混凝土材料三维弹塑性本构模型

路德春, 杜修力*, 闫静茹, 李安柯

北京工业大学城市与工程安全减灾教育部重点实验室, 北京 100124

* E-mail: duxiuli@bjut.edu.cn

收稿日期: 2013-11-14; 接受日期: 2014-02-12

国家重点基础研究发展计划(“973”计划)(批准号: 2011CB013600)和国家自然科学基金(批准号: 90715035, 51278012)资助项目

摘要 非线性统一强度准则将材料的强度特性分解为 4 个相互独立的因素, 由 4 个材料参数分别描述, 在主应力空间内的强度面连续光滑, 存在连续的偏导数. 本文将非线性统一强度准则作为屈服函数, 以塑性剪应变的函数作为硬化/软化参数, 硬化/软化函数参考单轴压缩条件下的应力应变关系给出, 建立了混凝土材料的非线性统一弹塑性本构模型. 通过混凝土材料单轴、双轴和三轴试验结果对本构模型的验证, 以及偏心受压构件试验结果对数值模拟结果的验证表明, 所建立的非线性统一弹塑性本构模型可较好地描述混凝土材料的三维变形与强度特性, 并可反映应变软化特性, 将模型用于数值计算时易于获得收敛解, 且具有较高的精确度和计算效率.

关键词

混凝土
非线性统一强度准则
本构模型
应变软化
数值模拟

混凝土是土木、水利工程中应用最广泛的建筑材料, 大都处于双向或三向的复杂应力作用下工作, 人们对混凝土材料多轴变形与强度特性的认识, 也促进了混凝土结构的发展. 影响混凝土材料力学特性的因素包括材料自身的属性与外荷载的作用特征两方面, 如水灰比、养护时间、试件尺寸、加载速率等, 本构模型主要研究材料的变形与强度对应力状态的依赖关系, 通过模型参数反映混凝土材料的物性.

在单轴、双轴和三轴荷载作用下, 混凝土材料的力学特性差别很大, 表现为不同方向荷载的耦合作用. 在双轴荷载下, 混凝土材料的强度特性主要表现为中主应力效应并具有区间性^[1~3], 即大主应力随着中主应力的增大而先增大后减小. 在三轴荷载下, 混凝土材料的特性主要表现为静水压力效应与中主应力效应^[4~6], 静水压力效应即抗剪强度随着静水压力的增大而增大.

三维应力条件下混凝土材料的变形特性非常复杂, 主要是由 3 个主应力的耦合作用所致, 表现为非线性、应变软化、中主应力效应、静水压力效应等^[7]. 一般将三维强度准则与单轴压缩应力应变全曲线结合, 基于塑性理论、损伤理论等建立混凝土材料的三维本构模型. 三维强度准则须考虑中主应力效应与静水压力效应, 通常采用 Ottosen 准则^[8]、Willam-Warnke 准则^[9]、Zienkiewicz-Pande 形状函数 $g(\theta)$ 准则^[10]; 单轴压缩应力应变全曲线主要反映混凝土材料变形的非线性与应变软化特性, 一般采用多项式、指数式、三角函数、有理分式^[11,12]和分段函数^[13]等. Yoder 和 Iwan^[14], Ohtani 和 Chen^[15], Malvar 等人^[16], Kang 和 Willam^[17], Imran 和 Pantazopoulou^[18], Grassl 等人^[19]基于塑性理论分别建立了混凝土材料的三维本构模型, 模型能够分析混凝土材料在各种复杂应

引用格式: 路德春, 杜修力, 闫静茹, 等. 混凝土材料三维弹塑性本构模型. 中国科学: 技术科学, 2014, 44: 847–860

Lu D C, Du X L, Yan J R, et al. A three-dimensional elastoplastic constitutive model for concrete (in Chinese). Sci Sin Tech, 2014, 44: 847–860, doi: 10.1360/092013-1159

力状态下的变形与强度特性. Imran 和 Pantazopoulou^[18]采用的是 Drucker-Prager 形式的剪切型屈服函数, 结合硬化和软化函数反映混凝土材料的应变硬化与应变软化特性; 通过非关联流动法则反映塑性应变增量的流动方向. 该模型是基于三轴压缩条件 (中主应力系数 $b = (\sigma_2 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3) = 0$) 下的实验结果建立的, 在三轴压缩条件以外 ($b > 0$) 模型过高地计算了混凝土材料的抗剪强度, 在三轴拉伸 ($b = 1$) 时误差最大. Grassl 等人^[19]将 Menétrey 和 Willam 准则^[20]作为屈服函数, 结合以塑性体积应变作为硬化参数提出新的硬化法则, 以分段函数的形式分别描述混凝土材料的应变硬化与应变软化特性. Park 和 Kim^[21]基于 3 个相互独立的屈服面, 利用非关联流动法则建立了三屈服面塑性模型, 模型可较好地描述混凝土材料在复杂应力状态下的力学特性, 但模型没有考虑主应力之间的耦合作用. 上述模型, 在主应力空间的偏平面上, 都只有 1 条强度曲线, 三轴拉压强度比为常数, 不能很好地反映不同混凝土材料的三维强度特性, 并且对于同一种混凝土材料描述静水压力效应的参数与描述中主应力效应的参数存在耦合影响, 难于确定. 鉴于此, 混凝土材料的非线性统一强度准则^[22~25]将混凝土材料的强度特性划分为 4 个相互独立的方面, 分别描述偏平面与子午面上强度的非线性特性. 在偏平面上, 强度函数为介于空间滑动面 (spatially mobilized plane, SMP) 准则 Mises 准则之间的光滑曲线, 反映混凝土材料强度的中主应力效应; 在子午面上, 强度函数为幂函数曲线, 反映混凝土材料强度的静水压力效应、粘结效应与摩擦效应, 并且在主应力空间的强度曲面连续、光滑, 存在连续的偏导数, 可作为屈服函数建立混凝土材料的三维弹塑性本构模型, 并且模型用于数值计算时易于获得收敛解.

