齐次集及其拟 Lipschitz 等价

吕凡^①, 娄曼丽^②, 奚李峰^{③*}

① 华中科技大学数学与统计学院, 武汉 430074;

② 广东技术师范学院计算机科学学院, 广州 510665;

③ 浙江万里学院数学研究所, 宁波 315100

E-mail: lvfan1123@163.com, loumanli@126.com, xilifengningbo@yahoo.com

收稿日期: 2013-10-08; 接受日期: 2014-02-01; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371329, 11301092, 11101159 和 11225101)、教育部新世纪优秀人才支持计划 (批准号: NCET-10-0981)、浙江省自然科学基金 (批准号: LR13A1010001 和 LY12F02011) 和广东省自然科学基金 (批准号: S2011040005741) 资助项目

摘要 本文定义并研究一类齐次分形, 该类分形包含所有的 (拟) Ahlfors-David 正则集和许多非正则的 Moran 集, 这里如果一个分形的 Hausdorff 维数与 packing 维数不相等, 则称它是非正则的. 对于这类齐次分形, 本文得出它们的分形维数, 并且给出在适当分离条件下两个齐次分形拟 Lipschitz 等价的充要条件. 随后, 本文将这些结果应用到非正则的 Moran 集上.

关键词 分形 齐次性 正则性 Moran 集 拟 Lipschitz 等价

MSC (2010) 主题分类 28A80

1 背景介绍

众所周知, Ahlfors-David 正则集具有非常好的分形性质, 其中最重要的一条就是它们的 Hausdorff 维数总与 packing 维数相等. $\mathbb{R}^n$ 中满足开集条件的自相似集及自共形集是 Ahlfors-David 正则集的典型例子. 我们称度量空间 (X, d_X) 的紧子集 A 是一个 Ahlfors-David s -正则集 ($s \in (0, \infty)$), 如果 A 上支撑着一个 Borel 测度 μ , 并且存在着一个常数 c , 使得对于所有的 $x \in A$, $0 < r \leq |A|$, 有

$$c^{-1}r^s \leq \mu(B(x, r)) \leq cr^s, \quad (1.1)$$

此处, $B(x, r)$ 是以 x 为中心 r 为半径的闭球, $|\cdot|$ 表示集合的直径. 对于 Ahlfors-David s -正则集 A 成立下式:

$$\dim_H A = \dim_P A = s, \quad (1.2)$$

并且 $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$.

在几何测度论中, 利用双 Lipschitz 映射来给分形分类是一个非常重要的课题, 其中最让人们感兴趣的是 Ahlfors-David 正则集之间的双 Lipschitz 等价性问题. 两个度量空间 (X, d_X) 与 (Y, d_Y) 是双 Lipschitz 等价的, 如果存在双射 $f: X \rightarrow Y$ 和常数 L , 使得对于所有的 $x_1, x_2 \in X$, 成立

$$\frac{d_X(x_1, x_2)}{L} \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq Ld_X(x_1, x_2). \quad (1.3)$$

文献 [1, 2] 分别研究了 Ahlfors-David 正则集的子集间的与自共形集的子集间的双 Lipschitz 嵌入问题. 受文献 [1, 3] 的启发, Deng 等人^[4] 研究了自相似集间的双 Lipschitz 嵌入问题. 我们注意到上述结果均依赖于 Ahlfors-David 正则集间的双 Lipschitz 等价性.

Falconer 和 Marsh^[5] 指出, 要得出 Ahlfors-David 正则集间的双 Lipschitz 等价性是一件非常困难的事情, 哪怕是满足强分离条件的自相似集间的双 Lipschitz 等价性^[3, 6, 7]. 基于文献 [5] 中的想法, Xi^[8] 引入了一个相对弱一些的概念, 称为拟 Lipschitz 等价. Wang 和 Xi^[9] 证明了, 在某些分离条件下, 两个 Ahlfors-David 正则集是拟 Lipschitz 等价的, 当且仅当它们具有相同的 Hausdorff 维数.

定义 1.1 两个度量空间 (X, d_X) 与 (Y, d_Y) 是拟 Lipschitz 等价的, 如果存在双射 $f: X \rightarrow Y$, 使得对于任意的 $x_1, x_2 \in X$, 当 $d_X(x_1, x_2) \rightarrow 0$ 时, 一致地有

$$\frac{\log d_Y(f(x_1), f(x_2))}{\log d_X(x_1, x_2)} \rightarrow 1. \quad (1.4)$$

Wang 和 Xi^[10] 还引入了一个比 Ahlfors-David 正则性稍弱的概念: 拟 Ahlfors-David 正则性.

定义 1.2 我们称度量空间 (X, d_X) 的紧子集 A 是拟 Ahlfors-David s -正则的 ($s \in (0, \infty)$), 如果存在一个支撑在 A 上的 Borel 测度 μ 和一个非降的函数 $\chi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, 满足 $\lim_{r \rightarrow 0} \chi(r) = 0$, 使得对于所有的 $x \in A$, $0 < r < |A|$, 有

$$s(1 - \chi(r)) \leq \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \leq s(1 + \chi(r)),$$

即当 $r \rightarrow 0$ 时, 对于所有的 $x \in A$, 一致地有

$$\frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \rightarrow s. \quad (1.5)$$

注 1.3 所有的 Ahlfors-David 正则集都是拟 Ahlfors-David 正则的.

尽管拟 Ahlfors-David 正则性要远比 Ahlfors-David 正则性弱, 对于拟 Ahlfors-David s -正则集 A , 我们同样有

$$\dim_H A = \dim_P A = s.$$

绝大多数的分形是非正则的, 我们说一个分形 B 是非正则的, 如果

$$\dim_H B \neq \dim_P B,$$

即它的 Hausdorff 维数与 packing 维数不相等. 本文引入一种分形, 称为齐次分形, 它包含了所有的 (拟) Ahlfors-David 正则集及许多非正则的 Moran 集.

定义 1.4 度量空间 (X, d_X) 的紧子集 A 称为是齐次的, 如果存在一个支撑在 A 上的 Borel 测度 μ 满足

(1) 存在函数 $h_A: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, 满足 $0 < \liminf_{r \rightarrow 0} h_A(r) \leq \limsup_{r \rightarrow 0} h_A(r) < \infty$, 使得对于所有的 $x \in A$, 当 $r \rightarrow 0$ 时, 一致地有

$$\frac{\log \mu(B(x, r))}{h_A(r) \log r} \rightarrow 1; \quad (1.6)$$

(2) 对于任意的 $x \in A$, 当 $r, r' \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{\log \mu(B(x, r))}{\log \mu(B(x, r'))} \rightarrow 1 \Leftrightarrow \frac{\log r}{\log r'} \rightarrow 1. \quad (1.7)$$

注 1.5 在定义 1.4(2) 中, 我们说

$$\text{当 } r, r' \rightarrow 0 \text{ 时, } g(r, r') \rightarrow 1 \Leftrightarrow \bar{g}(r, r') \rightarrow 1,$$

如果对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得

$$\text{当 } \max(|g(r, r') - 1|, |r|, |r'|) < \eta \text{ 时, } |\bar{g}(r, r') - 1| < \epsilon;$$

$$\text{当 } \max(|\bar{g}(r, r') - 1|, |r|, |r'|) < \eta \text{ 时, } |g(r, r') - 1| < \epsilon.$$

注 1.6 当我们取 $h_A(r) \equiv s$ 时, 容易验证任意的 (拟) Ahlfors-David 正则集 A 都是齐次的. 另一方面, 如果 A 是齐次的, 且有 $\lim_{r \rightarrow 0} h_A(r) = s$, 那么 A 是拟 Ahlfors-David s -正则的.

例 1.7^[11] 给定一个有界闭区间 $J \subset \mathbb{R}^1$, 如果

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_1 n_2 \cdots n_k}{-\log c_1 c_2 \cdots c_k} = s \in (0, 1), \quad \sup_k n_k < \infty, \quad (1.8)$$

那么任意一个 Moran 集 $E \in \mathcal{M}(J, \{n_k\}, \{c_k\})$ 都是拟 Ahlfors-David s -正则的, 因而也是齐次的. 关于 Moran 集的详细内容, 参见第 3 节或者文献 [12].

对于齐次集 A , 我们将证明它满足许多性质, 这些性质只由 (1.6) 中的函数 h_A 决定. 我们称 h_A 是 A (上面支撑着测度 μ) 的一个尺度函数. 尽管由于支撑的测度不同等原因, 可能会得出不同的尺度函数, 我们将证明, 假设 h_A 是 A 的一个尺度函数, 那么 $\bar{h}_A$ 也是 A 的一个尺度函数, 当且仅当 $\lim_{r \rightarrow 0} h_A(r)/\bar{h}_A(r) = 1$ (引理 2.1.1).

