

许多研究结果证实了, 伴随相容性不仅影响到伴随方程的正确求解, 而且还与输出变量误差和流场求解误差的收敛性有关. Lu^[15]通过对连续伴随方程和离散伴随方程的分析发现, 流动控制方程求解时的边界处理方式和输出变量的定义方式直接关系到算法的伴随相容性. 为了保证伴随相容性, 必须保证边界通量和输出变量定义不显式依赖边界内侧值. 远场边界

难以进行相容处理, 仍然维持非相容处理方式, 计算表明对伴随方程求解影响较小. 对壁面边界进行相容处理, 壁面边界通量直接采用 $\mathbf{H}(\mathbf{u}_b^+, \mathbf{u}_b^-) = \mathbf{F}(\mathbf{u}_b^-)$ 计算. 阻力系数定义也仅依赖壁面外侧值:

$$C_D = \int_{\Gamma_{\text{wall}}} (p(\mathbf{u}_b^-) - p_\infty) (n_x \cos(\alpha) + n_y \sin(\alpha)) ds. \quad (14)$$

3.3 网格自适应

基于离散误差指示器 I_k , 采用两种自适应策略. 第一种策略由用户指定输出变量的容许误差 ϵ_f , 并根据下面的准则将网格单元标记为加密或稀疏:

$$\begin{cases} I_k > \frac{\epsilon_f}{N_E}, & \text{refine,} \\ I_k < \frac{0.1\epsilon_f}{N_E}, & \text{coarsen,} \end{cases} \quad (15)$$

其中, N_E 为当前单元数. 在每个自适应循环中, 首先在当前网格上计算输出变量误差值和各个单元上的离散误差指示器值, 若输出变量误差值达到用户指定输出变量容许误差则自适应停止, 计算结束; 否则, 根据式(15)进行网格加密或稀疏标记.

考虑到很多情况下用户难以确定容许误差值, 设计了自适应策略2. 在每个自适应循环中, 计算网格单元上的离散误差指示器值, 并对离散误差指示器值按大小排序, 并对误差最大的10%的当前单元进行加密, 对误差最小的10%的单元进行稀疏. 自适应策略2需要指定网格加密层数, 达到指定层数后, 计算结束.

对标记为加密的网格单元, 将每个单元剖分为4个子单元, 并按照标准映射方法将父单元流场信息传递到子单元中. 对标记为稀疏的网格单元, 若属于同一父单元的4个子单元均标记为稀疏, 则删除4个子单元并按照下式将子单元流场信息恢复到父单元上:

$$\mathbf{u}_k = \min_{\mathbf{u} \in V(k)} \int_{\Omega_k} [\mathbf{u} - \mathbf{u}_{ki}]^2 dv, \quad (16)$$

其中, $V(k)$ 为父单元 k 上的 p 阶多项式空间, $\mathbf{u}_{ki}$ 为子单元信息, 是已知的. 为了防止相邻单元间加密层级相差过大带来的流场计算问题, 当相邻网格单元加密层级超过1时适当调整网格加密标记, 确保相邻网格单元加密层级相差不超过1.

高阶精度方法对弯曲壁面的表示十分敏感, 不能在分段线性近似的弯曲壁面上得到正确的流场解. 特

别是网格自适应过程中, 壁面单元的加密和稀疏应保证新网格对原始壁面的忠实性. 为此, 首先对读入的分段线性壁面进行3次样条拟合, 并将其作为原始壁面代理, 每当需要新的壁面点时都由壁面代理提供, 以保证网格自适应对原始壁面的保形(图1).

在DG方法实现中, 含有曲边的壁面单元通过在曲边上增加控制点, 提高坐标变换中插值函数的阶数, 将曲边单元变换为自然坐标下的标准单元(图2). 坐标变换公式及插值函数为

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \bar{x}_i \phi_i(\xi, \eta), \quad (17)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta),$$

$$\phi_2 = \frac{1}{32}(1+\xi)(1-\eta)(3\eta-1)(3\eta+1),$$

$$\phi_3 = \frac{1}{32}(1+\xi)(1+\eta)(3\eta-1)(3\eta+1),$$

$$\phi_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta),$$

$$\phi_5 = \frac{9}{32}(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta)(1-3\eta),$$

$$\phi_6 = \frac{9}{32}(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta)(1+3\eta).$$

4 方法验证

为了考察基于伴随方法的网格自适应技术对提高输出变量计算准确性的效果, 计算了NACA0012翼型亚声速流动、跨声声速流动和圆柱高超声速绕流流动. 因自适应效果很大程度上依赖于误差估计的准确性, 首先验证误差估计方法的可靠性.