本文将混凝土材料的非线性统一强度准则作为屈服函数, 以塑性剪应变的函数作为硬化/软化参数, 硬化/软化函数参考单轴压缩条件下的应力应变关系给出, 建立了混凝土材料的非线性统一弹塑性本构模型. 利用文献中经典的试验结果验证了所建立模型的有效性. 在有限元分析软件 ABAQUS 的基础上, 基于所建模型编制有限元子程序 UMAT, 利用二次开发后的 ABAQUS 模拟了钢筋混凝土偏心受压柱的变形过程, 模拟结果与试验一致, 较好地反映了复杂

应力状态下混凝土材料的力学特性.

1 非线性统一强度准则

材料的破坏都可归结为剪切破坏, 即破坏面上的剪应力达到临界值 (抗剪强度) 时材料发生破坏, 抗剪强度受破坏面上正应力大小的影响. 不同的强度理论区别在于确定的破坏面位置不同, 以及破坏面上正应力对抗剪强度的影响规律不同. Mises 准则认为八面体面为材料的破坏面, 抗剪强度不受八面体面上正应力即静水压力的影响, 该准则适用于拉压强度相等的金属材料. Matsuoka 和 Nakai^[26]认为 SMP 为材料的破坏面, 抗剪强度为 SMP 面上正应力的线性函数, 所建立的 SMP 准则适用于拉压强度不等的摩擦材料, 如砂土、黏土等. 二准则分别为非线性强度理论的上限和下限, 当其用于某种材料时破坏面的位置与材料属性无关, 为一个确定的面, 因此, 二准则均为单一强度理论.

基于非线性强度理论的上限 Mises 准则与下限 SMP 准则的破坏面, 利用一个材料参数插值表示材料破坏面的位置, 基本思想如下式所示:

$$\bar{n} = \alpha' \bar{n}_M + (1 - \alpha') \bar{n}_S, \quad (1)$$

式中, $\bar{n}_M$ 为八面体面外法线方向; $\bar{n}_S$ 为 SMP 面外法线方向; α' 为材料参数, 当 α' 从 0 到 1 变化时, 破坏面从 SMP 面连续过渡到八面体面, 材料不同破坏面的位置不同, 一种材料对应一个确定的破坏面. 所建立的非线性统一强度准则论可适用于各种不同类型的材料, 包括混凝土、岩石、土, 以及金属材料. 本文以压应力为正, 表达式为

$$q^* = M_f \bar{p}, \quad (2)$$

式中,

$$q^* = \alpha \sqrt{\bar{I}_1^2 - 3\bar{I}_2} + \frac{2(1 - \alpha)\bar{I}_1}{3\sqrt{(\bar{I}_1\bar{I}_2 - \bar{I}_3)/(\bar{I}_1\bar{I}_2 - 9\bar{I}_3)} - 1}, \quad (3)$$

$$\bar{p} = (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3)/3, \quad (4)$$

$$\bar{I}_1 = \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3, \quad (5)$$

$$\bar{I}_2 = \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3 + \bar{\sigma}_3\bar{\sigma}_1, \quad (6)$$

$$\bar{I}_3 = \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3, \quad (7)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \left[p_r \left(\frac{p + \sigma_0}{p_r} \right)^n - p \right] \delta_{ij}, \quad (8)$$

$$p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3, \quad (9)$$

其中, δ_{ij} 为克罗内克符号; p_r 为参考应力; M_f 为参考应力处的破坏应力比, 其范围为 $0 < M_f < 3$; n 为静水压力效应指数, 其范围为 $0 \leq n \leq 1$; σ_0 为三向拉伸强度; α 为参考应力处的三轴拉压强度比, 其范围为 $0 \leq \alpha \leq 1$. 4 个材料参数间相互独立, 相互没有任何耦合影响. 材料参数的确定方法详见文献[23].

在主应力空间中, 非线性统一强度准则具有连续光滑的强度面, 如图 1 所示. 通过 4 个材料参数的变化可形成一系列连续光滑的强度面^[24-25].

在偏平面上, 强度曲线的数学表达式为(3)式, 该式描述的强度曲线在偏平面上如图 2 所示. 当 $\alpha=1$ 时, 强度曲线为 Mises 圆; 当 $\alpha=0$ 时, 强度曲线为 SMP 曲线; 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 强度曲线为介于 SMP 曲线和 Mises 圆之间的连续光滑的曲线. 参数 α 描述了偏平面上强度曲线的开口形状, 反映混凝土材料强度的中主应力效应.

在子午面上, 强度曲线的数学表达式为

图 1 主应力空间中的强度面

图 2 偏平面上的强度曲线

$$q^* = M_f \left(\frac{p + \sigma_0}{p_r} \right)^n p_r. \quad (10)$$

(10)式描述的强度曲线在三轴压缩子午面上如图 3 所示, 当 $n=1$ 时, 强度曲线为与静水压力轴成斜率为 M_f 的直线, 表明抗剪强度随静水压力的增大按比例 M_f 增长; 当 $n=0$ 时, 强度曲线为平行于静水压力轴的直线, 表明抗剪强度与静水压力无关; 当 $0 < n < 1$ 时, 强度曲线为介于上述 2 条直线之间的连续光滑的曲线. 参数 n 描述了子午面上强度曲线随静水压力的变化规律, 反映了混凝土材料强度的静水压力效应.

