论文

空间磁悬浮系统的耦合动力学模型及线性化

李新峰*, 张涛

中国科学院空间应用工程与技术中心, 北京 100094

* E-mail: lixinfeng@csu.ac.cn

收稿日期: 2016-01-13; 接受日期: 2016-04-12; 网络出版日期: 2016-06-24

摘要 利用洛伦兹力的电磁悬浮控制在地面及空间的主动隔振控制中得到了广泛应用, 已有的研究与应用大多基于浮子加定子的形式, 假设定子质量特性远大于浮子且不受控制的反作用及其他耦合作用, 对浮子进行六自由度建模及控制. 对载荷质量特性与平台质量特性相当的情况, 系统将不再具有定子与浮子的形式, 成为具有耦合作用的两个六自由度运动的物体, 耦合作用表现在控制的反作用、相对运动产生的感生电流与磁场相互作用两个方面. 本文尝试推导了载荷及平台相对任意各自参考点的耦合运动模型, 包括载荷运动、平台相对运动的耦合动力学方程, 并基于平动及转动的小位移及小速度假设, 对非线性方程进行了线性化处理, 便于用线性控制器进行反馈控制, 数值实例表明在一定时段内线性化模型的结果与原模型保持一致.

关键词 主动隔振控制, 洛伦兹力电磁作动器, 欧拉角转序, 磁通密度

1 引言

磁悬浮系统通常是指利用电磁形式实现平台与载荷的非接触连接, 国外 20 世纪磁悬浮主动控制系统已有了较为广泛研究与应用^[1~3], 磁悬浮主动隔振控制的研究及应用开拓到交通^[3~5]、土木^[6]等领域. 在空间领域, 为隔离航天飞机、空间站等大型航天器自身的振动, 国外不同的机构先后进行了多种尝试^[7], 如载荷级主动控制隔振 STABLE^[8], 加拿大的 MIM^[9], 空间站手套箱内的减振装置 g-LIMIT^[10], 得到了在轨验证及应用. 在主动隔振控制的浮子多自由度运动及动力学模型方面, Ludwick^[11]对地基磁悬浮台采用了简化的仅有加速度与力关系的六自由度模型设计

了全状态反馈, Nurre 等人^[12]、Hampton 等人^[10]、Kim 等人^[13]分别对 STABLE 和 g-LIMIT 的浮子相对定子的平动及转动建立了六自由度运动学模型, 并在各自的模型基础上进行线性化近似, 线性化后的系统具有了状态空间模型的线性形式, Rupert 等人^[14]与 Beech 等人^[15]采用 Kane 动力学方法对中间减振器的弹性等环节分别建模, 为波音公司的 ARIS 整柜磁悬浮隔振系统建立了整柜级的非线性动力学模型; 近年来随着国内空间站工程的进展, 李宗峰等人^[16]基于浮子的六自由度运动结合其设计的系统布局建立了模型, 王琪琳^[17]结合系统建立具有 1 个转动自由度及 2 个平动自由度的三自由度运动悬浮系统, 对于搭建的类似 g-LIMIT 布局的系统, 考虑了执行元件的刚

引用格式: 李新峰, 张涛. 空间磁悬浮系统的耦合动力学模型及线性化. 中国科学: 技术科学, 2016, 46: 757-766

Li X F, Zhang T. Coupled dynamics and linearization of electromagnetic suspension system in orbit (in Chinese). Sci Sin Tech, 2016, 46: 757-766, doi: 10.1360/N092016-00028

度响应. 已有的模型特点是忽略定子的耦合作用, 这是因为定子固接在大型航天器平台上, 其质量特性远大于浮子或浮子上的载荷, 不考虑与定子或平台的耦合作用是适用的.

随着航天器平台技术快速发展, 平台集成密度逐步提高, 具有推力器、动量轮等激励部件的航天器平台质量与载荷特性相当, 不再远大于浮子或载荷设备的质量, 甚至如詹姆斯-韦伯空间望远镜, 数倍于平台质量. 已有的定子浮子形式的主动隔振控制动力学不足以反应新的情况. 对于载荷与平台的相互作用的影响, Wu 等人^[18,19]提出了在空间用磁悬浮实现载荷与平台稳定控制概念. 刘磊^[20]结合 Steward 六杆台的主动隔振应用, 采用四元数作为各自的状态向量, 将反作用作为各自的干扰输入, 进行了光学载荷及卫星平台各自指向控制的仿真; 磁悬浮系统若应用于质量相当的空间条件下的平台、载荷隔振控制系统, 需考虑其间的相互耦合作用, 耦合表现在两个方面: 1) 电磁作动器主动控制时, 平台会受到控制的反作用及反向运动; 2) 两者存在相对运动时, 在各电磁作动器作用处, 导线切割磁力线时产生的感生电流对载荷及平台有方向相反的力作用.

本文采用牛顿欧拉法, 尝试建立载荷运动、平台相对载荷运动的耦合动力学模型, 并进行线性化近似处理, 便于采用现代控制理论实现两个耦合运动体的联合控制.

2 坐标系及变量定义

定义以下坐标系.