定理 1.8 对于任意的齐次集 A , 有

$$\dim_H A = \underline{\dim}_B A = \liminf_{r \rightarrow 0} h_A(r), \quad \dim_P A = \overline{\dim}_B A = \limsup_{r \rightarrow 0} h_A(r).$$

令 $N(A, r)$ 表示覆盖集合 A 所需要的半径为 r 的球的最少个数, 那么 $\frac{\log N(A, r)}{-\log r}$ 是 A 的一个尺度函数.

假设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是度量空间, 紧子集 $A (\subset X)$ 和 $B (\subset Y)$ 分别是 Ahlfors-David s -正则的和 t -正则的. 如前文所述, Wang 和 Xi^[9] 证明了, 如果 A 和 B 是一致不连通的, 那么它们是拟 Lipschitz 等价的当且仅当 $s = t$. 我们说度量空间 X 的紧子集 A 是一致不连通的^[7], 如果存在常数 $0 < C < 1$ 使得对于任意的 $x \in A$, $0 < r < r^*$ (r^* 为某个大于 0 的常数), 存在集合 $E_{x,r} \subset A$ 满足

$$A \cap B(x, Cr) \subset E_{x,r} \subset B(x, r), \quad d(E_{x,r}, A \setminus E_{x,r}) > Cr, \quad (1.9)$$

这里 $d(A_1, A_2) = \inf_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2} d_X(x_1, x_2)$.

对于拟 Ahlfors-David 正则集, 在相对弱一些的分离条件下, 即如果 A 和 B 是拟一致不连通的情形下, Wang 和 Xi^[10] 得到了拟 Lipschitz 等价的充要条件.

定义 1.9 我们说度量空间 X 的紧子集 A 是拟一致不连通的, 如果存在一个函数 $\psi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, 对任意的 $r > 0$ 都有 $\psi(r) < r$ 且 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \psi(r)}{\log r} = 1$, 使得对于任意的 $x \in A$, $0 < r < r^*$ (r^* 是常数), 我们可以找到集合 $E_{x,r} \subset A$ 满足

$$A \cap B(x, \psi(r)) \subset E_{x,r} \subset B(x, r), \quad d(E_{x,r}, A \setminus E_{x,r}) > \psi(r). \quad (1.10)$$

在考虑两个 (拟) Ahlfors-David 正则集的等价性的时候, 有了上面的分离性条件, 正则性可以帮助我们构建所需要的映射. 那么我们怎么来考虑齐次分形之间的等价性呢? 乍看起来情况变得复杂了很多, 不过借助于尺度函数, 我们还是得到了下面的结果:

定理 1.10 假设拟一致不连通集合 $A (\subset X)$ 和 $B (\subset Y)$ 是齐次的, 那么 A 与 B 是拟 Lipschitz 等价的当且仅当

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_A(r)}{h_B(r)} = 1. \quad (1.11)$$

定理 1.11 齐次集 A 是拟一致不连通的, 如果存在 A 的一个尺度函数 h_A , 使得对某个 $\delta > 0$, 有

$$\sup_{0 < r < r' \leq \delta} \left| \frac{h_A(r) \log r - h_A(r') \log r'}{\log r - \log r'} \right| < 1. \quad (1.12)$$

注 1.12 假设 A 是拟 Ahlfors-David s - 正则的, 并且 $s < 1$. 在 (1.12) 中, 令 $h_A(r) \equiv s$, 则可以得出 A 是拟一致不连通的.

下面主要讨论 $\mathbb{R}^n$ 中的一类特殊的 Moran 集. 请在第 3 节中查看 Moran 集的详细内容.

定义 1.13 我们称 Moran 集 $E \in \mathcal{M}(J, \{n_k\}_k, \{c_k\}_k)$ 是缓变的, 如果

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log c_k}{\log c_1 c_2 \cdots c_{k-1}} = 0, \quad \inf_{k \geq 1} \frac{\log n_k}{-\log c_k} > 0. \quad (1.13)$$

给定缓变 Moran 集 $E \in \mathcal{M}(J, \{n_k\}_k, \{c_k\}_k)$, 令

$$g_E(r) = \frac{\log n_1 \cdots n_k}{-\log c_1 \cdots c_k}, \quad \text{如果 } c_1 \cdots c_k \leq \frac{r}{|J|} < c_1 \cdots c_{k-1}. \quad (1.14)$$

定理 1.14 任何缓变 Moran 集 E 都是齐次的, 且有一个尺度函数 g_E .

这个定理表明我们有很多的非正则的齐次分形, 例如, 满足下面不等式的缓变 Moran 集 $E \in \mathcal{M}(J, \{n_k\}_k, \{c_k\}_k)$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_1 \cdots n_k}{-\log c_1 \cdots c_k} < \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_1 \cdots n_k}{-\log c_1 \cdots c_k}. \quad (1.15)$$

由上面的定理, 我们有下面的定理:

定理 1.15 假设 $A \in \mathcal{M}(J, \{n_k\}_k, \{c_k\}_k)$ 和 $B \in \mathcal{M}(I, \{m_k\}_k, \{d_k\}_k)$ 是拟一致不连通的缓变 Moran 集, 那么它们是拟 Lipschitz 等价的当且仅当 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{g_A(r)}{g_B(r)} = 1$.

定理 1.16 一个缓变 Moran 集 $E \in \mathcal{M}(J, \{n_k\}_k, \{c_k\}_k)$ 是拟一致不连通的, 如果

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log c_k} < 1. \quad (1.16)$$

下面我们给一个简单的例子:

例 1.17 对所有的 k , 令 $c_k \equiv d_k \equiv \frac{1}{5}$, $n_k, m_k \in \{2, 3\}$. 记

$$a_k = \frac{\#\{i \leq k : n_i = 2\}}{k}, \quad b_k = \frac{\#\{i \leq k : m_i = 2\}}{k}.$$

由定理 1.16 可知, 缓变 Moran 集 $A \in \mathcal{M}([0, 1], \{n_k\}_k, \{c_k\}_k)$ 和 $B \in \mathcal{M}([0, 1], \{m_k\}_k, \{d_k\}_k)$ 是拟一致不连通的. 利用定理 1.15, 我们可以得出 A 和 B 是拟 Lipschitz 等价的当且仅当

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = 1.$$

本文结构如下: 第 2 节得到齐次分形的维数, 并且证明两个拟一致不连通的齐次集是拟 Lipschitz 等价的当且仅当它们有相同的尺度函数. 作为补充, 我们找到一个使得齐次分形是拟一致不连通的充分条件. 第 3 节用来将这些结果运用到定义 1.13 中定义的缓变 Moran 集上.

2 齐次分形

2.1 齐次分形的维数

跟其他的分形一样, 当我们定义了齐次集以后, 它们的分形维数是我们首先要考虑的问题. 我们将证明齐次集 A 的维数仅与尺度函数 h_A 有关.

在证明定理 1.8 之前, 我们首先要指出这些结果与测度 μ 和尺度函数 h_A 的选择无关. 事实上, 对于任意的齐次集 A , 令 $N(A, r)$ 表示覆盖 A 所需要的半径为 r 的球的最少个数, 令

$$f_A(r) = \frac{\log N(A, r)}{-\log r}. \quad (2.1)$$

引理 2.1.1 h_A 是 A 的尺度函数当且仅当

$$h_A \sim f_A. \quad (2.2)$$

对于函数 $f, g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, 我们记 $f \sim g$, 如果

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r)}{g(r)} = 1. \quad (2.3)$$

事实上, 对于任意的齐次集 A , 我们有

$$\{h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid h \text{ 是 } A \text{ 的一个尺度函数}\} = \{h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid h \sim f_A\}. \quad (2.4)$$

注 2.1.2 粗略地说, 引理 2.1.1 说明尺度函数 h_A 与测度 μ 的选择无关, 只与盒维数函数 f_A 有关. 确切地说, 我们有

$$\dim_H A = \underline{\dim}_B A = \liminf_{r \rightarrow 0} f_A(r), \quad \dim_P A = \overline{\dim}_B A = \limsup_{r \rightarrow 0} f_A(r).$$

在证明引理 2.1.1 之前, 我们给出一些预备知识, 这其中包含引理 2.1.3.