混凝土材料非线性统一强度准则的 4 个材料参数是相互独立的, 但是并没有与混凝土材料的基本强度参数单轴抗压强度 f_c , 单轴抗拉强度 f_t 等具有直接关系. 现将材料参数 M_f , σ_0 , n 和 α 用混凝土的基本强度参数单轴抗压强度 f_c , 单轴抗拉强度 f_t , 双轴抗压强度 f_{cc} 和双轴抗拉强度 f_{tt} 表示. 基本强度参数间的相互关系如图 4 所示, 4 个基本强度参数均在 $\sigma_3=0$ 时的双轴强度曲线上, 与坐标轴正向的交点为单轴抗压强度 f_c ; 与坐标轴负向的交点为单轴抗拉强度 f_t ; 与等倾线 $\sigma_1=\sigma_2$ 在第一象限的交点为双轴抗压强度 f_{cc} , 在第三象限的交点为双轴抗拉强度 f_{tt} .

子午面上混凝土材料非线性统一强度准则的强度曲线如图 5 所示, 坐标轴的上方为三轴压缩子午面, 坐标轴下方为三轴拉伸子午面. 纵坐标 $q = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} / \sqrt{2}$ 为广义剪应力. 单轴压缩荷载为三轴压缩条件, 将破坏应力状态 $(f_c, 0, 0)$ 代入(10)式得

图 3 子午面上的强度曲线

图4 混凝土材料的双轴强度曲线

图5 混凝土材料在子午面上的强度曲线

$$f_c = M_f p_r \left(\frac{f_c/3 + \sigma_0}{p_r} \right)^n. \quad (11)$$

双轴拉伸荷载为三轴压缩条件, 将破坏应力状态 $(0, -f_t, -f_t)$ 代入(10)式得

$$f_t = M_f p_r \left(\frac{-2f_t/3 + \sigma_0}{p_r} \right)^n. \quad (12)$$

将(11)式除以(12)式得

$$\frac{f_c}{f_t} = \left(\frac{f_c/3 + \sigma_0}{-2f_t/3 + \sigma_0} \right)^n. \quad (13)$$

令 $m = 1/n$, 代入(13)式得

$$\left(\frac{f_c}{f_t} \right)^m = \frac{f_c/3 + \sigma_0}{-2f_t/3 + \sigma_0}. \quad (14)$$

由(14)式求得 σ_0 为

$$\sigma_0 = \frac{2f_c^m f_t + f_c f_t^m}{3(f_c^m - f_t^m)}. \quad (15)$$

取参考应力为单轴压缩强度的应力条件, 即 $p_r = f_c/3 + \sigma_0$, 结合(15)式得

$$p_r = \frac{(2f_t + f_c)f_c^m}{3(f_c^m - f_t^m)}. \quad (16)$$

在参考应力 p_r 处确定破坏应力比 $M_f = M_c$ 为

$$M_f = \frac{3f_c}{f_c + 3\sigma_0}. \quad (17)$$

将(15)式代入(17)式得

$$M_f = \frac{3f_c(f_c^m - f_t^m)}{f_c^m(f_c + 2f_t)}. \quad (18)$$

类比(11)式和(12)式, 由三轴拉伸条件下的单轴拉伸和双轴压缩荷载得

$$\left(\frac{f_t}{f_{cc}} \right)^m = \frac{-f_t/3 + \sigma_0}{2f_{cc}/3 + \sigma_0}. \quad (19)$$

对(19)式取对数, 得参数 n 的表达式为

$$n = \frac{\ln f_{cc} - \ln f_t}{\ln(3\sigma_0 + 2f_{cc}) - \ln(3\sigma_0 - f_t)}. \quad (20)$$

将单轴拉伸强度条件 $(0, 0, -f_t)$ 代入(3)式, 即

$$\begin{aligned} \alpha f_t + (1-\alpha) \frac{3f_t p_r \left(\frac{-f_t/3 + \sigma_0}{p_r} \right)^n}{3p_r \left(\frac{-f_t/3 + \sigma_0}{p_r} \right)^n - f_t} \\ = M_f p_r \left(\frac{-f_t/3 + \sigma_0}{p_r} \right)^n. \end{aligned} \quad (21)$$

化简(21)式得参数 α 为

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{(3 + M_f) f_t p_r \left(\frac{-f_t/3 + \sigma_0}{p_r} \right)^n - 3M_f p_r^2 \left(\frac{-f_t/3 + \sigma_0}{p_r} \right)^{2n}}{f_t^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

由(15)和(20)式联立即可确定参数 n 和 σ_0 , 由(18)式确定参数 M_f , 进而由(22)式确定参数 α . 即非线性统一强度准则的 4 个材料参数 M_f , σ_0 , n 和 α 均可由混凝土材料的基本强度参数 f_c , f_t , f_{cc} 和 f_{tt} 确

定. 在实际应用中, 根据已知条件, 综合运用上述规律确定非线性统一强度准则的强度参数.

2 混凝土材料的弹塑性本构模型

塑性理论包含 3 个核心要素, 即屈服条件、流动法则和硬化规律. 屈服条件在应力空间可表示为应力张量的函数, 在屈服面内形成了 1 个弹性区域, 因此屈服函数与加卸载准则可判断材料的变形是弹性变形还是弹塑性变形. 对于应变硬化阶段, 随着塑性变形的发展, 屈服面扩大; 对于应变软化阶段, 随着塑性变形的发展, 屈服面缩小. 屈服面扩大与缩小的规律取决于硬化定律, 也就是后继屈服面 $F(\sigma_{ij}, H) = 0$ 中的 H , 硬化参数 H 用来确定塑性因子, 即 $d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \partial g / \partial \sigma_{ij}$ 中 $d\lambda$ 的大小, g 为塑性势函数, 也就是确定塑性应变增量的大小; 确定塑性应变增量方向 $\partial g / \partial \sigma_{ij}$ 的方法称为流动法则. 给出了上述 3 个要素也就建立了塑性本构模型, 可计算应力变化所引起的塑性应变在大小和方向上的变化, 即应力应变曲线.