1) 载荷坐标系 Σ : 其原点定义在载荷上的任选参考点(如光学载荷中心或微重力敏感的测量点), 3 个坐标轴定义在载荷本体上;

2) 平台坐标系 Ω : 其原点定义在平台上的参考点(如对称结构中心或质心等), 3 个坐标轴定义在平台本体上;

3) 目标坐标系 Π : 3 轴指向为惯性指向, 为后续线性化方便, 该坐标系原点为系统无外力干扰时的运动参考点.

如图 1 所示, 多边形表示平台, 与平台有关的物理量下角标带有“2”; 圆柱代表载荷, 与载荷有关的物理量用下角标“1”, 将平台与载荷左右分置示意, 中间的虚线框内示意非接触的洛伦兹力电磁作动器, 磁铁结构(也称磁轭)安装在载荷上形成磁场, 导线部分安装在平台上. 作动器相关磁场及导线物理量的下角标“ k ”代表多个电磁或平台作动器的任一个. 不同矢量表达为坐标基矢与对应黑体符号表示的坐标列向量的内积, 如载荷位置矢量 $\vec{r}_1 = \Pi \mathbf{r}_1$. 目标坐标系中载荷参考点的位置矢量为 $\vec{r}_1$, 从载荷参考点到载荷质心的矢量为 $\vec{r}_{c1}$, 载荷坐标系到目标坐标系转换对应 3 个欧拉角构成的列矩阵向量为 θ_1 , 相对目标坐标系的角速度矢量为 $\vec{\omega}_1$. 与以上定义对应, 目标坐标系中平台坐标系的参考点位置、质心相对位置、欧拉角及角速度分别为 $\vec{r}_2$, $\vec{r}_{c2}$, θ_2 及 $\vec{\omega}_2$.

根据欧拉角定义, 从载荷坐标系到目标坐标系、从平台坐标系到目标坐标系的旋转矩阵为

$$\Sigma \triangleq \Pi T_{01}(\theta_1), \quad (1)$$

$$\Omega \triangleq \Pi T_{02}(\theta_2). \quad (2)$$

图 1 (网络版彩图)平台与载荷坐标系及位置关系定义示意图

从平台坐标系到载荷坐标系的旋转变换矩阵为

$$\mathbf{T}_{12}(\boldsymbol{\theta}_A) = \mathbf{T}_{01}^T \mathbf{T}_{02}, \quad (3)$$

式中, $\boldsymbol{\theta}_A$ 是由平台坐标系到载荷坐标系的欧拉角. 若欧拉角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 采用 XYZ 的转序, 则该转序下角变率 $(\dot{\theta}_x \ \dot{\theta}_y \ \dot{\theta}_z)^T$ 与角速度 $(\omega_x \ \omega_y \ \omega_z)^T$ 的分量表示关系为

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\cos \theta_y} \begin{bmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z \cos \theta_y & \cos \theta_z \cos \theta_y & 0 \\ -\sin \theta_z \cos \theta_y & \sin \theta_z \sin \theta_y & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

3 耦合动力学模型

3.1 载荷的运动

3.1.1 载荷平动模型

平动仍以载荷的质心运动建立平动模型, 目标坐标系中载荷的质心位置矢量为

$$\vec{r}_{cm1} = \vec{r}_1 + \vec{r}_{c1} = \Pi \mathbf{r}_1 + \Xi \mathbf{r}_{c1}. \quad (5)$$

载荷坐标系下质心分量不变, 则依据动坐标系求导法则, 对应的载荷质心惯性速度矢量为

$$\dot{\vec{r}}_{cm1} = \dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_{c1} = \Pi \dot{\mathbf{r}}_1 + \Xi \dot{\omega}_1 \times \Xi \mathbf{r}_{c1}. \quad (6)$$

载荷质心的惯性加速度矢量为

$$\ddot{\vec{r}}_{cm1} = \Pi \ddot{\mathbf{r}}_1 + \Xi \dot{\omega}_1 \times \Xi \mathbf{r}_{c1} + \Xi \omega_1 \times \Xi \omega_1 \times \Xi \mathbf{r}_{c1}. \quad (7)$$

则动力学方程表达为

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_{cm1} = \sum_k \vec{f}_k + \vec{f}_{12} + \vec{w}_{f1}, \quad (8)$$

式中, $\vec{f}_k$ 与 $\vec{w}_{f1}$ 分别为作用在载荷上电磁作动器控制输入及外部干扰力, $\vec{w}_{f1}$ 定义在目标坐标系中, m_1 为载荷的质量, $\vec{f}_{12}$ 为平台载荷相对运动在电磁作动器感生电流产生的相互作用力对载荷的影响. 矢量形式为

$$\begin{aligned} & m_1 \Pi \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_1 \Xi \dot{\omega}_1 \times \Xi \mathbf{r}_{c1} + m_1 \Xi \omega_1 \times \Xi \omega_1 \times \Xi \mathbf{r}_{c1} \\ &= \sum_k \Xi \mathbf{f}_k + \Xi \mathbf{f}_{12} + \Pi \mathbf{w}_{f1}. \end{aligned} \quad (9)$$