假设 A 是齐次的, 不失一般性, 我们假设 $|A| = 1$. 对于任意的 $x \in A$, $0 < r < 1$, 我们记

$$h_x(r) = \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r}. \quad (2.5)$$

令 $\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是一个非降的函数, 满足 $\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, 使得对于所有的 $x \in A$, $0 < r < 1$, 有

$$1 - \gamma(r) \leq \frac{h_x(r)}{h_A(r)} \leq 1 + \gamma(r). \quad (2.6)$$

令 $M(A, r)$ 表示中心在 A 上的半径为 r 的互不相交的球的最多个数.

引理 2.1.3 对于度量空间 X 中的任意紧子集 A , 我们有

$$N(A, 2r) \leq M(A, r) \leq N\left(A, \frac{r}{2}\right). \quad (2.7)$$

更进一步, 如果 A 是齐次的, 并且满足 (2.6), 那么,

$$N(A, r) \geq \mu(A)r^{-h_A(r)(1-\gamma(r))}, \quad M(A, r) \leq \mu(A)r^{-h_A(r)(1+\gamma(r))}, \quad (2.8)$$

这里 γ 如上文定义.

证明 只需要验证 (2.8). 由 (2.6) 和 $N(A, r)$ 的定义, 可得半径为 r 的球族 $\{B(x_i, r)\}_{i=1}^{N(A, r)}$ 使得 $A \subset \bigcup_{i=1}^{N(A, r)} B(x_i, r)$, 由此,

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{N(A, r)} \mu(B(x_i, r)) \leq N(A, r) r^{h_A(r)(1-\gamma(r))},$$

于是 $N(A, r) \geq \mu(A) r^{-h_A(r)(1-\gamma(r))}$.

另一方面, 我们可以得到一族互不相交的半径为 r 的球 $\{B(\bar{x}_i, r)\}_{i=1}^{M(A, r)}$, 满足对于所有的 i , 有 $\bar{x}_i \in A$, 由此,

$$\mu(A) \geq \sum_{i=1}^{M(A, r)} \mu(B(\bar{x}_i, r)) \geq M(A, r) r^{h_A(r)(1+\gamma(r))},$$

这意味着 $M(A, r) \leq \mu(A) r^{-h_A(r)(1+\gamma(r))}$. □

引理 2.1.1 的证明 假设 h_A 是一个尺度函数及测度 μ 使得 (2.6) 成立, 那么利用 (2.8), 我们可以得到

$$\frac{f_A(r)}{h_A(r)} = \frac{\log N(A, r)}{-h_A(r) \log r} \geq \frac{\log(\mu(A) r^{-h_A(r)(1-\gamma(r))})}{-h_A(r) \log r}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\log M(A, r)}{-h_A(r) \log r} \leq \frac{\log(\mu(A) r^{-h_A(r)(1+\gamma(r))})}{-h_A(r) \log r}. \quad (2.10)$$

同样地, 由 (2.8), 有 $0 < \mu(A) < \infty$, 这是由于 A 是紧集. 那么由 (2.7)、(2.9) 和 (2.10), 我们可以得出 $h_A \sim f_A$.

另一方面, 假设 A 是齐次的, 其上支撑的测度 μ 及尺度函数 h_A 满足 (1.6) 和 (1.7). 假设 $\bar{h}_A \sim f_A$, 那么 $\bar{h}_A \sim h_A$, 并且 (1.6) 和 (1.7) 对所有的 μ 和 $\bar{h}_A$ 都成立, 这意味着 $\bar{h}_A$ 也是 A 的一个尺度函数. 于是我们便可得到 (2.4).

定理 1.8 的证明 由分形维数的定义^[13, 14] 和 (2.1),

$$\dim_H A \leq \underline{\dim}_B A = \liminf_{r \rightarrow 0} f_A(r), \quad \dim_P A \leq \overline{\dim}_B A = \limsup_{r \rightarrow 0} f_A(r).$$

由引理 2.1.1, 我们只需要证明

$$\dim_H A \geq \liminf_{r \rightarrow 0} h_A(r), \quad \dim_P A \geq \limsup_{r \rightarrow 0} h_A(r).$$

对于任意的 $0 < s < \liminf_{r \rightarrow 0} h_A(r)$, 由 (2.6), 存在 $r_0 > 0$, 使得对于任意的 $x \in A$, $r \in (0, r_0)$,

$$\frac{\log \mu(B(x, r))}{(1 - \gamma(r_0)) \log r} \geq \frac{\log \mu(B(x, r))}{(1 - \gamma(r)) \log r} \geq h_A(r) > s.$$

那么对于任意满足 $A \cap U \neq \emptyset$ 及 $|U| \leq r_0$ 的子集 $U \subset X$, 有对任意的 $x \in A \cap U$,

$$\mu(U) \leq \mu(B(x, |U|)) \leq |U|^{s(1-\gamma(r_0))}.$$

通过标准的方法, 我们可以得出 $\dim_H A \geq \liminf_{r \rightarrow 0} h_A(r)$.

由于在紧度量空间 A 中 $5r$ - 覆盖定理仍然成立^[15, 定理 2.1], 我们仍然可以使用关于 packing 测度的 Frostman 引理, 因此, 我们有 $\dim_P A \geq \limsup_{r \rightarrow 0} h_A(r)$.

2.2 齐次分形间的拟 Lipschitz 等价

本小节将证明定理 1.10. 不失一般性, 我们总假设 $A = X, B = Y$.

必要性 确切地说, 我们将证明对于任意的齐次分形 A 和 B , 如果它们是拟 Lipschitz 等价的, 那么,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_A(r)}{h_B(r)} = 1.$$

由引理 2.1.1, 我们只需要证明 $f_A \sim f_B$.

由拟 Lipschitz 等价的定义, 我们可以找到一个双射 $f: A \rightarrow B$ 和一个非降函数 $\chi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 满足 $\lim_{r \rightarrow 0} \chi(r) = 0$, 使得对于任意的不同点对 $x_1, x_2 \in A$, 有

$$1 - \chi(d_X(x_1, x_2)) \leq \frac{\log d_Y(f(x_1), f(x_2))}{\log d_X(x_1, x_2)} \leq 1 + \chi(d_X(x_1, x_2)).$$

那么对于任意的 $x \in A, 0 < r \leq |A|$,

$$B(f(x), r^{1+\chi(r)}) \subset f(B(x, r)) \subset B(f(x), r^{1-\chi(r)}),$$

于是,

$$N(B, r^{1-\chi(r)}) \leq N(A, r) \leq N(B, r^{1+\chi(r)}).$$

这样一来, 我们有 $f_A \sim f_B$.

充分性 假设 $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{w_1 w_2 \cdots : \text{对于所有的 } i \geq 1, \text{ 有 } w_i \in \{0, 1\}\}$ 是一个符号空间, 上面装备着通常的度量: 对不同的点对 $x = w_1 w_2 \cdots, y = \omega_1 \omega_2 \cdots$, 有 $D(x, y) = 2^{-\min\{i \in \mathbb{N} : w_i \neq \omega_i\}}$. 给定两个词 $u = u_1 \cdots u_m, v = v_1 \cdots v_n$, 我们记

$$u * v = u_1 \cdots u_m v_1 \cdots v_n.$$

充分性证明之概要 为了证明充分性, 我们首先根据一个特殊的正数序列 $\{r_k\}_{k \geq 1}$ 得出 A 的一个分解. 这个序列满足对所有的 $k \geq 1$, 有 $r_{k+1} < \psi(r_k)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$, 这里 ψ 是拟一致不连通性定义中与 A 相关的函数. 根据 A 的分解, 我们得出 Σ 的一个对应的分解. 然后, 我们由它们的分解, 构造一个从 Σ 到 A 的双射 Φ . 再对 B 做同样的工作, 我们也可以得到一个双射 $\Psi: \Sigma \rightarrow B$. 那么 $\Psi \circ \Phi^{-1}: A \rightarrow B$ 就是我们所需要的拟 Lipschitz 映射.

第 1 步 选取序列 $\{r_k\}_{k \geq 1}$.

假设 ψ 是拟一致不连通性定义中与 A 相关的函数, h 是 A 的一个尺度函数, 满足对于所有的 $x \in A, 0 < r < 1$, 有

$$1 - \gamma(r) \leq \frac{h_x(r)}{h(r)} \leq 1 + \gamma(r), \quad (2.11)$$

这里 $h_x(r) = \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r}$, $\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是非降的函数满足 $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = 0$.