2.1 屈服函数

混凝土材料的非线性统一强度准则具有连续光滑的强度面, 强度面具有连续的偏导数, 因此, 可作为屈服函数用于建立混凝土材料的塑性本构模型. 屈服函数写成如下形式:

$$f(\sigma_{ij}, H) = q^* - M_f H \bar{p}, \quad (23)$$

式中, H 为硬化参数, 详见下文所述.

非线性统一强度准则在偏平面上的强度曲线如图 6 所示, 强度曲线连续光滑, 同一条强度线所对应的静水压力相同, 随着静水压力增大强度曲线向外扩张, 并且形状由三角形向圆形过渡. 表明混凝土材料的强度随着静水压力的增大, 由应力作用引起强度的各向异性逐渐降低, 同一偏平面上的抗剪强度曲线向圆形过渡, 即混凝土材料的强度特性具有向金属材料的强度特性变化的趋势.

非线性统一强度准则作为屈服函数时, 采用各向同性硬化准则, 在同一偏平面上, 屈服曲线的变化规律如图 7 所示, 屈服曲线连续光滑, 且所有的屈服曲线静水压力都相同. 随着剪应力的增大, 屈服曲线向外扩张, 其形状由低剪应力时的圆向高剪应力的

图 6 不同偏平面上的强度曲线

图 7 同一偏平面上的屈服曲线

曲边三角形过渡. 表明剪应力的作用引起了混凝土材料变形的各向异性, 且剪应力越大, 混凝土材料变形的各向异性越强. 非线性统一强度准则表明, 剪应力的作用使得混凝土材料变形的各向异性增强, 静水压力的作用使得混凝土材料变形与强度的各向异性减弱. 混凝土材料在主应力空间内的屈服面受静水压力和剪应力的耦合影响, 如图 8 所示, 为一系列连续光滑的曲面.

2.2 塑性势函数

非线性统一强度准则是剪切型屈服面, 若采用相关联流动法则, 即屈服函数 f 和塑性势函数 g 相等, 如图 9 所示, 塑性应变增量的方向与屈服面正交, 在水平向的分量为塑性体应变增量, 与坐标轴的正方向相反, 始终为负值. 因此, 剪切型屈服面采用相关联流动法则, 过大地计算了混凝土的剪胀.

图8 主应力空间中的屈服面

图9 相关联流动法则

本文采用非关联流动法则, 改进基于相关联流动法则的剪切型屈服面计算过大剪胀的不足. 塑性势函数与屈服面的形式相同, 表达式为

$$g(\sigma_{ij}, H) = q^* - M_g H \bar{p}, \quad (24)$$

式中, M_g 为材料参数. 如图 10 所示, 当 $M_g < M_f$ 时, 在相同的应力状态点 A 处, 塑性应变增量与塑性势 g 曲线正交, 对于大小相同(与图 9 相比)塑性应变增量 $d\epsilon^p$, 其水平分量塑性体积应变增量 $d\epsilon_v^p$ 显著减小.

2.3 硬化/软化规律

本文所建立的塑性模型采用等向硬化法则, 以塑性剪应变的函数作为硬化/软化参数, 硬化/软化参数参考单轴压缩条件下的应力应变曲线给出. 硬化/软化参数表示如下:

$$H = H(\epsilon_d^p) = \frac{q^*}{q_s}. \quad (25)$$

如图 11 所示, 在主应力空间的偏平面上, 当前

图10 非关联流动法则

图11 偏平面上屈服曲线的演化规律

应力状态为点 A, 过点 A 的屈服曲线在三轴压缩条件下点 A^* 处的剪应力为 q^* ; 应力状态点 A 经过剪切加载后达到峰值剪应力点 B 处, 过点 B 的强度曲线在三轴压缩条件下点 B^* 处的抗剪强度为 q_s^* . 令

$$y = q^* / q_s^*, \quad (26)$$

$$x = \epsilon_d^p / \epsilon_{d0}^p, \quad (27)$$

式中, ϵ_{d0}^p 为单轴压缩条件下峰值应力所对应的塑性剪应变, ϵ_d^p 为塑性剪应变, 表达式为

$$\epsilon_d^p = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij}^p e_{ij}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\epsilon_{ij}^p - \frac{1}{3} \epsilon_v^p \delta_{ij} \right) \left(\epsilon_{ij}^p - \frac{1}{3} \epsilon_v^p \delta_{ij} \right)}. \quad (28)$$

单轴压缩条件下, 在峰值应力点处 $x=1$, $y=1$; 在峰值应力之前, $x<1$, $y<1$, y 随着 x 的增大而增大, 处于应变硬化状态; 在峰值应力之后, $x>1$, $y<1$, y 随着 x 的增大而减小, 处于应变软化状态. 剪应力与塑性剪应变的关系曲线用分段函数描述, 表达式为

当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$y = \frac{x}{1 + \beta_1 x - \beta_1} + (1 - \beta_1)(1 - x)x; \quad (29)$$

当 $x > 1$ 时,

$$y = \frac{x}{\beta_2(x-1)^2 + x}. \quad (30)$$

式中, β_1 , β_2 为曲线的形状参数, β_1 影响峰值应力前曲线的形状, β_2 影响峰值应力之后曲线的形状, 其范围均为 $0 < \beta_1 < 1$, $0 < \beta_2 < 1$. (29)和(30)式将单轴压缩应力应变关系扩展到了—般应力状态, 并表示为剪应力与剪应变的关系. 联立(25), (29)和(30)式得硬化参数 H , 表达式为

当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$H = \frac{x}{1 + \beta_1 x - \beta_1} + (1 - \beta_1)(1 - x)x; \quad (31)$$

当 $x > 1$ 时,

$$H = \frac{x}{\beta_2(x-1)^2 + x}. \quad (32)$$

对不同的混凝土材料, 其剪应力和塑性剪应变的关系曲线是不同的, 即硬化规律是不同的. β_1 , β_2 分别决定硬化、软化参数的曲线形状, 影响规律如图 12 和 13 所示.