若电磁作动器永磁的磁通密度为 $\vec{b}_k$, 导线作为功率元件安装在较大功耗的平台上, 对应磁场内导

线匝数为 n_k , 在磁场内的等效单匝长度 λ_k , 导线通路电导为 γ_k , $\vec{q}_k$ 为作动器的磁场内有效直导线对应的单位矢量, 若电磁作动器(中心磁场区)在载荷上的电压力系数矢量记为 $\vec{c}_k$, 表达成分量形式为

$$\mathbf{c}_k = n_k \lambda_k \gamma_k \mathbf{b}_k^\times \mathbf{T}_{12} \mathbf{q}_k, \quad (10)$$

式中, $\times$ 表示矢量分量的叉乘矩阵. 定义按编号顺序排列的电磁作动器整体力系数矩阵为

$$\mathbf{C}_f^\eta \triangleq [\dots \ \mathbf{c}_k]. \quad (11)$$

记电磁作动器的控制电压为 u_k , 按作动器号顺序排列的列向量记为 $\boldsymbol{\eta}$,

$$\boldsymbol{\eta} \triangleq [\dots \ u_k]^T. \quad (12)$$

将(7), (10)及(12)式代入(8)式得到载荷的目标坐标系平动方程:

$$\begin{aligned} & m_1 \mathbf{T}_{01}^T \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_1 \omega_1 \times \mathbf{r}_{c1} \\ &= \mathbf{C}_f^\eta \boldsymbol{\eta} + \mathbf{T}_{10} \mathbf{f}_{12} - m_1 \omega_1 \times \omega_1 \times \mathbf{r}_{c1} + \mathbf{w}_{f1}. \end{aligned} \quad (13)$$

3.1.2 载荷转动模型

若载荷围绕其质心的惯量张量为 $\vec{J}_1$, 则在载荷坐标系中, 载荷相对其质心的角动量为

$$\vec{h}_1 = \vec{J}_1 \vec{\omega}_1 = \Xi \mathbf{J}_1 \Xi \cdot \Xi \omega_1. \quad (14)$$

若各力作动点相对参考点的位置矢量为 $\vec{l}_k$, 外部的干扰力矩为 $\vec{w}_{t1}$, 内、外体之间的耦合运动干扰力矩为 $\vec{t}_{12}$, 则其角动量变化

$$\dot{\vec{h}}_1 = \sum_k (\vec{l}_k - \vec{r}_{c1}) \times \vec{f}_k + \vec{t}_{12} + \vec{w}_{t1}, \quad (15)$$

则动力学形式

$$\begin{aligned} & \Xi \mathbf{J}_1 \Xi \cdot \Xi \omega_1 + \Xi \omega_1 \times \Xi \mathbf{J}_1 \Xi \cdot \Xi \omega_1 \\ &= \Xi \sum_k (\mathbf{l}_k - \mathbf{r}_{c1}) \times \Xi \mathbf{f}_k + \Xi \mathbf{t}_{12} + \Pi \mathbf{w}_{t1}. \end{aligned} \quad (16)$$

与(11)式的安装定义类似, 在作动器的安装位置, 定义与每个力臂矢量 $\mathbf{l}_k - \mathbf{r}_{c1}$ 相关的力矩矢量为

$$(\mathbf{l}_k - \mathbf{r}_{c1})^\times \mathbf{c}_k^i,$$

电磁作动器的“电压力矩系数矩阵”为

$$\mathbf{C}_t^\eta \triangleq [\dots \ (\mathbf{l}_k - \mathbf{r}_{c1})^\times \mathbf{c}_k]. \quad (17)$$

代入(16)式, 得到的动力学形式为

$$\mathbf{J}_1 \omega_1 + \omega_1 \times \mathbf{J}_1 \omega_1 = \mathbf{C}_t^\eta \boldsymbol{\eta} + \mathbf{t}_{12} + \mathbf{T}_{01}^T \mathbf{w}_{t1}. \quad (18)$$

联立平动运动(13)式与转动运动(18)式得:

$$\begin{bmatrix} m_1 \mathbf{T}_{01}^T & -m_1 \mathbf{r}_{c1}^\times \\ 0 & \mathbf{J}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_f^\eta \boldsymbol{\eta} + \mathbf{w}_{f1} + \mathbf{T}_{01} \mathbf{f}_{12} - m_1 \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{c1} \\ \mathbf{C}_t^\eta \boldsymbol{\eta} + \mathbf{t}_{12} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_1 \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{T}_{01}^T \mathbf{w}_{t1} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

3.2 平台相对载荷的运动方程

3.2.1 平动相对运动

建立平台的相对运动模型, 首先定义初始相对零位, 定义载荷与平台零位时平台参考点相对载荷参考点的位置矢量为 $\bar{\mathbf{r}}_{2/1}$, 在载荷坐标系中作为常矢量, 平台的相对运动位移为 $\bar{\rho}_2$, 平台质量 m_2 , 平台质心位置矢量为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}_2 + \bar{\mathbf{r}}_{c2} &= \bar{\mathbf{r}}_1 + \bar{\mathbf{r}}_{2/1} + \bar{\rho}_2 + \bar{\mathbf{r}}_{c2} \\ &= \Pi \mathbf{r}_1 + \Xi (\mathbf{r}_{2/1} + \rho_2) + \Omega \mathbf{r}_{c2}. \end{aligned} \quad (20)$$