引理 2.2.1 存在正数序列 $\{r_k\}_{k \geq 1}$ 满足对所有的 $k \geq 1$, 有 $r_{k+1} < \psi(r_k)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$, 使得

- (1) 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\log r_{k-1}}{\log r_k} \rightarrow 1, \frac{k}{\log r_k} \rightarrow 0$;
- (2) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{k-1}}{\log r_k} = 0$, 这里

$$S_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} (h(\psi(r_i))(1 + \gamma(\psi(r_i))) \log \psi(r_i) - h(r_i)(1 - \gamma(r_i)) \log r_i). \quad (2.12)$$

证明 令

$$\alpha(r) = \left| \frac{h(\psi(r)) \log \psi(r)}{h(r) \log r} - 1 \right|, \quad \beta(r) = \sup_{0 < t \leq r} \frac{(1 + \gamma(\psi(t))) \log \psi(t)}{\log t} - 1,$$

那么 β 是非降的, 并且

$$\beta(r) \geq \frac{(1 + \gamma(\psi(r))) \log \psi(r)}{\log r} - 1 = \frac{\gamma(\psi(r)) \log \psi(r)}{\log r} + \frac{\log \psi(r)}{\log r} - 1 \geq \frac{\gamma(\psi(r)) \log \psi(r)}{\log r}. \quad (2.13)$$

利用 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \psi(r)}{\log r} = 1$, $\lim_{r \rightarrow 0} \gamma(r) = 0$, (1.6) 和 (1.7), 我们有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \alpha(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \beta(r) = 0.$$

取 $0 < R_0 < 1$ 足够小使得 $\alpha(R_0) + \beta(R_0) + \gamma(R_0) < 1$. 对所有的 $k \geq 0$, 令

$$R_{k+1} = R_k^{1 + \sqrt{\alpha(R_k) + \beta(R_k) + \gamma(R_k)}},$$

由于 $\{R_k\}_k$ 是单调下降的, 容易验证 $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = 0$.

对 $k \geq 1$, 令 $r_k = (R_k)^k$, $r_0 = R_0$, 那么当 $k \rightarrow \infty$ 时, 我们有

$$\frac{k}{\log r_k} = \frac{1}{\log R_k} \rightarrow 0, \quad \frac{\log r_{k-1}}{\log r_k} = \frac{(k-1) \log R_{k-1}}{k \log R_k} \rightarrow 1.$$

当 $k = 0$ 时, 有

$$r_1 = r_0^{1 + \sqrt{\alpha(R_0) + \beta(R_0) + \gamma(R_0)}} < r_0^{1 + \beta(R_0)} < \psi(r_0).$$

对于 $k \geq 1$, 由于 β 是非降的并且 $r_k < R_k$, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\log r_{k+1}}{\log r_k} &= \frac{(k+1)}{k} \cdot (1 + \sqrt{\alpha(R_k) + \beta(R_k) + \gamma(R_k)}) \\ &\geq 1 + \beta(R_k) \geq 1 + \beta(r_k) \\ &\geq (1 + \gamma(\psi(r_k))) \frac{\log \psi(r_k)}{\log r_k} \\ &> \frac{\log \psi(r_k)}{\log r_k}. \end{aligned}$$

于是, 对于所有的 $k \geq 0$, 我们有 $r_{k+1} < \psi(r_k)$.

由于 $\limsup_{r \rightarrow 0} h_A(r) < \infty$, 不失一般性, 我们假设对某个正常数 T , 有

$$\sup_{0 < r < R_0} h(r) < T. \quad (2.14)$$

由 (2.13) 和 (2.14), 我们可以得到

$$\begin{aligned} \left| \frac{S_{k-1}}{\log r_k} \right| &\leq \frac{\sum_{i=1}^{k-1} (h(r_i) \left| \frac{h(\psi(r_i)) \log \psi(r_i)}{h(r_i) \log r_i} - 1 \right| + \frac{h(\psi(r_i)) \gamma(\psi(r_i)) \log \psi(r_i)}{\log r_i} + h(r_i) \gamma(r_i)) \log r_i}{\log r_k} \\ &< T \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k-1} (\alpha(r_i) + \beta(r_i) + \gamma(r_i)) \log r_i}{\log r_k}. \end{aligned}$$

由 Stolz 定理, 我们可以推出

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{k-1} (\alpha(R_i) + \beta(R_i) + \gamma(R_i)) \log R_i}{\log R_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\alpha(R_k) + \beta(R_k) + \gamma(R_k)) \log R_k}{\log R_{k+1} - \log R_k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\alpha(R_k) + \beta(R_k) + \gamma(R_k)} = 0.\end{aligned}$$

那么当 $k \rightarrow \infty$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i=1}^{k-1} (\alpha(r_i) + \beta(r_i) + \gamma(r_i)) \log r_i}{\log r_k} &= \frac{\sum_{i=1}^{k-1} (\alpha(r_i) + \beta(r_i) + \gamma(r_i)) \cdot i \log R_i}{k \log R_k} \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^{k-1} (\alpha(r_i) + \beta(r_i) + \gamma(r_i)) \log R_i}{\log R_k} \rightarrow 0.\end{aligned}$$

因此 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{k-1}}{\log r_k} = 0$.

第 2 步 集合 A 的分解.

为了构造 A 的分解, 我们需要下述引理:

引理 2.2.2 [10, 引理 2.1] 假设 A 是一个紧的拟一致不连通的度量空间, ψ 是定义 1.9 中与 A 对应的函数. 如果 E 是 A 的紧子集, 满足对某个 $r > 0$ 有 $d(E, A \setminus E) > r$, 那么存在紧子集 $\{E_i\}_{i=1}^m$ 和互不相交的闭球族 $\{B(x_i, r)\}_{i=1}^m$, 满足

- (1) $E = \bigcup_{i=1}^m E_i$;
- (2) $d(E_i, E_j) > \psi(r)$ 对所有的 $i \neq j$ 都成立;
- (3) $x_i \in E$, $E \cap B(x_i, \psi(r)) \subset E_i \subset B(x_i, r)$ 对所有的 i 都成立.

注 2.2.3 假设 A 是齐次的, 对应的测度为 μ , 尺度函数为 h . 我们还假设 (2.11) 成立且 $h_A = h$. 在上面的引理中, 由于 $E = \bigcup_{i=1}^m E_i$, 那么,

$$\sum_{i=1}^m \mu(B(x_i, \psi(r))) \leq \mu(E) = \sum_{i=1}^m \mu(E_i) \leq \sum_{i=1}^m \mu(B(x_i, r)),$$

由此可以得出

$$\frac{\mu(E)}{r^{h(r)(1-\gamma(r))}} \leq m \leq \frac{\mu(E)}{(\psi(r))^{h(\psi(r))(1+\gamma(\psi(r)))}}. \quad (2.15)$$

假设 $\{r_k\}_{k \geq 1}$ 是一列正数, 满足对所有的 $k \geq 1$, 有 $r_{k+1} < \psi(r_k)$ 并且 $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$. 令 $\Lambda_0 = \{\emptyset\}$, 这里 $\emptyset$ 表示空词. 令 $E = A$, $r = r_1$, 利用引理 2.2.2, 我们可以得到紧子集族 $\{A_{i_1}\}_{i_1=1}^{m_A}$ 和互不相交的闭球族 $\{B(x_{i_1}, r_1)\}_{i_1=1}^{m_A}$, 满足

- (1) $A = \bigcup_{i_1=1}^{m_A} A_{i_1}$;
- (2) $d(A_{i_1}, A_{j_1}) > \psi(r_1) (> r_2)$ 对所有的 $i_1 \neq j_1$ 都成立;
- (3) $x_{i_1} \in A$, $A \cap B(x_{i_1}, \psi(r_1)) \subset A_{i_1} \subset B(x_{i_1}, r_1)$ 对所有的 i_1 都成立.

令 $m_\emptyset = m_A$, $\Lambda_1 = \{1, 2, \dots, m_\emptyset\}$. 当 $k \geq 2$ 时, 假设对于 $k-1$ 我们已经得到了紧子集族 $\{A_{i_1 \dots i_{k-1}}\}_{i_1 \dots i_{k-1} \in \Lambda_{k-1}}$ 以及互不相交的闭球族 $\{B(x_{i_1 \dots i_{k-1}}, r_{k-1})\}_{i_1 \dots i_{k-1} \in \Lambda_{k-1}}$. 由归纳假设, 我们可以对每个 $A_{i_1 \dots i_{k-1}}$ 做同样的工作, 这时取 $r = r_k$. 令 $\Lambda_k = \{i_1 \dots i_k : i_j \in \mathbb{N} \cap [1, m_{i_1 \dots i_{j-1}}] \text{ 对所有的 } 1 \leq j \leq k \text{ 都成立}\}$.