2.4 加/卸载准则

本文建立的是考虑应变软化特性的弹塑性本构模型, 采用曲圣年和殷有泉^[27]、Chen 等人^[28]给出的加卸载准则统一判断硬化阶段和软化阶段的加卸载过程. 根据广义胡克定律, 应力张量可由下式表示:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p), \quad (33)$$

图 12 参数 β_1 对硬化规律的影响

图 13 参数 β_2 对硬化规律的影响

式中, D_{ijkl}^e 为弹性刚度矩阵. 因此, 加载函数 $f(\sigma_{ij}, H)$ 写为如下形式:

$$f(\sigma_{ij}, H) = f[D_{ijkl}^e (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p), H] \\ = F(\varepsilon_{kl}, \varepsilon_{kl}^p, H). \quad (34)$$

(34)式两边对应变张量 ε_{ij} 求偏微分, 得

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} D_{ijkl}^e. \quad (35)$$

基于 Ilyushin 公设, 在应变空间建立加卸载准则的思想. 本文在应力空间建立的加卸载准则如(36), (37)和(38)式所示, 其物理意义如图 14 所示.

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl} > 0 \quad \text{加载}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl} = 0 \quad \text{中性变载}, \quad (37)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl} < 0 \quad \text{卸载}. \quad (38)$$

图 14 加卸载准则

2.5 应力应变关系

本构模型增量应力应变关系为

$$d\sigma_{ij} = \mathbf{D}_{ijkl}^{ep} d\epsilon_{kl}. \quad (39)$$

式中, $\mathbf{D}_{ijkl}^{ep}$ 为弹塑性刚度矩阵. 总应变增量为弹性应变增量和塑性应变增量之和, 即

$$d\epsilon_{kl} = d\epsilon_{kl}^e + d\epsilon_{kl}^p. \quad (40)$$

弹性应变增量与应力增量之间的关系由胡克定律可以写为

$$d\sigma_{ij} = \mathbf{D}_{ijkl}^e d\epsilon_{kl}^e. \quad (41)$$

式中, 弹性刚度矩阵 $\mathbf{D}_{ijkl}^e$ 由弹性模量 E 和泊松比 ν 可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{ijkl}^e = & \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \\ & + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij}\delta_{kl}. \end{aligned} \quad (42)$$

塑性应变增量可写为

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (43)$$

将(40)和(43)式代入(41)式可得

$$d\sigma_{ij} = \mathbf{D}_{ijkl}^e \left(d\epsilon_{kl} - d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right). \quad (44)$$

联立(28)和(43)式得

$$d\epsilon_d^p = d\lambda \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ss}} \right)^2 \right)}. \quad (45)$$

由一致性条件

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_d^p} d\epsilon_d^p = 0. \quad (46)$$

联立(44), (45)和(46)式得

$$d\lambda = \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \mathbf{D}_{ijkl}^e d\epsilon_{kl}, \quad (47)$$

式中,

$$\begin{aligned} h = & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \mathbf{D}_{mnst}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_{st}} \\ & - \frac{\partial f}{\partial \epsilon_d^p} \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ss}} \right)^2 \right)}. \end{aligned} \quad (48)$$

将(47)和(48)式代入(44)得应力增量与应变增量的关系为

$$d\sigma_{ij} = \left(\mathbf{D}_{ijkl}^e - H_{ij} H_{kl} \right) d\epsilon_{kl}, \quad (49)$$

式中,

$$H_{ij} = \frac{1}{h} \mathbf{D}_{ijkl}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}, \quad (50)$$

$$H_{kl} = \mathbf{D}_{ijkl}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (51)$$

所建立的混凝土材料三维弹塑性本构模型共有 10 个参数, 分别为混凝土材料的弹性杨氏模量 E 和泊松比 ν ; 非线性统一强度准则的强度参数 M_f , n , σ_0 和 α ; 塑性势参数 M_g ; 单轴压缩条件下的峰值应力对应的塑性剪应变 ϵ_{d0}^p , 以及形状参数 β_1 和 β_2 .

3 本构模型的试验验证

混凝土材料在复杂应力条件下的力学特性试验, 是混凝土本构度理论研究的一个重要方面. 多年来, 无论在试验设备的研制、试验技术的研发等方面都得到迅速发展. 本文利用研究者已取得的混凝土材料的双轴、三轴试验结果, 验证所提出的混凝土材料三维弹塑性本构模型.

Kupfer 等人^[1]取得了双轴加载条件下混凝土材料的应力应变全曲线, 试验结果被广泛用于校核和验证混凝土材料的各种本构模型. 本文利用他们取得的双轴压-压、拉-压比例加载试验条件下的试验结果验证所建立的三维弹塑性本构模型. 混凝土材料的单轴抗压强度 f_c 为 32.8 MPa, 双轴抗压强度 f_{cc} 为 38.0 MPa, 单轴抗拉强度 f_t 为 3.0 MPa, 双轴抗拉强度 f_{tt} 为 2.6 MPa, 在参考应力 $p_r = f_c/3 + \sigma_0 = 13.35$ MPa 下, 材料参数如表 1 所示.