4.1 误差估计可靠性

首先在初始网格上分别计算了 $p=1, 2, 3$ 三种情况

图1 (网络版彩图)弯曲壁面3次样条拟合效果

图2 曲边单元高阶近似

的流场, 以便精确计算 $p=1$ 和 $p=2$ 时的阻力系数误差. 为了循序渐进考察误差估计方法的可靠性, 选择式(11)进行验证. 注意到式(11)除了包含当前求解空间中的流场解 $\mathbf{u}_H$ 和伴随变量 $\boldsymbol{\psi}_H$ 外, 还包含 $p+1$ 阶精度的流场解 $\mathbf{u}_h$, 在验证过程中采用3种方法对 $\mathbf{u}_h$ 进行计算, 逐步验证误差估计方法的准确性. 利用已经计算得到的 $p+1$ 阶精确解 $\mathbf{u}_h$ 计算输出变量误差, 考察伴随方程求解正确性. 然后采用500步块对角Jacobi迭代计算 $\mathbf{u}_h$ 的近似结果 $\tilde{\mathbf{u}}_h$, 考察迭代光滑操作的正确性. 最后, 采用100步块对角Jacobi迭代计算 $\tilde{\mathbf{u}}_h$, 考察光滑操作步数对误差估计可靠性的影响.

图3给出的是 $p=2$ 时的马赫数分布, 图4和图5显示的是 x 方向动量方程伴随变量分布, 其中图4对边界进行了相容性处理, 图5未进行相容性处理. 可以看到, 伴随相容性对获得准确的伴随变量分布至关重要, 在未进行相容性处理的情况下会得到畸形的伴随变量分布, 造成误差估计错误. 不能在正确的位置进行网格的加密和稀疏操作, 极大影响自适应的效果.

表1给出了不同精度情况下的阻力系数及其误差估计, 其中 ε_0 代表高阶精度与低阶精度的阻力系数之

图3 NACA0012翼型 $Ma 0.5$ 绕流马赫数分布

图4 NACA0012翼型x方向动量方程伴随变量分布(相容边界处理)

图5 NACA0012翼型x方向动量方程伴随变量分布(非相容边界处理)

差, ε_1 和 ε_2 均为通过式(11)计算得到的阻力系数误差, ε_1 计算时采用了精确的 $\mathbf{u}_h$, ε_2 计算时采用近似精确解 $\tilde{\mathbf{u}}_h$, 近似精确解通过前面介绍的对粗网格解进行光滑得到, 光滑步数为500步. 可以看到, ε_1 和 ε_2 均与精确误差 ε_0 接近, 这说明伴随方程求解和误差估计都是可靠的. 500步光滑操作需要较多的计算时间, 为了进一步减小计算时间, 我们对比研究了不同光滑步数对计算

结果的影响. ε_3 为进行100步光滑操作后得到的阻力系数误差, 与 ε_2 十分接近. 考虑到光滑操作步数对误差估计可靠性影响较小, 后续光滑操作步数均取100步. 采用式(10)进行误差估计可获得类似的结果, 这里不再给出.

4.2 NACA0012翼型亚声速流动

来流马赫数为0.5, 攻角为 1° , 自适应针对阻力系数进行. 初始计算网格包含3500个四边形单元. 采用自适应策略1, 设 $\varepsilon_j = 0.0001$, 且要求自适应循环为3次, 自适应策略2设置加密层级为3级. 在每个自适应循环中, 均要求残差至少下降4个量级, 以便保证伴随变量的分布与更准确的稳态流场相适应. 图6和图7给出了两种自适应策略的网格自适应过程, 网格加密集中在翼型头部、尾部及上壁面附近. 在当前3级加密的情况下, 自适应策略2在每次自适应循环中均增加了较少的网格, 这与初始网格较少且加密层级不高有关. 若加密层级较少, 自适应策略2具有更高的自适应效率, 但是, 随着网格数的增加, 自适应策略2每次需要对更多的网格进行加密, 会导致后期网格规模迅速扩大, 自适应效率反而降低. 特别注意到驻点线附近的网格被加密, 这是基于伴随方法的自适应的典型特征. 图8显示的是最终加密网格上的压力分布.

为了与全局加密效果进行对比, 对初始网格进行两次全局加密, 单元数分别为14000和56000. 图9给出了自适应加密与全局加密的阻力系数收敛过程对比. 阻力系数同样达到约 2×10^{-5} , 自适应策略1和自适应策略2所需自由度约 3×10^4 , 而全局加密需要的自由度约为 17×10^4 . 自适应加密使用约17%的全局加密自由度达到了同样的计算精度, 自适应效果十分令人满意.