由于对所有的 $k \geq 1$ 都有 $r_{k+1} < \psi(r_k)$, 反复地利用引理 2.2.2, 我们便得到了 A 的分解. 即存在紧子集族 $A_{i_1 \dots i_k}$ 和闭球族 $B(x_{i_1 \dots i_k}, r_k)$ 及点族 $x_{i_1 \dots i_k}$, 使得对所有的 $k \geq 1$,

$$A = \bigcup_{i_1 \dots i_k \in \Lambda_k} A_{i_1 \dots i_k}, \quad d(A_{i_1 \dots i_{k-1} i_k}, A_{i_1 \dots i_{k-1} j_k}) > \psi(r_k) (> r_{k+1}) \text{ 如果 } i_k \neq j_k,$$

$$A_{i_1 \dots i_k i_{k+1}} \subset A_{i_1 \dots i_k}, \quad x_{i_1 \dots i_k} \in A_{i_1 \dots i_k}, \quad A \cap B(x_{i_1 \dots i_k}, \psi(r_k)) \subset A_{i_1 \dots i_k} \subset B(x_{i_1 \dots i_k}, r_k). \quad (2.16)$$

我们记 $\Lambda = \bigcup_{k \geq 0} \Lambda_k$. 由 (2.15) 和 $A \cap B(x_{i_1 \dots i_{k-1}}, \psi(r_{k-1})) \subset A_{i_1 \dots i_{k-1}} \subset B(x_{i_1 \dots i_{k-1}}, r_{k-1})$, 我们有

$$\frac{(\psi(r_{k-1}))^{h(\psi(r_{k-1}))(1+\gamma(\psi(r_{k-1})))}}{(r_k)^{h(r_k)(1-\gamma(r_k))}} \leq m_{i_1 \dots i_{k-1}} \leq \frac{(r_{k-1})^{h(r_{k-1})(1-\gamma(r_{k-1}))}}{(\psi(r_k))^{h(\psi(r_k))(1+\gamma(\psi(r_k)))}}. \quad (2.17)$$

假设 $p_{i_1 \dots i_{k-1}}$ 是满足

$$2^{p_{i_1 \dots i_{k-1}}} < m_{i_1 \dots i_{k-1}} \leq 2^{1+p_{i_1 \dots i_{k-1}}} \quad (2.18)$$

的整数, 那么,

$$\frac{(\psi(r_{k-1}))^{h(\psi(r_{k-1}))(1+\gamma(\psi(r_{k-1})))}}{2(r_k)^{h(r_k)(1-\gamma(r_k))}} \leq 2^{p_{i_1 \dots i_{k-1}}} < 2^{1+p_{i_1 \dots i_{k-1}}} \leq \frac{2(r_{k-1})^{h(r_{k-1})(1-\gamma(r_{k-1}))}}{(\psi(r_k))^{h(\psi(r_k))(1+\gamma(\psi(r_k)))}}. \quad (2.19)$$

第 3 步 符号空间 Σ 的分解.

对应于 A 的分解, 我们给出 Σ 的分解. 令 $\Sigma_\emptyset = \Sigma$, $l_\emptyset = 0$. 我们用 $\pi_1, \dots, \pi_{2^{p_\emptyset}}$ 来记 $\{0, 1\}^{p_\emptyset}$ 中所有的词. 那么词

$$\pi_1 * 0, \pi_1 * 1, \dots, \pi_m * 0, \pi_m * 1, \pi_{m+1}, \dots, \pi_{2^{p_\emptyset}}$$

给出了 $m_\emptyset$ 个柱集, 这些柱集的并是 Σ , 这里 $m = m_\emptyset - 2^{p_\emptyset}$.

我们用 $\{\Sigma_{i_1}\}_{i_1 \in \Lambda_1}$ 来表示这些柱集, 长度分别记为 $\{l_{i_1}\}_{i_1 \in \Lambda_1}$. 容易验证

- (1) $l_{i_1} = p_\emptyset$ 或者 $1 + p_\emptyset$ 对所有的 $1 \leq i_1 \leq m_\emptyset$ 都成立;
- (2) $D(\Sigma_{i_1}, \Sigma_{j_1}) \geq 2^{-(1+p_\emptyset)}$ 对所有的 $i_1 \neq j_1$ 都成立.

当 $k \geq 2$ 时, 与前面相同, 归纳假设对 $k-1$, 我们已经得到柱集族 $\{\Sigma_{i_1 \dots i_{k-1}}\}_{i_1 \dots i_{k-1} \in \Lambda_{k-1}}$, 它们的长度分别为 $\{l_{i_1 \dots i_{k-1}}\}_{i_1 \dots i_{k-1} \in \Lambda_{k-1}}$. 我们再对每个柱集 $\Sigma_{i_1 \dots i_{k-1}}$, 这里 $i_1 \dots i_{k-1} \in \Lambda_{k-1}$, 做同样的工作, 便可以得到 $m_{i_1 \dots i_{k-1}}$ 个柱集 $\Sigma_{i_1 \dots i_{k-1} i_k}$, 它们的长度分别为 $l_{i_1 \dots i_{k-1} i_k}$, 并且满足

- (1) $\Sigma_{i_1 \dots i_{k-1}} = \bigcup_{i_k=1}^{m_{i_1 \dots i_{k-1}}} \Sigma_{i_1 \dots i_{k-1} i_k}$;
- (2) $D(\Sigma_{i_1 \dots i_{k-1} i_k}, \Sigma_{i_1 \dots i_{k-1} j_k}) \geq 2^{-l_{i_1 \dots i_{k-1}} - (1+p_{i_1 \dots i_{k-1}})}$, 如果 $i_k \neq j_k$;
- (3) $l_{i_1 \dots i_{k-1} i_k} - l_{i_1 \dots i_{k-1}} = p_{i_1 \dots i_{k-1}}$ 或者 $1 + p_{i_1 \dots i_{k-1}}$.

这样便得到了 Σ 的分解. 即存在柱集族 $\Sigma_{i_1 \dots i_k}$, 长度分别为 $l_{i_1 \dots i_k}$, 使得对于所有的 $k \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} \Sigma &= \bigcup_{i_1 \dots i_k \in \Lambda_k} \Sigma_{i_1 \dots i_k}, \quad D(\Sigma_{i_1 \dots i_{k-1} i_k}, \Sigma_{i_1 \dots i_{k-1} j_k}) \geq 2^{-l_{i_1 \dots i_{k-1}} - (1+p_{i_1 \dots i_{k-1}})} \quad \text{如果 } i_k \neq j_k, \\ \Sigma_{i_1 \dots i_k i_{k+1}} &\subset \Sigma_{i_1 \dots i_k}, \quad l_{i_1 \dots i_{k-1} i_k} - l_{i_1 \dots i_{k-1}} = p_{i_1 \dots i_{k-1}} \quad \text{或者 } 1 + p_{i_1 \dots i_{k-1}}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

第 4 步 构造从 Σ 到 A 的双射.

由 A 和 Σ 的分解, 我们可以构建一个双射 $\Phi: \Sigma \rightarrow A$.

令 Λ^∞ 为无限词 $i_1 \dots i_k \dots$ 的集合, 这里对所有的 k , $i_1 \dots i_k \in \Lambda_k$. 对任意的 $i_1 \dots i_k \dots \in \Lambda^\infty$, 令 $x_{i_1 \dots i_k} \dots \in A$, $w_{i_1 \dots i_k} \dots \in \Sigma$ 使得

$$\{x_{i_1 \dots i_k} \dots\} = \bigcap_{k \geq 1} A_{i_1 \dots i_k}, \quad \{w_{i_1 \dots i_k} \dots\} = \bigcap_{k \geq 1} \Sigma_{i_1 \dots i_k}.$$

自然地, 我们可以得到一个从 Σ 到 A 的双射 Φ , 使得对任意的 $i_1 \dots i_k \dots \in \Lambda^\infty$,

$$\Phi(w_{i_1 \dots i_k} \dots) = x_{i_1 \dots i_k} \dots$$

我们将证明对于任意给定的不同的点对 $z_1, z_2 \in \Sigma$, 当 $D(z_1, z_2) \rightarrow 0$ 时, 一致地有

$$\frac{h(d(\Phi(z_1), \Phi(z_2))) \log d(\Phi(z_1), \Phi(z_2))}{\log D(z_1, z_2)} \rightarrow 1.$$