本文模型的计算结果与试验结果的比较如图 15 和 16 所示, 图 15 为双轴压-压比例加载条件, 图 16 为双轴拉-压比例加载条件. 图 15(a)为单轴压缩条件, 模型计算结果与试验一致, 较好地反映了混凝土的强度以及应变软化特性. 图 15(b)为加载比例为 1:0.502 的压-压条件, 模型计算结果与混凝土材料 3 个方向的变形规律一致, ϵ_1 方向峰值应力处的应变略小于试验结果. 图 15(c)为双轴等比例压缩试验, 曲线的峰值即为双轴抗压强度 f_{cc} , 模型较好地模拟了试验结果, 尤其是强度和应变软化特性吻合更好; 不足在于, 与图 15(b)类似, ϵ_1 方向峰值应力处的应

表 1 混凝土材料的模型参数

E (GPa)	ν	σ_0 (MPa)	n	M_f	α	M_g	β_1	β_2	ε_{d0}^p
30	0.15	2.42	0.85	2.46	0.41	0.82	0.95	0.08	0.00235

图 15 混凝土材料在压-压比例加载条件下模型计算结果与试验结果的比较

(a) 应力比 $\sigma_1/\sigma_2=1/0$; (b) 应力比 $\sigma_1/\sigma_2=1/0.502$; (c) 应力比 $\sigma_1/\sigma_2=1/1$

图 16 混凝土材料在拉-压比例加载条件下模型计算结果与试验结果的比较

(a) 应力比 $\sigma_1/\sigma_2=1/-0.052$; (b) 应力比 $\sigma_1/\sigma_2=1/-0.103$; (c) 应力比 $\sigma_1/\sigma_2=1/-0.204$

变略小于试验结果, 原因在于模型的塑性剪应变 ε_{d0}^p 在所有的应力状态下均为常数, 其值与单轴压缩条件相等. 中主应力系数 $b = (\sigma_2 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)$ 在 $\sigma_3 = 0$ 时, 简化为 $b = \sigma_2 / \sigma_1$, 因此, 加载比 σ_1 / σ_2 即为 $1/b$. 图 15 的 3 个压-压比例加载条件下的试验与模型计算结果表明, 大主应力的峰值在 $1/b = 1:0.502$ 时最大, 表现为中主应力效应的区间性, 如图 4 中的第一象限角分线上面区域中曲线 f_c-f_{cc} 部分所示, 且双轴抗压强度略高于单轴抗压强度. 图 16 为双轴拉-压比例加载条件, 为便于反映该条件下混凝土材料强度的发挥程度, 将纵坐标进行了无量纲化. 随着拉伸方向荷载的增大, 大主应力的峰值逐渐降低, 即与单轴抗压强度相比发挥程度逐渐降低; 对于某一加载比例下, 试验只获得了峰值前的应力应变曲线, 没有获得峰值强度后的应变软化阶段, 但模型在较好地计算峰值前应力应变关系的基础上, 也较好地预测了峰值后的变形规律.

研究者已开展了较多的混凝土材料的三轴试验, 研究混凝土材料的三维变形与强度特性. 本文选用 Candappa 等人^[29]的常规三轴压缩试验结果验证所建立的模型, 混凝土材料的模型参数如表 2 所示. 模型的计算结果与实试验结果的比较如图 17 所示, 加载时圆柱形试样的径向应力保持不变, 模型计算与试验结果均表明, 大主应力(轴向应力)的峰值随着径向

图 17 混凝土材料在三轴压缩条件下模型计算结果与试验结果的比较

表 2 混凝土材料的模型参数

E (GPa)	ν	σ_0 (MPa)	n	M_f	α	M_g	β_1	β_2	ε_{d0}^p
32.5	0.15	3.08	0.85	2.46	0.4	0.82	0.95	0.05	0.00135

应力的增大而增大, 也就是抗剪强度随着静水压力的增大而提高. 模型较好地计算了三轴加载条件下混凝土材料的变形与强度规律.

通过 2 种混凝土材料在单轴、双轴以及三轴试验结果对本文所建立模型的验证, 表明所建立的模型可较好地计算多种混凝土材料在复杂应力作用下的变相和强度规律.

4 钢筋混凝土偏压柱承载力分析

钢筋混凝土柱在偏压荷载作用下, 混凝土材料的受力状态非常复杂, 既有压缩荷载也有拉伸荷载, 并且与钢筋的约束作用耦合. 本文所建立的混凝土材料三维弹塑性本构模型可较好地反映三维受力状态, 通过有限元分析软件的二次开发, 将模型嵌入到 ABAQUS 中, 利用二次开发后的 ABAQUS 模拟钢筋混凝土偏压柱受力变形过程.

4.1 UMAT 子程序开发

有限元分析软件 ABAQUS 具有强大的非线性求解功能, 并且提供了二次开发的接口, 可进行材料库中本构模型的开发. 本文建立的三维弹塑性本构模型是经典的弹塑性模型, 采用应力更新算法^[30]编制用户材料子程序 UMAT, 算法包含 3 部分, 分别为: 1) 弹性试探; 2) 弹塑性应变计算; 3) 应力更新后处理.

4.2 钢筋混凝土偏心受压柱试验及数值模拟

利用北京工业大学 4000 kN 液压伺服加载系统开展了一系列多种截面尺寸, 多种偏心距的短柱承载力试验. 本文利用其中混凝土强度标号为 C30, 截面尺寸为 200 mm×200 mm, 柱高 $h_0 = 400$ mm, 偏心距为 $0.25 \times h_0$ 的短柱进行数值模拟, 柱的界面尺寸及配筋如图 18 所示. 试验时, 在柱的上下两端施加偏心集中荷载, 加载点处只产生竖直方向位移, 水平方向位移为零. 柱的偏心受压荷载-跨中挠度试验结果如图 20 中的空心点所示; 试验结束时, 偏心柱的破坏形态如图 21 所示, 为短柱内侧混凝土受压破坏导致柱丧失承载能力.