4.3 NACA0012翼型跨声速流动

来流速度为0.8马赫, 攻角为 1.25° , 选择阻力系数作为自适应目标输出变量, 计算方式见式(14). 对自适应策略1, $\varepsilon_j = 0.005$, 最大网格加密层级为3. 自适应策

表1 不同精度下阻力系数及其误差估计

精度	C_D	ε_0	ε_1	ε_2	ε_3
$p=1$	5.091×10^4	-4.935×10^4	-4.681×10^4	-4.665×10^4	-4.530×10^4
$p=2$	1.563×10^5	-9.512×10^6	-9.021×10^6	-9.168×10^6	-9.061×10^6
$p=3$	6.113×10^6	—	—	—	—

图6 自适应策略1不同自适应循环的网格. (a)~(c)分别为自适应1~3次

图7 自适应策略2不同自适应循环的网格. (a)~(c)分别为自适应1~3次

图8 最终加密网格上的压力分布

图9 自适应加密与统一加密阻力系数收敛过程对比

略2网格加密层级同样设为3. 图10为在最终加密的网格上获得的马赫数分布, 典型的流动特征包括上壁面的强激波和下壁面的弱激波. 激波位置和强度的准确模拟对翼型气动系数的计算准确性有较大影响, 在基于流动特征的网格自适应中主要针对上下表面的激波位置进行加密. 图11给出的是采用自适应策略1和自适应策略2得到的最终加密网格, 网格的加密位置除激波外, 还包括翼型头部、尾部、上表面附近和翼型上部的一个 λ 型区域. 跨声速翼型的网格加密位置除激波外与亚声速翼型的加密区域是类似的. 图12为翼型表面压力系数分布, 上表面较强激波的捕捉比较光滑, 下表面上的弱激波附近人工黏性系数为0, 造成压力系数存在一定波动. 同时开展了全局网格加密的影响研究. 图13显示了阻力系数随网格加密的收敛过程对比情况, 在减小阻力系数离散误差方面, 网格自适应与全局加密相比仍具有较大的优势, 特别是首次自适应后阻力系数的计算准确性有很大改善. 与亚声速翼型网格自适应相比, 第2次和第3次自适应加密的效率有所降低, 主要的原因是较多的网格被布置到激波附近, 而激波计算足够准确后再提高其解析度对阻力系数计算准确性的影响会大大减小.

4.4 圆柱高超声速绕流

为了考察基于伴随方程的网格自适应方法对高超声速流动计算的稳定性, 模拟了圆柱6马赫高超声速绕流. 来流攻角为 0° , 网格自适应仍针对阻力系数

图10 NACA0012翼型马赫数分布, $Ma=0.8$, $\alpha=1.25$

进行. 该算例仅完成了自适应策略1的计算, 最大加密层级设为6, $\varepsilon_j = 0.01$. 初始网格如图14(a)所示, 总单元数为420. 图14(b)为进行4次网格自适应循环后得到的

图11 最终加密网格. (a) 自适应策略1; (b) 自适应策略2

图12 NACA 0012翼型压力系数分布, $Ma=0.8$, $\alpha=1.25$

图13 自适应加密与统一加密阻力系数收敛过程对比

图14 初始网格(a)和自适应加密4次后的网格(b)

网格, 加密集中于圆柱正面的激波与激波层内, 重点加密区域除激波外还有声速线附近. 特别注意到, 圆柱肩部上侧的激波并未被加密, 可见, 这部分区域的残差对阻力系数的影响有限. 图15给出了最终加密网格上的马赫数分布, 圆柱正面的激波得到了很好的捕捉. 图16给出了有限体积法与自适应DG方法沿驻点线的压力分布的对比, 有限体积法使用初始网格全局加密一次后的网格进行计算, 自适应DG方法有效提高了激波的解析度. 图17给出的是阻力系数随网格自适应加密的收敛过程, 同时给出的还有全局统一加密

图15 最终加密网格上的马赫数分布

图16 驻点线压力分布有限体积法与自适应DG方法对比

图 17 自适应加密阻力系数收敛过程

的收敛过程. 第4次到第5次自适应加密后阻力系数改变量为1.5‰, 第5次到第6次自适应后阻力系数改变量为0.8‰, 阻力系数已经基本收敛. 全局统一加密在自由度为 3.5×10^4 左右时阻力系数值为0.6409, 第4次自适应加密后的自由度为 2×10^4 左右, 阻力系数值为0.6407,

二者十分接近, 有力证明了伴随自适应方法的有效性.

5 总结

针对Euler方程DG求解方法, 发展了基于伴随方法的网格自适应技术. 通过NACA0012翼型亚声速、跨声速流动、圆柱6马赫高超声速绕流算例的计算, 考察了误差估计方法的可靠性和网格自适应的高效性. 对算例结果分析有如下发现.

(1) 边界条件的伴随相容性对获得准确的伴随变量分布十分重要, 特别是壁面边界的处理. 数值试验表明, 远场边界的伴随相容性对伴随方程的求解影响较小.