假设 $i_1 \cdots i_{k-1}$ ($k \geq 1$) 是使得 $A_{i_1 \cdots i_{k-1}}$ 同时包含 $\Phi(z_1)$ 和 $\Phi(z_2)$ 的最长的词, 那么我们有 $\Phi(z_1) \in A_{i_1 \cdots i_{k-1} i_k}$, $\Phi(z_2) \in A_{i_1 \cdots i_{k-1} j_k}$, 并且 $i_k \neq j_k$. 这里当 $D(z_1, z_2) \rightarrow 0$ 时, 一致地有 $k \rightarrow \infty$. 由 (2.19) 和 (2.20), 我们可以得出

$$\begin{aligned} D(z_1, z_2) &\geq 2^{-l_{i_1 \cdots i_{k-1}} - (1+p_{i_1 \cdots i_{k-1}})} = 2^{-(1+p_{i_1 \cdots i_{k-1}}) - (l_{i_1 \cdots i_{k-1}} - l_{i_1 \cdots i_{k-2}}) - \cdots - (l_{i_1} - l_{\emptyset}) - l_{\emptyset}} \\ &\geq \prod_{i=1}^k \frac{(\psi(r_i))^{h(\psi(r_i))(1+\gamma(\psi(r_i)))}}{2(r_{i-1})^{h(r_{i-1})(1-\gamma(r_{i-1})))}}. \end{aligned}$$

同样地, 我们也可得到

$$D(z_1, z_2) \leq 2^{-l_{i_1 \cdots i_{k-1}}} \leq \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2(r_i)^{h(r_i)(1-\gamma(r_i))}}{(\psi(r_{i-1}))^{h(\psi(r_{i-1}))(1+\gamma(\psi(r_{i-1})))}}. \quad (2.21)$$

那么,

$$I \leq \log D(z_1, z_2) \leq II, \quad (2.22)$$

这里

$$\begin{aligned} I &= h(\psi(r_k))(1 + \gamma(\psi(r_k))) \log \psi(r_k) - h(r_0)(1 - \gamma(r_0)) \log r_0 - k \log 2 + S_{k-1}, \\ II &= h(r_{k-1})(1 - \gamma(r_{k-1})) \log r_{k-1} - h(\psi(r_0))(1 + \gamma(\psi(r_0))) \log \psi(r_0) + (k-1) \log 2 - S_{k-2}, \end{aligned}$$

这里 S_t 如 (2.12) 中所定义.

由于

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log r_k}{\log r_{k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \psi(r_k)}{\log r_k} = 1,$$

利用 (1.6) 和 (1.7), 我们有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(r_k) \log r_k}{h(r_{k-1}) \log r_{k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(r_k) \log r_k}{h(\psi(r_k)) \log \psi(r_k)} = 1. \quad (2.23)$$

将引理 2.2.1 和 (2.23) 运用到 I 和 II 中, 我们有: 当 $D(z_1, z_2) \rightarrow 0$ 时, 一致地有

$$\frac{\log D(z_1, z_2)}{h(r_k) \log r_k} \rightarrow 1. \quad (2.24)$$

由 (2.16) 可以得到

$$\psi(r_k) \leq d(\Phi(z_1), \Phi(z_2)) \leq |A_{i_1 \cdots i_{k-1}}| \leq |B(x_{i_1 \cdots i_{k-1}}, r_{k-1})| \leq 2r_{k-1},$$

这说明, 当 $D(z_1, z_2) \rightarrow 0$ 时, 一致地有

$$\frac{\log d(\Phi(z_1), \Phi(z_2))}{\log r_k} \rightarrow 1. \quad (2.25)$$

利用 (1.6)、(1.7)、(2.24) 和 (2.25), 我们有当 $D(z_1, z_2) \rightarrow 0$ 时, 一致地有

$$\frac{h(d(\Phi(z_1), \Phi(z_2))) \log d(\Phi(z_1), \Phi(z_2))}{\log D(z_1, z_2)} \rightarrow 1.$$

第 5 步 构造从 A 到 B 的双射.

由上文, 我们得到一个双射 $\Phi: (\Sigma, D) \rightarrow (A, d_A)$, 满足当 $D(z_1, z_2) \rightarrow 0$ 时, 一致地有

$$\frac{h(d_A(\Phi(z_1), \Phi(z_2))) \log d_A(\Phi(z_1), \Phi(z_2))}{\log D(z_1, z_2)} \rightarrow 1. \quad (2.26)$$

同样地, 我们可以构造一个双射 $\Psi: (\Sigma, D) \rightarrow (B, d_B)$, 满足当 $D(z_1, z_2) \rightarrow 0$ 时, 一致地有

$$\frac{h(d_B(\Psi(z_1), \Psi(z_2))) \log d_B(\Psi(z_1), \Psi(z_2))}{\log D(z_1, z_2)} \rightarrow 1. \quad (2.27)$$

那么, 由 (2.26) 和 (2.27), 我们有当 $d_A(\Phi(z_1), \Phi(z_2)) \rightarrow 0$ 时, 一致地有

$$\frac{h(d_B(\Psi(z_1), \Psi(z_2))) \log d_B(\Psi(z_1), \Psi(z_2))}{h(d_A(\Phi(z_1), \Phi(z_2))) \log d_A(\Phi(z_1), \Phi(z_2))} \rightarrow 1$$

这样的话, 由 (1.6) 和 (1.7) 可以得出当 $d_A(\Phi(z_1), \Phi(z_2)) \rightarrow 0$ 时, 一致地有

$$\frac{\log d_B(\Psi(z_1), \Psi(z_2))}{\log d_A(\Phi(z_1), \Phi(z_2))} \rightarrow 1.$$

从而由 A 到 B 的自然的双射 $\Psi \circ \Phi^{-1}$ 是拟 Lipschitz 的. 这样我们便证明了充分性. $\square$

2.3 拟一致不连通性

本小节将证明定理 1.11. 由于 $\limsup_{r \rightarrow 0} h_A(r) < \infty$, 不失一般性, 假设对某个正常数 T , 有

$$\sup_{0 < r < 1} h(r) < T.$$

令 $\varrho(r) = T \cdot \gamma(r)$, 那么对所有的 $x \in A$, $0 < r < 1$, 有

$$h(r) - \varrho(r) \leq h_x(r) = \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \leq h(r) + \varrho(r).$$

给定 $x \in A$ 和足够小的 r , 令

$$B_i = B(x, ir^{1+\theta(r)}) \setminus B(x, (i-1)r^{1+\theta(r)}), \quad B_0 = \{x\},$$

这里

$$\theta(r) = \sqrt{\max \left(\varrho(r), \frac{\log 12}{-\log r} \right)}.$$

那么当 $r \rightarrow 0$ 时, 有

$$\frac{\varrho(r)}{\theta(r)}, \frac{1}{\theta(r)} \cdot \frac{\log 12}{-\log r} \rightarrow 0. \quad (2.28)$$

记 $n_r = [r^{-\theta(r)}]/2$, 这里 $[z]$ 表示 z 的整数部分. 注意到当 $r \rightarrow 0$ 时, $n_r \rightarrow \infty$.

引理 2.3.1 假设 r 足够小, 那么存在 $1 \leq i \leq n_r$ 使得 $B_i \cap A$ 是空集.

证明 不然的话, 假设对于所有的 $1 \leq i \leq n_r$, 都有 $B_i \cap A$ 非空. 假设 $y_i \in B_i \cap A$, 那么,

$$\mu(B(y_i, r^{1+\theta(r)})) \geq r^{(1+\theta(r))(h(r^{1+\theta(r)})+\varrho(r))},$$

这是因为 $\varrho(r) \geq \varrho(r^{1+\theta(r)})$.