求导后的质心的平动速度、平动加速度分别为

$$\begin{aligned} \Pi \dot{\mathbf{r}}_2 + \Omega \dot{\omega}_2 \times \Omega \mathbf{r}_{c2} \\ = \Pi \dot{\mathbf{r}}_1 + \Xi \dot{\omega}_2 + \Xi \boldsymbol{\omega}_1 \times \Xi (\mathbf{r}_{2/1} + \omega_2) \\ + \Omega \boldsymbol{\omega}_1 \times \Omega \mathbf{r}_{c2}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Pi \ddot{\mathbf{r}}_2 + \Omega \ddot{\omega}_2 \times \Omega \mathbf{r}_{c2} + \Omega \dot{\omega}_2 \times \Omega \omega_2 \times \Omega \mathbf{r}_{c2} \\ = \Pi \ddot{\mathbf{r}}_1 + \Xi \ddot{\rho}_2 + \Xi 2\boldsymbol{\omega}_1 \times \Xi \dot{\rho}_2 \\ + \Xi \boldsymbol{\omega}_1 \times \Xi \boldsymbol{\omega}_1 \times \Xi (\mathbf{r}_{2/1} + \rho_2) \\ + \Xi \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \Xi (\mathbf{r}_{2/1} + \rho_2) \\ + \Omega \dot{\omega}_2 \times \Omega \mathbf{r}_{c2} + \Omega \dot{\omega}_2 \times \Omega \omega_2 \times \Omega \mathbf{r}_{c2}. \end{aligned} \quad (22)$$

如果平台的控制力(如推力器)为 $\bar{\mathbf{j}}_k$, 其作用点相对平台参考点的位置矢量为 $\mathbf{d}_k$, 在平台参考系为常矢量, 定义由各作动器幅值按顺序排列的控制输入列向量:

$$\boldsymbol{\xi} \triangleq [\dots \mathbf{j}_k]^\top. \quad (23)$$

定义平台坐标系内各作动器单位矢 $\hat{\mathbf{j}}_k$ 按相同顺序排列的力及力矩安装矩阵:

$$\mathbf{C}_f^\xi \triangleq [\dots \hat{\mathbf{j}}_k], \quad (24)$$

$$\mathbf{C}_t^\xi \triangleq [\dots (\mathbf{d}_k - \mathbf{r}_{c2})^\times \hat{\mathbf{j}}_k]. \quad (25)$$

平台的受力分为3个部分: 不同位置平台控制力 $\bar{\mathbf{j}}_k$; 电磁作动器对控制的反力 $-\bar{\mathbf{f}}_k$, 相互运动耦合的反力 $-\bar{\mathbf{f}}_{12}$ 以及环境干扰力 $\bar{\mathbf{w}}_{f2}$. 在载荷坐标系中, 将

(22)式得到的加速度表达成动力学形式:

$$\begin{aligned} m_2 \mathbf{T}_{01}^T \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\rho}_2 + m_2 2\boldsymbol{\omega}_1 \times \dot{\rho}_2 \\ + m_2 \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{r}_{2/1} + \rho_2) \\ - m_2 (\mathbf{r}_{2/1} + \rho_2)^\times \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \\ + m_2 \mathbf{T}_{12} (\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \mathbf{r}_{c2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{c2}) \\ = \mathbf{T}_{12} \mathbf{C}_f^\xi \boldsymbol{\xi} - \mathbf{C}_f^\eta \boldsymbol{\eta} - \mathbf{f}_{12} + \mathbf{T}_{01}^T \mathbf{w}_{f2}. \end{aligned} \quad (26)$$

3.2.2 相对转动方程

在平台参考系建立质心转动模型, 得到的结果与(18)式形式相同; 仅需在相对欧拉角基础上定义相对转动角速度:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_{21} = \bar{\boldsymbol{\omega}}_2 - \bar{\boldsymbol{\omega}}_1. \quad (27)$$

代入角速率关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_2 (\mathbf{T}_{12}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}) + (\mathbf{T}_{12}^T \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21}) \times \mathbf{J}_2 (\mathbf{T}_{12}^T \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21}) \\ = \mathbf{C}_t^\xi \boldsymbol{\xi} - \mathbf{T}_{12}^T \mathbf{C}_t^\eta \boldsymbol{\eta} - \mathbf{t}_{12} + \mathbf{T}_{01}^T \mathbf{w}_{t1}. \end{aligned} \quad (28)$$

将平台的平动相对运动(26)式与转动相对运动(28)式进行合并:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_2 \mathbf{T}_{01}^T & -m_2 (\mathbf{r}_{c2} + \mathbf{r}_{2/1})^\times \\ 0 & \mathbf{J}_2 \mathbf{T}_{12}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} m_2 \mathbf{I} & -m_2 \mathbf{T}_{12} \mathbf{r}_{c2}^\times \\ 0 & \mathbf{J}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\rho}_2 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} m_2 2\boldsymbol{\omega}_1^\times \dot{\rho}_2 + m_2 \boldsymbol{\omega}_1^\times \boldsymbol{\omega}_1^\times (\mathbf{r}_{2/1} + \rho_2) - m_2 \rho_2^\times \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} m_2 \mathbf{T}_{12} (\mathbf{T}_{12}^T \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21})^\times (\mathbf{T}_{12}^T \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21})^\times \mathbf{r}_{c2} \\ (\mathbf{T}_{12}^T \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21})^\times \mathbf{J}_2 (\mathbf{T}_{12}^T \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21}) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{12} \mathbf{C}_f^\xi \boldsymbol{\xi} - \mathbf{C}_f^\eta \boldsymbol{\eta} - \mathbf{f}_{12} + \mathbf{T}_{01}^T \mathbf{w}_{f2} \\ \mathbf{C}_t^\xi \boldsymbol{\xi} - \mathbf{T}_{12}^T \mathbf{C}_t^\eta \boldsymbol{\eta} - \mathbf{t}_{12} + \mathbf{T}_{01}^T \mathbf{w}_{t1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (29)$$