(2) 流场的收敛性影响基于伴随方法的误差估计的准确性. 本文采用的人工黏性激波捕捉方法对提高含激波流场的计算收敛性有所帮助, 比较适合在超声速流场基于伴随方法的网格自适应计算中应用.

(3) 基于伴随方法的网格自适应可有效提高输出变量模拟准确性, 在NACA0012亚声速绕流自适应加密模拟中, 阻力系数计算只使用17%的自由度却达到了与全局统一加密相同的模拟精度.

参考文献

- Slotnick J, Khodadoust A, Alonso J, et al. CFD vision 2030 study: A path to revolutionary computational aerosciences. NASA Report, 2014, NASA-CR-2014-218178
- Kroll N. ADIGMA—A European project on the development of adaptive higher-order variational methods for aerospace applications. In: EC-COMAS Conference. Lissabon, Portugal, 2010
- Becker R, Rannacher R. A feed-back approach to error control in finite element methods: Basic analysis and examples. East-West J Numer Math, 1996, 4: 237–264
- Venditti D A, Darmofal D L. Anisotropic grid adaptation for functional outputs: Application to two-dimensional viscous flows. J Comput Phys, 2003, 187: 22–46
- Nemec M, Aftosmis M J, Wintzer M. Adjoint-based adaptive mesh refinement for complex geometries. In: 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, 2008. AIAA 2008-0725
- Wang L, Mavriplis D J. Adjoint-based h - p adaptive discontinuous Galerkin methods for the 2D compressible Euler equations. J Comput Phys, 2009, 228: 7643–7661
- Fidkowski K J, Darmofal D L. An adaptive simplex cut-cell method for discontinuous Galerkin discretizations of the Navier-Stokes equations. In: 18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. Miami, 2007. AIAA 2007-3941
- Leicht T, Hartmann R. Goal-oriented error estimation and hp -adaptive mesh refinement for aerodynamic flows. In: 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. Orlando, 2011. AIAA 2011-0212
- 李立, 白文, 梁益华. 基于伴随方程方法的非结构网格自适应技术及应用. 空气动力学学报, 2011, 29: 309–316
- 杨夏颢, 周春华. 目标函数误差估算及网格自适应处理. 空气动力学学报, 2014, 32: 688–693
- 徐云, 蔚喜军. 自适应间断有限元方法求解双曲守恒律方程. 计算物理, 2009, 26: 159–168
- 孙强, 吕宏强, 伍贻兆. 基于高阶物面近似的自适应间断有限元法. 空气动力学学报, 2015, 33: 446–453
- Persson P O, Peraire J. Sub-cell shock capturing for discontinuous Galerkin methods. In: 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit.

- Reno, 2006. AIAA 2006-112
- 14 Bassi F, Crivellini A, Rebay S, et al. Discontinuous Galerkin solution of the Reynolds-averaged Navier-Stokes and $k-\omega$ turbulence model equations. *Comput Fluids*, 2005, 34: 507–540
- 15 Lu J. An a posteriori error control framework for adaptive precision optimization using discontinuous Galerkin finite element method. Dissertation of Doctoral Degree. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 2005
- 16 Becker R, Rannacher R. An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods. *Acta Numer*, 2001, 10: 1–102

An adjoint-based grid adaptive discontinuous Galerkin method

WANG Li & ZHOU WeiJiang

China Academy of Aerospace Aerodynamics, Beijing 100074, China

A grid adaptation method has been developed for discontinuous Galerkin discretizations of two-dimensional Euler equations. The element contribution to the global error in interested output variable is used as an indicator to drive mesh adaptation strategies. In the error indicator construction process, the adjoint variables are obtained by solving the adjoint equations with the GMRES algorithm. The solutions of the primal and adjoint problems in the enriched space of order $p+1$ are approximated by taking a small number of block-diagonal Jacobi iterations on the projected solutions of order p . In order to enforce the adjoint consistency, the numerical flux and output functions defined on the wall are constructed to depend only on the exterior states. The drag coefficient of NACA0012 airfoil with different orders of accuracy is used to evaluate the reliability of the output error estimation method. The subsonic and transonic inviscid flows around NACA 0012 airfoil, and the Mach 6 hypersonic flow over a half cylinder are simulated using the developed grid adaptation method. The computation results demonstrate that the adjoint-based adaptive method is very effective in reducing discretization errors of the output functions such as drag coefficient. The results for the subsonic flow of NACA 0012 shows that only 17% of degrees of freedom employed by the uniform refinement is required to achieve equivalent output accuracy by the adjoint-based adaptive approach.

grid adaptation, discontinuous Galerkin method, adjoint-based method, higher-order methods

doi: 10.1360/N092016-00441