图 18 偏压柱的尺寸与配筋图

有限元数值模拟时的边界条件与试验时相同, 即柱底端采用三向铰接约束, 顶端为轴向自由. 钢筋与混凝土设置为理想粘结, 混凝土单元类型为八节点实体单元 (C3D8), 钢筋单元为两节点杆单元 (T3D2), 混凝土和钢筋的有限元模型如图 19 所示. 根据材性试验结果, 在参考应力 $p_t = f_c/3 + \sigma_0$ 处, 子程序中需要的混凝土材料参数如表 3 所示. 钢筋采用理想弹塑性模型, 钢筋材料参数如表 4 所示.

数值模拟时, 采用位移加载方式进行加载, 在构件加载端施加轴向位移, 直至构件的迭代计算不收敛时计算停止. 柱的偏心荷载-跨中挠度曲线的计算

图 19 钢筋和混凝土的有限元模型

表 3 混凝土材料的模型参数

$E(\text{GPa})$	ν	$\sigma_0(\text{MPa})$	n	M_f	α	M_g	β_1	β_2	ε_{d0}^p
29.3	0.15	1.55	0.85	2.46	0.41	0.82	0.85	0.2	0.0008

表 4 钢筋材料的模型参数

$E(\text{GPa})$	ν	$\sigma_s(\text{MPa})$	$\rho(\text{kg/m}^3)$
210	0.1	360	7850

图 20 荷载挠度曲线

图 21 偏心柱破坏状态图

结果如图 20 中的线所示, 分别为基于本文模型与基于《混凝土结构设计规范 GB5010-2002》模型的数值模拟结果. 基于规范模型的结果显著地低于实验结果, 原因在于模型没有考虑混凝土材料的多轴受力特性. 基于本文模型的数值模拟结果与试验结果的规律一致, 并可反映挠度曲线的软化效应. 在荷载施加到 538 kN 之前, 曲线几乎是线性的, 之后则呈现明显的非线性, 峰值荷载为 660 kN, 在曲线的软化阶段, 荷载由峰值较快下降, 之后趋于平缓, 残余荷载

为 603 kN. 选取图 20 所示的 4 个典型状态对混凝土及钢筋的应力和变形特性进行分析. 图 22 为混凝土材料竖向应力云图, 在柱的内侧为压应力, 外侧为拉应力, 且在峰值荷载处即图 22(b)状态时混凝土材料的应力最大. 图 22 表明, 在钢筋混凝土偏压柱中混凝土材料处于复杂的三维受力状态, 不同位置处的混凝土材料有的受压缩应力, 有的受拉伸应力. 图 23 为混凝土材料塑性剪应变云图, 在峰值荷载之前塑性应变很小, 在峰值荷载之后, 塑性应变迅速累积, 并最终导致钢筋混凝土柱失效破坏, 塑性剪应变的云图 23(d)与图 21 所示的试验破坏现象一致. 图 24

图 22 混凝土中的竖向应力云图
(a) 538 kN; (b) 660 kN; (c) 614 kN; (d) 603 kN

图 23 混凝土中的等效塑性剪应变云图
(a) 538 kN; (b) 660 kN; (c) 614 kN; (d) 603 kN

图 24 钢筋中的应力云图
(a) 538 kN; (b) 660 kN; (c) 614 kN; (d) 603 kN

为钢筋应力云图, 在柱内侧的钢筋受压应力, 在外侧的钢筋受拉应力, 从数值上看, 内侧钢筋已达到屈服应力 360 MPa, 与混凝土材料的破坏规律一致.

数值模拟结果表明, 利用本文所提出的混凝土材料的三维弹塑性本构模型, 可较好地分析钢筋混凝土偏压柱的变形规律, 并可反映荷载-挠度曲线的软化特性.

5 结论

本文将非线性统一强度准则作为屈服函数, 分析了同一偏平面上的屈服特性与不同偏平面上的强度特性, 并将该准则的 4 个材料参数转化为混凝土材料的基本强度参数, 即单轴抗压强度 f_c , 单轴抗拉强度 f_t , 双轴抗压强度 f_{cc} 和双轴抗拉强度 f_{tt} . 引入混凝土材料的单轴压缩应力应变关系, 将其转化为剪应力与塑像剪应变关系, 并以塑性剪应变的函数作为硬化/软化参数. 在 Ilyushin 公设思想的基础上, 在应力空间引入了统一判断硬化阶段与软化阶段的加卸载准则. 基于等向硬化规律与非关联流动法则建立了混凝土材料的非线性统一弹塑性本构模型, 并利用文献中给出的混凝土材料试验结果验证了所提模型的有效性. 通过编制用户材料子程序将所提出的模型嵌入到有限元分析软件 ABAQUS 中, 利用二次开发后的分析软件模拟了钢筋混凝土偏压柱的受力过程. 得出如下结论.

1) 混凝土材料的非线性统一弹塑性本构模型物理概念清楚, 参数物理意义明确, 可较好地反映混凝土材料的三维非线性变形与强度特性、应变软化特性等.

2) 基于混凝土材料三维弹塑性本构模型编制的用户材料子程序 UMAT, 结合有限元分析软件 ABAQUS, 可模拟钢筋混凝土构件的多轴受力特性, 具有较高的精确度和计算效率, 并且收敛性好. 用该平台可对钢筋混凝土结构进行精确地多维非线性受力分析, 为结构设计和分析提供依据.