通过文献 [7] 中同样地方法, 我们可以得出

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} r^{-\theta(r)} \cdot r^{(1+\theta(r))(h(r^{1+\theta(r)})+\varrho(r))} &\leq n_r r^{(1+\theta(r))(h(r^{1+\theta(r)})+\varrho(r))} \leq \sum_{i \leq n_r} \mu(B(y_i, r^{1+\theta(r)})) \\ &\leq \sum_{i \leq n_r} \mu(B_{i-1} \cup B_i \cup B_{i+1}) \leq 3 \sum_{i \leq n_r+1} \mu(B_i) \leq 3\mu(B(x, r)) \\ &\leq 3r^{(h(r)-\varrho(r))}. \end{aligned}$$

由此可以推出

$$r^{[(1+\theta(r))(h(r^{1+\theta(r)})+\varrho(r))-\theta(r)]} \leq 12r^{(h(r)-\varrho(r))}.$$

这样一来,

$$(1+\theta(r))(h(r^{1+\theta(r)})+\varrho(r))-\theta(r) \geq \frac{\log 12}{\log r} + (h(r)-\varrho(r)),$$

这就是

$$\frac{(1+\theta(r))h(r^{1+\theta(r)})-h(r)}{\theta(r)} + \frac{(2+\theta(r))\varrho(r)}{\theta(r)} - 1 \geq \frac{1}{\theta(r)} \cdot \frac{\log 12}{\log r}. \quad (2.29)$$

利用条件 (1.12), 对所有的足够小的 r , 我们有: 存在某个常数 $\tau \in (0, 1)$, 使得

$$\left| \frac{(1+\theta(r))h(r^{1+\theta(r)})-h(r)}{\theta(r)} \right| \leq 1-\tau.$$

由 (2.28), 我们可以得到

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{(2+\theta(r))\varrho(r)}{\theta(r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\theta(r)} \cdot \frac{\log 12}{\log r} = 0,$$

然后由 (2.29), 我们便得到了矛盾. $\square$

取 $\psi(r) = r^{1+\theta(r)}$, 这里当 $r \rightarrow 0$ 时, $\theta(r) \rightarrow 0$. 如果对某个 $1 \leq i \leq n_r$, 有 $B_i \cap A$ 非空, 我们取 $E_{x,r} = A \cap B(x, (i-1)\psi(r))$, 则有

$$A \cap B(x, \psi(r)) \subset E_{x,r} \subset B(x, r), \quad d(E_{x,r}, A \setminus E_{x,r}) > \psi(r).$$

这便证明了定理 1.11. $\square$

3 在 Moran 集上的应用

Moran 集类, 最初由 Moran^[16] 开始研究, 它提供了给我们丰富的齐次分形的例子. 我们回顾一下这类分形的一些概念.

假设 $J \subset \mathbb{R}^n$ 是一个内部非空的紧集. $\{n_k\}_{k \geq 1}$ 是一列正整数, $\{c_k\}_{k \geq 1}$ 是一列正实数, 满足对所有的 $k \geq 1$, 有 $n_k \geq 2$, $c_k \in (0, 1)$. 对任意的正整数 k , 令 $\Omega_k = \{i_1 \cdots i_k : 1 \leq i_j \leq n_j \text{ 对所有的 } 1 \leq j \leq k \text{ 都成立}\}$, 它是一个正整数序列组成的词的集合. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意两个子集 A 和 B , 我们说 A 与 B 相似, 且相似比为 $r > 0$, 如果存在相似映射 S , 其相似比为 r , 使得 $A = S(B)$.

假设存在 $J_1, J_2, \dots, J_{n_1} \subset J$, 它们与 J 相似且相似比为 c_1 , 并且它们内部互不相交. 归纳地假设, 对于任意的 $i_1 \cdots i_{k-1} \in \Omega_{k-1}$, 存在 $J_{i_1 \cdots i_{k-1}1}, J_{i_1 \cdots i_{k-1}2}, \dots, J_{i_1 \cdots i_{k-1}n_k} \subset J_{i_1 \cdots i_{k-1}}$, 它们与 $J_{i_1 \cdots i_{k-1}}$ 相似且相似比为 c_k , 并且它们内部互不相交. 那么,

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i_1 \cdots i_k \in \Omega_k} J_{i_1 \cdots i_k}$$

称作一个 Moran 集. 我们记为 $E \in \mathcal{M}(J, \{c_k\}_k, \{n_k\}_k)$.

注 3.1 很多经典的自相似集都是 Moran 集, 如 Cantor 三分集、Sierpinski 地毯和 Koch 曲线. 我们只需要令 $c_k \equiv \frac{1}{3}$, 然后分别取 J 为 $[0, 1]$ 和 $[0, 1]^2$ 以及合适的三角形, 便可得到它们的 Moran 结构. 更一般的结构, 参见 Wen 的论文 [12].

3.1 缓变 Moran 集是齐次的

给定 $\mathbb{R}^n$ 中一个缓变 Moran 集 $E \in \mathcal{M}(J, \{n_k\}_k, \{c_k\}_k)$, 对于长为 k 的词 $\sigma = i_1 \cdots i_k \in \Omega_k$, 我们记 $J_\sigma = J_{i_1 \cdots i_k}$ 为一个 k 阶基本元. 跟通常一样, 我们考虑 E 上面支撑的 Moran 测度^[17], 也就是 E 上面的一个自然的质量分布 μ , 使得每个 k 阶基本元 $J_{i_1 \cdots i_k}$ 的质量为 $(n_1 \cdots n_k)^{-1}$. 不失一般性, 我们假设 $|J| = 1$. 令 $c_0 = 1, n_0 = 1$.

令 $\mathcal{L}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上面的 Lebesgue 测度, $\text{int}(\cdot)$ 表示集合的内部. 由于 J_σ 与 J 相似, 对于 $\sigma \in \Omega_k$, 有

$$\mathcal{L}(\text{int}(J_\sigma)) = (c_1 \cdots c_k)^n \mathcal{L}(\text{int}(J)). \quad (3.1)$$

对于任意的词 $i_1 \cdots i_{k-1} \in \Omega_{k-1}$, 不交并

$$\bigcup_{i_k=1}^{n_k} \text{int}(J_{i_1 \cdots i_{k-1} i_k}) \subset \text{int}(J_{i_1 \cdots i_{k-1}}).$$

由此可以得出

$$\sum_{i_k=1}^{n_k} \mathcal{L}(\text{int}(J_{i_1 \cdots i_{k-1} i_k})) \leq \mathcal{L}(\text{int}(J_{i_1 \cdots i_{k-1}})).$$

将 (3.1) 代入到上面的公式中, 我们可以得到对于所有的 $k \geq 1$, 有

$$n_k c_k^n \leq 1. \quad (3.2)$$

注意到 $n_k \geq 2, 0 < c_k < 1$, 这样对于所有的 $k \geq 1$, 我们有

$$0 < c_k < \frac{1}{\sqrt[n]{2}}. \quad (3.3)$$

定理 1.14 的证明 为了定义方便, 对于 $k' > k$, 我们令

$$\begin{aligned} C_k &= c_1 \cdots c_k, & N_k &= n_1 \cdots n_k, \\ C_{k,k'} &= c_{k+1} \cdots c_{k'}, & N_{k,k'} &= n_{k+1} \cdots n_{k'}. \end{aligned}$$

(1) 由 (3.2), 对于所有的 $k \geq 1$, 有

$$\frac{\log n_k}{-\log c_k} \leq n. \quad (3.4)$$

这样一来,

$$0 < \inf_{k \geq 1} \frac{\log n_k}{-\log c_k} \leq \liminf_{r \rightarrow 0} g_E(r) \leq \limsup_{r \rightarrow 0} g_E(r) \leq n < \infty. \quad (3.5)$$

任意给定 $x \in A$, $0 < r < 1$, 假设对于某个 $k \geq 1$, 有 $C_k \leq r < C_{k-1}$, 那么球 $B(x, r)$ 中至少包含一个 k 阶基本元. 注意到任意与 $B(x, r)$ 相交的 k 阶基本元都被包含在球 $B(x, r + C_k)$ 中, 并且所有的 k 阶基本元的内部是互不相交的, 这样的话与 $B(x, r)$ 相交的 k 阶基本元的个数不会超过

$$\frac{\mathcal{L}(B(x, r + C_k))}{\mathcal{L}(\text{int}J) \cdot (C_k)^n} \leq \frac{\mathcal{L}(B(0, 1))(2r)^n}{\mathcal{L}(\text{int}J)(C_k)^n}.$$

于是,

$$\frac{1}{N_k} \leq \mu(B(x, r)) \leq \frac{\mathcal{L}(B(0, 1))(2r)^n}{\mathcal{L}(\text{int}J)(C_k)^n} \cdot \frac{1}{N_k}. \quad (3.6)$$

由于

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log c_k}{\log C_{k-1}} = 0,$$

我们有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log r}{\log C_k} = 1. \quad (3.7)$$

令 $k \rightarrow \infty$, 由 (3.6), 当 $r \rightarrow 0$ 时, 一致地有

$$\frac{\log \mu(B(x, r))}{g_E(r) \log r} \rightarrow 1. \quad (3.8)$$

(2) 不失一般性, 我们假设

$$C_k \leq r < C_{k-1}, \quad C_{k'} \leq r' < C_{k'-1}.$$

由 (3.7) 和 (3.9), 我们只需要证明当 $k, k' \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{\log N_{k'}}{\log N_k} \rightarrow 1 \Leftrightarrow \frac{\log C_{k'}}{\log C_k} \rightarrow 1,$$