3.3 相对运动的电磁耦合模型

若 k 号洛伦兹力作动器磁场内等效单匝长度为 q_k , 导线匝数仍为 n_k , 导线总电导为 γ_k , 电流为 i_k , 的电感为 L_k , 导线正切割速度为 $\dot{\mathbf{r}}_{12/k}$, 电压 u_k 为

$$u_k = \frac{i_k}{\gamma_k} + L \frac{di_k}{dt} + b_k n_k q_k \cdot \dot{\mathbf{r}}_{12/k}. \quad (30)$$

当电流正交于磁场时, 产生的洛伦兹力 $\mathbf{f}_k$ 为

$$\mathbf{f}_k = b_k n_k q_k \cdot \dot{\mathbf{r}}_k. \quad (31)$$

通常电感作用的时间特性与带负载的机械运动

系统的时间特性差3~4个量级^[6],可忽略电感的影响,导线的洛伦兹力为

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{b}_k n_k q_k (\mathbf{u}_k \gamma_k - \mathbf{b}_k n_k q_k \gamma_k \dot{\mathbf{r}}_{12/k}). \quad (32)$$

因此洛伦兹力由控制驱动部分电压及感生电压的作用组成.在矢量表示的情况下,需要将模型扩展到三维问题.闭合线圈在磁场内的运动表达为

$$\dot{\mathbf{r}}_{12/k} = \bar{\omega}_{21} \times \bar{\mathbf{l}}_k + \dot{\mathbf{p}}_2. \quad (33)$$

与上节定义相同,磁场内导线单位方向为 $\bar{\mathbf{q}}_k$.这里引入将电流约束在导线束的“约束张量”:

$$\bar{\mathbf{S}}_{q/k} \triangleq \bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{q}}_k \bar{\mathbf{q}}_k, \quad (34)$$

式中, $\bar{\mathbf{I}}$ 为单位张量.相对运动感生电压产生的安培力为

$$\bar{\mathbf{f}}_{21/k} = \gamma_k (n_k \lambda_k)^2 (\bar{\mathbf{S}}_{q/k} \dot{\mathbf{r}}_{12/k}) \times (\bar{\mathbf{S}}_{q/k} \bar{\mathbf{b}}_k) \times \bar{\mathbf{b}}_k. \quad (35)$$

其反力分量表达式为

$$\mathbf{f}_{12/k} = -\gamma_k (n_k \lambda_k)^2 \mathbf{b}_k^\times (\mathbf{T}_{12} \mathbf{S}_{q/k} \mathbf{T}_{12}^\top \mathbf{b}_k)^\times \{ \mathbf{T}_{12} \mathbf{S}_{q/k} \mathbf{T}_{12}^\top [\omega_{21} \times \mathbf{l}_k + \dot{\mathbf{p}}_2] \}. \quad (36)$$

相应感生电流耦合力的力矩表达为

$$\mathbf{t}_{12/k} = (\mathbf{l}_k - \mathbf{r}_{c1})^\times \mathbf{f}_{12/k}. \quad (37)$$

则动力学模型(29)式中出现的相对运动耦合作用力及力矩为各作动器耦合作用(36)及(37)式的矢量和.

4 系统模型的线性化

洛伦兹力作动器的永磁的磁体之间空隙的磁通密度随磁隙距离的增大而快速下降,因此电磁作动器的行程通常不大洛伦兹力形式的电磁作动器^[21-23]单向行程通常在10 mm左右,平台及载荷的速度、角速度也较小,因此假设载荷的六自由度运动及平台相对载荷的六自由度运动为小幅运动是复合实际情况的,可基于小角度、小角速度及小相对位移的条件对模型进行线性化.与航天器姿态运动^[24,25]处理类似,也可以对载荷运动(19)式、平台相对运动(29)式及耦合作用(36)与(37)式进行线性化,线性化模型利于实现稳定性分析同时也便于利用线性控制理论的结果实现对系统的控制.