参考文献

- 1 Kupfer H, Hilsdorf H K, Rusch H. Behavior of concrete under biaxial stresses. ACI Mater J, 1969, 66: 656-666
- 2 Tasuji M E, Slate F O, Nilson A H. Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading. ACI J Proc, 1978, 75: 306-312

- 3 Yu M H. Unified Strength Theory and Its Applications. Berlin: Springer, 2004
- 4 Kotsovos M D, Newman J B. Generalized stress-strain relations for concrete. *J Eng Mech*, 1978, 104: 845–856
- 5 Imran I, Pantazopoulou S J. Experimental study of plain concrete under triaxial stress. *ACI Mater J*, 1996, 93: 589–601
- 6 Sfer D, Carol I, Gettu R, et al. Study of the behavior of concrete under triaxial compression. *J Eng Mech*, 2002, 128: 156–163
- 7 Chen W F. Plasticity in enforced Concrete. New York: McGraw-Hill, 1982
- 8 Ottosen N S. A failure criterion for concrete. *J Eng Mech*, 1977, 103: 527–535
- 9 Willam K J, Warnke E P. Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. In: *Proceedings of Seminar on Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses*. Bergamo: ISMES, 1975. 1–30
- 10 Zienkiewicz O C, Pande G N. Some useful forms of isotropic yield surface for soil and rock mechanics. In: *Gudehus. Finite Elements in geomechanics*, G. New York: Wiley, 1977. 179–190
- 11 Sargin M. Stress-strain relationship for concrete and the analysis of structural concrete sections. Report: S.M. Study No 4, University of Waterloo, Solid Mechanics Division. 1971
- 12 Comité Euro-International du Béton. Bulletin D'information No. 213/214. CEB-FIP Model Code 1990 (concrete structures). Lausanne: Thomas Telford Services Ltd., 1993
- 13 过镇海, 张秀琴, 张达成, 等. 混凝土应力-应变全曲线的试验研究. *建筑结构学报*, 1982, 3: 1–12
- 14 Yoder P J, Iwan W D. On the formulation of strain-space plasticity with multiple loading surfaces. *J Appl Mech*, 1981, 48: 773–778
- 15 Ohtani Y, Chen W F. Multiple hardening plasticity for concrete materials. *J Eng Mech*, 1988, 114: 1890–1910
- 16 Malvar L J, Crawford J E, Wesevich J W, et al. A plasticity concrete material model for DYNA3D. *Int J Impact Eng*, 1997, 19: 847–873
- 17 Kang H D, Willam K J. Localization characteristics of triaxial concrete model. *J Eng Mech*, 1999, 125: 941–950
- 18 Imran I, Pantazopoulou S J. Plasticity model for concrete under triaxial compress. *J Eng Mech*, 2001, 127: 281–290
- 19 Grassl P, Lundgren K, Gylltoft K. Concrete in compression: a plasticity theory with a novel hardening Law. *Int J Solids Struct*, 2002, 39: 5205–5223
- 20 Menétrey P, Willam K J. Triaxial failure criterion for concrete and its generalization. *ACI Struct J*, 1995, 92: 311–318
- 21 Park H, Kim J Y. Plasticity model using multiple failure criteria for concrete in compression. *Int J Solids Struct*, 2005, 42: 2303–2322
- 22 姚仰平, 路德春, 周安楠, 等. 广义非线性强度理论及其变换应力空间. *中国科学 E 辑: 技术科学*, 2004, 34: 1283–1299
- 23 路德春. 基于广义非线性强度理论的土的应力路径本构模型. 博士学位论文. 北京: 北京航空航天大学, 2006
- 24 路德春, 杜修力, 龚秋明, 等. 混凝土材料的广义非线性强度理论. *水利学报*, 2009, 40: 542–549
- 25 Du X L, Lu D C, Gong Q M, et al. Nonlinear unified strength criterion for concrete under three-dimensional stress states. *J Eng Mech*, 2010, 136: 51–59
- 26 Matsuoka H, Nakai T. Stress deformation and strength characteristics of soil under three difference principal stresses. *Proc of JSCE*, 1974, 232: 59–70
- 27 曲圣年, 殷有泉. 塑性力学的 Drucker 公设和 Ильюшин 公设. *力学学报*, 1981, 13: 467–473
- 28 Chen W F, Yamaguchi E, Zhang H. On the loading criteria in the theory of plasticity. *Comput Struct*, 1991, 39: 679–683
- 29 Candappa D C, Sanjayan J G, Setunge S. Complete triaxial stress-strain curves of high-strength concrete. *J Mater Civil Eng*, 2001, 13: 209–215
- 30 路德春, 曹胜涛, 杜修力, 等. 平面应变条件下的土拱效应. *岩土工程学报*, 2011, 33: 454–458

A three-dimensional elastoplastic constitutive model for concrete

LU DeChun, DU XiuLi, YAN JingRu & LI AnKe

Key Laboratory of Urban Security and Disaster Engineering of Ministry of Education, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China

Strength of concrete materials can be described by the theory of nonlinear unified strength criterion with four independent parameters. The failure surface of the strength criterion in the principal-stress space is smooth, and therefore it has continuous partial derivatives. The theory of nonlinear unified strength criterion is applied as a yield function, plastic shear strain is used as the hardening and softening parameters, and the hardening and softening laws are given by the stress-strain relationship under uniaxial compression. Then a three-dimensional elastic-plastic constitutive model for concrete is established. A user-defined material mechanical behavior (UMAT) is developed based on the finite element analysis software ABAQUS. The load resistance and the deformation capacity of a reinforced concrete column under eccentric compression are simulated using the present model. The present theoretical results are comparable to the available material-test data, and the numerical results have a good agreement with the experimental observations of the concrete column. This indicates that the developed constitutive model is capable of describing the strength and deformation behaviors, and representing the strain softening behavior of concrete under three-dimensional stress state. Furthermore, the model has high efficiency and accuracy in the numerical analysis.

concrete, nonlinear unified strength criterion, constitutive model, strain softening, numerical simulation

doi: 10.1360/092013-1159