即当 $k, k' \rightarrow \infty$ ($k' > k$) 时,

$$\frac{\log N_{k,k'}}{\log N_k} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{\log C_{k,k'}}{\log C_k} \rightarrow 0. \quad (3.9)$$

利用 (3.4) 和

$$\inf_{k \geq 1} \frac{\log n_k}{-\log c_k} > 0,$$

我们有: 存在某个常数 $C > 0$, 使得

$$\begin{aligned} C^{-1} |\log C_{k,k'}| &\leq \log N_{k,k'} \leq C |\log C_{k,k'}|, \\ C^{-1} |\log C_k| &\leq \log N_k \leq C |\log C_k|. \end{aligned}$$

这样一来,

$$C^{-2} \left| \frac{\log C_{k,k'}}{\log C_k} \right| \leq \left| \frac{\log N_{k,k'}}{\log N_k} \right| \leq C^2 \left| \frac{\log C_{k,k'}}{\log C_k} \right|,$$

于是便可得到 (3.9). □

3.2 定理 1.16 的证明

为证明定理 1.16, 我们需要构造一个新的尺度函数 g . 不妨假设 $|J| = 1$. 对每个 k , 令 $C_k = c_1 \cdots c_k$. 给定 $C_k \leq r \leq C_{k-1}$, 我们可以挑选出唯一的一个 $t \in [0, 1]$ 使得

$$\log r = t \log C_k + (1 - t) \log C_{k-1}.$$

我们定义

$$g(r) = \frac{tg_E(C_k) \log C_k + (1 - t)g_E(C_{k-1}) \log C_{k-1}}{\log r}, \quad (3.10)$$

其中

$$g_E(C_k) = \frac{\log n_1 \cdots n_k}{-\log c_1 \cdots c_k}.$$

对于所有的 k , 我们有

$$g(C_k) = g_E(C_k).$$

我们将证明 $g \sim g_E$. 事实上, 假设 $C_k \leq r \leq C_{k-1}$, 我们有

$$\log C_k \leq \log r \leq \log C_{k-1}. \quad (3.11)$$

由齐次分形的定义以及当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $\frac{\log C_k}{\log C_{k-1}} \rightarrow 1$ 的事实, 我们有

$$\frac{g_E(C_k) \log C_k}{g_E(C_{k-1}) \log C_{k-1}} \rightarrow 1. \quad (3.12)$$

由 (3.10) 可知, $g(r) \log r$ 在以 $g_E(C_k) \log C_k$ 和 $g_E(C_{k-1}) \log C_{k-1}$ 为端点的区间上取值. 由 (3.11) 和 (3.12), 我们可以得到

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{g_E(r)}{g(r)} = 1,$$

即 $g \sim g_E$. 记

$$\nu(r, r') = \frac{g(r) \log r - g(r') \log r'}{\log r - \log r'}.$$

这里令 $\frac{0}{0} = 0$. 由定理 1.11, 我们只需要说明存在 $\delta > 0$, 使得

$$\sup_{0 < r < r' \leq \delta} |v(r, r')| < 1.$$

对任意的 $0 < r \leq \bar{r} \leq r'$, 我们有

$$|v(r, r')| \leq \max(|v(r, \bar{r})|, |v(\bar{r}, r')|).$$

利用

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log n_i}{-\log c_i} < 1$$

这个事实, 对于所有的 $k' > k$, 我们有

$$|v(C_k, C_{k'})| = \frac{\log N_{k'} - \log N_k}{-\log C_{k'} + \log C_k} = \frac{\log N_{k,k'}}{-\log C_{k,k'}}.$$

这样的话, 对足够小的 $\varepsilon > 0$, 存在 m 使得

$$\sup_{k, k' \geq m} |v(C_k, C_{k'})| \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log n_i}{-\log c_i} + \varepsilon < 1.$$

记

$$\kappa = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log n_i}{-\log c_i} + \varepsilon < 1.$$

对 $0 < r < r' \leq r_{m+1}$, 我们分为两种不同的情形:

情形 1 如果对于某个 k' , 有 $r \leq C_{k'} \leq r'$, 我们注意到

$$|v(r, r')| \leq \max(|v(r, C_{k'})|, |v(C_{k'}, r')|).$$

假设 $C_k \leq r \leq C_{k-1}$, 我们可以得出

$$\begin{aligned} |v(r, C_{k'})| &= \left| \frac{t \cdot g(C_k) \log C_k + (1-t)g(C_{k-1}) \log C_{k-1} - g(C_{k'}) \log C_{k'}}{t \log C_k + (1-t) \log C_{k-1} - \log C_{k'}} \right| \\ &\leq \max(|v(C_k, C_{k'})|, |v(C_{k-1}, C_{k'})|) \leq \kappa. \end{aligned}$$

同样地, 我们有 $|v(C_{k'}, r')| \leq \kappa$.

情形 2 如果对于某个 k , 有 $C_k \leq r < r' \leq C_{k-1}$, 假设

$$\log r = t \log C_k + (1-t) \log C_{k-1}, \quad \log r' = t' \log C_k + (1-t') \log C_{k-1},$$

我们有

$$|v(r, r')| = \left| \frac{(t-t')(g(C_k) \log C_k - g(C_{k-1}) \log C_{k-1})}{(t-t')(\log C_k - \log C_{k-1})} \right| = |v(C_k, C_{k-1})| \leq \kappa.$$

这样我们便证明了定理 1.16. □

致谢 作者对审稿人的有益建议深表感谢.

参考文献

- 1 Mattila P, Saaranen P. Ahlfors-David regular sets and bilipschitz maps. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 2009, 34: 487–502
- 2 Llorente M, Mattila P. Lipschitz equivalence of subsets of self-conformal sets. *Nonlinearity*, 2010, 23: 875–882
- 3 Xi L F. Lipschitz equivalence of dust-like self-similar sets. *Math Z*, 2010, 266: 683–691
- 4 Deng J, Wen Z Y, Xiong Y, et al. Bilipschitz embedding of self-similar sets. *J Anal Math*, 2011, 114: 63–97
- 5 Falconer K J, Marsh D T. On the Lipschitz equivalence of Cantor sets. *Mathematika*, 1992, 39: 223–233
- 6 Cooper D, Pignataro T. On the shape of Cantor sets. *J Differential Geom*, 1998, 28: 203–221
- 7 David G, Semmes S. *Fractured Fractals and Broken Dreams: Self-similar Geometries Through Metric and Measure*. New York: Oxford University Press, 1997
- 8 Xi L F. Quasi-Lipschitz equivalence of fractals. *Israel J Math*, 2007, 160: 1–21
- 9 Wang Q, Xi L F. Quasi-Lipschitz equivalence of Ahlfors-David regular sets. *Nonlinearity*, 2011, 24: 941–950
- 10 Wang Q, Xi L F. Quasi-Lipschitz equivalence of quasi Ahlfors-David regular sets. *Sci China Math*, 2011, 54: 2573–2582
- 11 Li H, Wang Q, Xi L F. Classification of Moran fractals. *J Math Anal Appl*, 2011, 378: 230–237
- 12 Wen Z Y. Moran sets and Moran classes. *Chin Sci Bull*, 2001, 46: 1849–1856
- 13 Falconer K J. Dimensions and measures of quasi self-similar sets. *Proc Amer Math Soc*, 1989, 106: 543–554
- 14 Tricot C. Two definitions of fractional dimension. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 1982, 91: 57–74
- 15 Mattila P. *Geometry of Sets and Measure in Euclidean Spaces*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995

- 16 Moran P A. Additive functions of intervals and Hausdorff measure. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1946, 42: 15–23
17 Cawley R, Mauldin R D. Multifractal decompositions of Moran fractals. Adv Math, 1992, 92: 196–236

Homogeneous sets and their quasi-Lipschitz equivalence

LV Fan, LOU ManLi & XI LiFeng

Abstract We define and study a class of homogeneous fractals, including all (quasi) Ahlfors-David regular sets and many irregular Moran sets. We say a fractal is irregular if its Hausdorff dimension is not equal to packing dimension. For homogeneous fractals, we obtain their fractal dimensions and give a necessary and sufficient condition for two homogeneous fractals to be quasi-Lipschitz equivalent, and then we apply these results to irregular Moran sets.

Keywords fractal, homogeneity, regularity, Moran set, quasi-Lipschitz equivalence

MSC(2010) 28A80

doi: 10.1360/012014-25