小角度位移时转换矩阵的近似为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_{01} &\approx \mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_1^\times; \\ \mathbf{T}_{02} &\approx \mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_2^\times; \\ \mathbf{T}_{12} &\approx \mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_\Delta^\times = \mathbf{I} - (\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_1)^\times. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

角速度的近似为

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_1 &\approx \dot{\boldsymbol{\theta}}_1, \\ \boldsymbol{\omega}_2 &\approx \dot{\boldsymbol{\theta}}_2, \\ \boldsymbol{\omega}_{21} &\approx \dot{\boldsymbol{\theta}}_2 - \dot{\boldsymbol{\theta}}_1. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

除此之外,相对平移 $\mathbf{p}_2$ 及相对速度 $\dot{\mathbf{p}}_2$ 也分别作为一阶小量.将小角度条件(38)式代入电磁力系数矢量(10)式,忽略控制电压 $\boldsymbol{\eta}$ 与相对状态 $\boldsymbol{\theta}_\Delta$ 的高阶小量耦合,得到近似后的常力系数:

$$\mathbf{c}_k \approx n_k \lambda_k \mathbf{b}_k^\times \mathbf{q}_k. \quad (40)$$

类似处理,近似条件代入耦合力(36)式并忽略相对状态 $\boldsymbol{\theta}_\Delta$ 与 $\boldsymbol{\omega}_{21}$ 及 $\dot{\mathbf{p}}_2$ 的高阶耦合,得到线性相对运动耦合力表达为

$$\mathbf{f}_{12/k} = -\gamma_k (n_k \lambda_k)^2 \mathbf{b}_k^\times (\mathbf{S}_{q/k} \mathbf{b}_k)^\times \times \mathbf{S}_{q/k} \left[\mathbf{I} - \mathbf{I}_k^\times \right] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_\Delta \end{bmatrix}, \quad (41)$$

式中,约束张量 $\mathbf{S}_{q/k}$ 近似为定常张量.将小角度近似(38)式、小角速度近似(39)式代入到载荷运动方程(19),该方程近似为

$$\begin{bmatrix} m_1 & -m_1 \mathbf{r}_{c1}^\times \\ 0 & \mathbf{J}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_1 \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_f^\eta \\ \mathbf{C}_t^\eta \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_f^{\text{tran}} & \mathbf{C}_f^{\text{rot}} \\ \mathbf{C}_t^{\text{tran}} & \mathbf{C}_t^{\text{rot}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_\Delta \end{bmatrix}, \quad (42)$$

式中,分块矩阵为耦合系数矩阵,耦合系数矩阵的右上角标“tran”及“rot”分别表示与平移及转动有关,右下角标“f”及“t”分别表示与力及力矩有关,耦合力及力矩的分块系数矩阵分别为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}_f^{\text{tran}} &= -\sum_k \gamma_k (n_k \lambda_k)^2 \mathbf{b}_k^\times (\mathbf{S}_{q/k} \mathbf{b}_k)^\times \mathbf{S}_{q/k}; \\ \mathbf{C}_f^{\text{rot}} &= -\sum_k \gamma_k (n_k \lambda_k)^2 \mathbf{b}_k^\times (\mathbf{S}_{q/k} \mathbf{b}_k)^\times \mathbf{S}_{q/k} \mathbf{I}_k^\times; \\ \mathbf{C}_t^{\text{tran}} &= \sum_k \gamma_k (n_k \lambda_k)^2 \mathbf{b}_k^\times (\mathbf{S}_{q/k} \mathbf{b}_k)^\times \mathbf{S}_{q/k} \mathbf{I}_k^\times; \\ \mathbf{C}_t^{\text{rot}} &= \sum_k \gamma_k (n_k \lambda_k)^2 (\mathbf{l}_k - \mathbf{r}_{c1})^\times \mathbf{b}_k^\times (\mathbf{S}_{q/k} \mathbf{b}_k)^\times \mathbf{S}_{q/k} \mathbf{I}_k^\times. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

代入平台相对运动方程(29)式,并忽略该式左侧后两项的非线性高阶小项:

$$\begin{bmatrix} m_2 & -m_2 (\mathbf{r}_{c2} + \mathbf{r}_{2/1})^\times \\ 0 & \mathbf{J}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_2 \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2 \mathbf{I} & -m_2 \mathbf{r}_{c2}^\times \\ 0 & \mathbf{J}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}}_2 \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_f^\xi \\ \mathbf{C}_t^\xi \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_f^\eta \\ \mathbf{C}_t^\eta \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_f^{\text{tran}} & \mathbf{C}_f^{\text{rot}} \\ \mathbf{C}_t^{\text{tran}} & \mathbf{C}_t^{\text{rot}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_\Delta \end{bmatrix}. \quad (44)$$

将载荷的线性化运动(42)式左侧广义质量矩阵

求逆, 可得到载荷加速度及角加速度, 并代入到(44)式中, 得到平台相对运动方程:

$$\begin{bmatrix} m_2 \mathbf{I} & -m_2 \mathbf{r}_{c2}^\times \\ 0 & \mathbf{J}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}}_2 \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_f^\xi \\ \mathbf{C}_t^\xi \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} -\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) m_2 (\mathbf{r}_{2/1} + \mathbf{r}_{c2} - \mathbf{r}_{c1})^\times \mathbf{J}_1^{-1} \\ 0 & -(\mathbf{I} + \mathbf{J}_2 \mathbf{J}_1^{-1}) \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{C}_f^\eta \\ \mathbf{C}_t^\eta \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_f^{\text{tran}} & \mathbf{C}_f^{\text{rot}} \\ \mathbf{C}_t^{\text{tran}} & \mathbf{C}_t^{\text{rot}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \end{bmatrix} \right\}, \quad (45)$$

式中, 等式右侧第二项的耦合系数矩阵, 平台获得的反向相对运动体现在质量特性因子 $\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)$ 及 $(\mathbf{I} + \mathbf{J}_2 \mathbf{J}_1^{-1})$ 的耦合, 以及非对角上的转动平动耦合上, 若平台质量特性远大于载荷的质量特性时, 两者的反作用耦合退化, 耦合矩阵的主对角元退化为负单位矩阵, 仅存在参考点的选取造成的平动、转动耦合特性上. 至此得到了全系统的线性化模型: 由载荷运动(42)式及平台相对载荷运动(45)式构成.

5 实例模型及对比分析

本文设定了1个磁悬浮载荷及平台的实例, 载荷与平台各30 kg, 惯量阵对角阵主元素为0.5 kg m²的对角阵, 几何中心为载荷及平台的控制参考点, 具有大的质心偏差, 载荷及平台质心相对各自参考点分别为[50,50,50], [50,50,50] mm.

4个两维的电磁作动器如图2所示, 分布在载荷的四周外切圆上, 其磁场方向分别坐标系的±X轴及±Y轴, 通过控制电压极性大小, 各方向能够输出正负电磁力; 磁场中心距离载荷原点假设均为200

图2 (网络版彩图)电磁作动器位置关系示意图

mm, 磁通密度均为0.2 T, 二维作动器的磁场内线圈单匝长度30 mm, 每维各有200匝, 零位时正垂直于磁场.

初始条件设定如下. 在目标坐标系中, 载荷参考点的初始位置[30,30,30] mm, 三轴姿态角为: [1,1,1]°, 平移速率[0.2,0.2,0.2] mm/s, 角速率为[1.7,1.7,1.7]×10⁻³ rad/s; 平台相对载荷相对位移: [10,10,10] mm, 相对角度[5.1°,4.9°,5.1°], 设定的相对运动速度[1,1,1] mm/s, 相对角速度[7.9,9.6,7.9]×10⁻³ rad/s. 将以上设置及初始条件分别代入由(19), (29)式表达的非线性系统及由(42), (45)式表达的线性系统进行数值积分.

由于两者在同一尺度的图上基本重叠难以辨别, 下文仅给出了非线性模型的曲线及两者的比较曲线. 载荷状态结果如图3所示, 线性模型与非线性模型比较载荷状态的差如图4所示.

非线性模型平台相对运动状态如图5所示, 线性模型与非线性模型比较的平台相对运动状态差如图6所示.

从结果对比可以看出, 线性模型与非线性模型在小角度及小角速度条件下, 载荷运动及平台相对载荷的运动状态及趋势基本相同. 线性模型的计算结果在给定的时段内准确地反应了载荷的运动状态.

平台相对载荷的线性运动模型也具有较高精度. 考虑磁隙不大时, 相对位移设定在10 mm, 相对角位移约为5°, 在给定的运动时段内, 相对平动位移及角位移的误差约为2%, 时段越短精度越高.

从增长速率上, 载荷及平台相对载荷的平动及转动位移的增长在给定时段初期增长缓慢, 随着时间的进一步增大, 其增长速率有所提高, 整体上表现出随时间的高次项增长的规律, 而速度及角速度的误差基本上位线性递增; 后期误差快速增长的原因是在省略转动的高阶项因子时, 转动的近似是对转换阵的正、余弦进行近似, 省略的角度残差的高阶项中也包含了时间递增项, 因此表现出时间高次项规律; 平动速度及转动速率是其一阶导数, 其误差对时间的阶数低于位移对时间的阶数, 因此平动及角速度增长速率较低.

6 结论

磁悬浮形式的空间主动隔振控制系统, 在脱离

图 3 (网络版彩图)非线性模型的载荷运动状态

(a) 载荷位移; (b) 载荷速度; (c) 载荷姿态; (d) 载荷角速度

图 4 (网络版彩图)线性与非线性模型的载荷运动状态差

(a) 位移差; (b) 速度差; (c) 姿态差; (d) 角速度差

图5 (网络版彩图)非线性模型的平台运动状态
(a) 平台位移; (b) 平台速度; (c) 平台姿态; (d) 平台角速度

图6 (网络版彩图)线性与非线性模型的平台运动状态差
(a) 位移差; (b) 速度差; (c) 姿态差; (d) 角速度差

了定子浮子形式之后, 表现为两个空间运动体的相互耦合作用, 适应用于空间条件平台与载荷质量相当的应用场合. 本文从任意的载荷及平台的假设参考点运动出发, 推导了两个六自由度空间运动体的磁悬浮形式的耦合动力学模型, 并在平动与转动小

位移、小速率的条件下, 对模型进行线性化, 通过实例的数值结果比较, 线性化模型的载荷运动状态及平台相对运动状态与原非线性模型的结果保持了基本相同的输出, 线性模型具有较高的精度, 可适用于后续线性控制器的设计.

参考文献

- Groom N J, Britcher C P. Forth international symposium on magnetic suspension technology. In: Proceedings of a Symposium Sponsored by the National Aeronautics and Space Administration. Washington DC, 1998
- Groom N J, Britcher C P. Fifth International Symposium on Magnetic Suspension Technology. In: Magnetic Suspension Technology, 2000, NASA Langley Research Center. NASA/CP-2000-210291
- Whorton M S, Alhorn D C. Microgravity vibration control and civil applications. In: 6th International Conference and Exposition on Engineering, Construction, and Operations in Space (Space 98). Albuquerque, 1998
- 徐洋, 华宏星, 张志谊, 等. 舰船主动隔振技术综述. 舰船科学技术, 2008, 30: 27-30
- 孙景工, 牛福, 李若新. 隔振器在汽车工程中的应用与展望. 振动工程学报, 2004, 17: 1054-1059
- 夏昌, 傅大宝, 黄滨. 磁悬浮技术在结构减振控制中的应用. 地震工程与工程振动, 2014, 34: 211-216
- Grodsinsky C M, Whorton M S. Survey of active vibration isolation systems for microgravity applications. J Spacecr Rockets, 2000, 37: 586-596
- Edberg D, Boucher R, Schenck D, et al. Results of the STABLE microgravity vibration isolation flight experiment. In: 19th Annual AAD Guidance and Control Conference. Breckenridge, 1996
- Tryggvason B V, Stewart B Y, DeCarufel J. The Microgravity Vibration Isolation Mount: Development and flight test results. IAF Paper No. IAF-97-J, 1997, 2: 6-10
- Hampton R D, Calhoun P C, Whorton M S. Glovebox Integrated Microgravity Isolation Technology (g-LIMIT): A Linearized State-Space Model. Technical Report. Hampton, VA: NASA Langley Research Center, 2001
- Ludwick S J, Trumper D L, Holmes M L. Feedback linearization in a six degree-of-freedom MAG-LEV stage. In: Third International Symposium on Magnetic Suspension Technology. Cambridge, 1996
- Nurre G S, Whorton M, Kim Y K. A TREETOPS simulation of the STABLE microgravity vibration isolation system. Technical Report. Huntsville, AL: NASA Marshall Space Flight Center, 1999
- Kim Y K, Whorton M S. Equations of motion for the g-LIMIT microgravity vibration isolation system. Technical Report. Huntsville, AL: NASA Marshall Space Flight Center, 2001
- Rupert J K, Hampton R D, Beech G S. A 'Kane's dynamics' model for the active rack isolation system. Technical Report. Huntsville, AL: NASA Marshall Space Flight Center, 2005
- Beech G S, Hampton R D, Rupert J K. A 'Kane's dynamics' model for the active rack isolation system. Part 2: Nonlinear model development verification and simplification. Technical Report. Alabama: National Aeronautics and Space Administration, Marshall Space Flight Center • MSFC, 2004
- 李宗峰, 刘强, 任维佳. 空间高微重力主动隔振系统动力学建模. 振动与冲击, 2010, 29: 1-4
- 王琪琳. 磁悬浮主动精密隔振平台的控制研究. 博士学位论文. 武汉: 武汉理工大学, 2013
- Wu Q Q, Yue H H, Liu R Q, et al. Parametric design and multi-objective optimization of maglev actuators for active vibration isolation system advances in mechanical engineering. Adv Mech, 2014, 6: 215358
- Wu Q Q, Yue H H, Liu R Q, et al. Measurement model and precision analysis of accelerometers for maglev vibration isolation platforms. Sensors, 2015, 15: 20053-20068
- 刘磊. 航天器主动隔振及精确定向控制技术研究. 博士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2011
- Banerjee B, Allaire P E. Design of a long-stroke noncontact electromagnetic actuator for active vibration isolation. In: Third International Symposium on Magnetic Suspension Technology, Part 1. Hampton, VA: NASA Langley Research Center, 1996. 365-383
- 陈进新, 王宇. 空间微重力磁悬浮平台激励器研究. 空间科学学报, 2008, 28: 584-591
- 张永亮, 郭百巍, 孟秀云. 空间主被动振动耦合器结构研究. 振动与冲, 2015, 24: 151-155

- 24 章仁为. 卫星轨道姿态动力学与控制. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1998
- 25 屠善澄. 卫星姿态动力学与控制. 北京: 宇航出版社, 2001

Coupled dynamics and linearization of electromagnetic suspension system in orbit

LI XinFeng & ZHANG Tao

Technology and Engineering Center for Space Utilization, Beijing 100094, China

Noncontact electromagnetic actuators using Lorentz force have been widely applied in active vibration isolation control systems in ground as well as in space. Most researches and applications share the composition of a floater and a base, where the 6-DOF motion of the floater can be modeled with the assumption that its mass is negligible compared to the base. However, in potential applications where the mass disparity between the payload and its platform (or spacecraft bus) is not large, the dynamics only concerning floater's motion is not agreeable, the coupled 6-DOF motions of both bodies ought to be modeled. The coupling includes two facts, one is the reaction on the platform when actuations are exerted on the payload, and the other is the force of induced voltage against its magnetic field caused by their relative motion. This essay attempts to deduce the equations of dynamics of payload and platform's motion with respect to any specified reference point fixed on either of them. For the convenience of control designer using linear feedback controller, this dynamics model in nonlinear form is then linearized with the assumption of small displacement and small rate from nominal position for translation and orientation. With a specified example, the comparison between the nonlinear model and the linear reveals the accuracy of linearization.

active vibration isolation control, Lorentz force electromagnetic actuator, rotation order of Euler angles, magnetic flux

doi: 10.1360/N092016-00028