综述

交界面椭圆、抛物和 Maxwell 方程的有限元分析和进展

献给林群教授 80 华诞

李景治^①, 邹军^{②*}

^① 南方科技大学数学系, 深圳 518055;

^② 香港中文大学数学系, 香港

E-mail: li.jz@sustc.edu.cn, zou@math.cuhk.edu.hk

收稿日期: 2014-10-12; 接受日期: 2015-01-29; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11201453)、深圳基础科研基金 (批准号: JCYJ20140509143748226) 和香港研究资助局 (批准号: 405513 和 404611) 资助项目

摘要 本文综述交界面问题的有限元离散数值方法近十几年来的最新进展, 重点讨论椭圆型、抛物型和 Maxwell 型交界面问题的有限元方法, 总结已有的相关研究结果, 如正则性、变分形式、有限元离散策略、数值积分策略、交界面逼近及其对离散解的影响和离散解的收敛性分析等. 伴随历史发展, 本文还梳理了交界面问题的发展脉络. 最后列举一个交界面模型的实际应用, 即不可测热交换界面上热通量重构问题, 着重分析自适应有限元方法的后验误差估计.

关键词 有限元方法 交界面问题 数值分析

MSC (2010) 主题分类 65M60, 65N30, 76M10

1 引言

当代科学与工程中存在许多具有间断系数的偏微分方程的初边值问题为特征的交界面模型, 例如, 不同热介质的热传导过程, 不同电磁介质的电场分布, 不同合金材料之间的拼凑与焊接, 人体心脏的血液流动问题, 生物细胞膜的动力学研究, Navier-Stokes 动量方程的黏性边界拟合, 圆柱绕流等实际的问题, 读者可参见文献 [1–7] 及其参考文献以了解更多科学与工程方面的背景模型. 交界面问题的研究有着若干关键问题: 奇异源项、交叉类型的交界面和大比例的间断系数等, 请参见早期的文献 [8–10] 及近期的专著 [11]. 相关方面的研究一直以来吸引着大批应用与计算数学专家的兴趣, 先后提出多种有效处理交界面问题的数值方法. 广义来说, 这些数值方法可分为以下四大类:

(1) 有限差分方法. 按照时间先后顺序列举, 磨光方法 (smoothing method), 即以磨光的 heaviside 函数将原有的间断系数函数变换为近似连续系数; 调和平均方法^[12] (harmonic averaging method), 即以原有的间断系数函数在差分网格上的调和平均作为离散线性系统的系数; 浸入边界方法 (immersed boundary method), 由 Peskin 提出, 最初应用于心脏血流的模拟^[13], 是工程上应用最广的一类方法,

读者可参见综述文献 [14] 及其参考文献, 其主要问题是只有一阶精度; 浸入交界面方法 (immersed interface method), 该方法由华盛顿大学的 LeVeque 和 Li [15] 提出, 该方法自 1994 年提出以来, 一直是交界面问题数值求解的研究热点, 直到近期还不断有新的鲁棒的高阶变种提出 (参见文献 [16]), 二阶精度是其最大优势, 读者可以参见浸入交界面方法的专著 [11] 及其参考文献了解这方面的研究.

(2) 有限元方法. 早期的有限元方法主要采用协调有限元 [17, 18], 但是解正则性和交界面的光滑性假设过高, 在实际应用中有较大局限. 第一个交界面匹配的协调有限元方法由 Chen 和 Zou [19] 首次给出了交界面问题的解的较低椭圆正则性, 即整体 H^1 且分片 H^2 , 定义了交界面匹配的有限元网格剖分, 并给出了一种简便易行的跨交界面单元的双线性形式的数值积分公式, 其后, 文献 [20] 给出了解的新的先验估计. 文献 [21] 给出了在较高正则性假设条件下的最优先验估计. 文献 [22] 揭示了有限元解的最优收敛性与交界面逼近精度之间的重要联系, 并进一步完善了文献 [19] 中的收敛性结果. 借鉴浸入交界面差分离散格式, 文献 [23, 24] 提出了浸入有限元方法, 其思想是, 构造满足交界面跳跃条件 (jump conditions) 的跨交界面的基函数, 其高阶二次有限元版本及其误差分析可参见文献 [25, 26]. 非协调有限元、自适应有限元渐趋流行并引入到交界面问题, 有兴趣的读者可参见文献 [27–34]. 此外, 文献 [35, 36] 给出了基于棱有限元和 Raviart-Thomas 有限元离散的 $\mathbf{H}(\mathbf{curl}; \Omega)$ 和 $\mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega)$ 交界面问题的离散求解方法及误差估计. 其他相关研究还可参见文献 [37–43] 及其参考文献.

(3) 有限体积方法. 文献 [44, 45] 首先应用有限体积方法求解多介质中的 Maxwell 方程, 并且分析了其稳定性和最优收敛性. 最近, 文献 [46, 47] 提出了求解椭圆交界面问题的自适应有限体积方法及其后验误差估计.

(4) 其他方法. 包括无限元方法求解外区域的交界面问题 [48] 和最近由 Ying 和 Wang [49] 提出的 kernel-free 无网格方法等众多方法, 在此不再赘述.

本综述将着重讨论椭圆、抛物和 Maxwell 交界面问题的有限元方法近十几年来的新进展, 重点放在作者团队所作出的贡献, 如有引文缺失或论述不周, 敬请原谅. 本文结构如下: 第 2 节介绍交界面问题的预备知识和符号约定; 第 3 节给出椭圆、抛物和 Maxwell 型三类重要的交界面模型问题的数学描述; 第 4 节给出有限元剖分定义及若干插值算子及其结果; 第 5 至 7 节分别讨论三类交界面问题的有限元离散策略和误差分析, 重点是有限元解的最优收敛率结果; 最后一节给出一个带实际应用背景的例子, 反演重构热交换界面上的热通量.

2 预备知识

本节将给出下面行文所需的预备知识和符号约定. 给定具有 Lipschitz 边界的有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), 我们假设 Ω 由 Ω_1 和 Ω_2 两部分组成, 其中 $\Omega_1 \Subset \Omega$, $\Omega_2 := \Omega \setminus \overline{\Omega}_1$. 内部交界面 $\Gamma := \partial\Omega_1$, 为叙述方便, 假设充分光滑, 即至少 C^2 光滑 (见图 1). 接下来将按照传统, 采用罗马字母代表标量函数及其函数空间等, 采用粗体字母表示向量函数及其空间等. 文中对于一个标量函数 $u \in L^2(\Omega)$, 我们采用 u_i 表示其在子区域 Ω_i 上的限制, 即 $u_i := u|_{\Omega_i}$, $i = 1, 2$. 然而对于向量函数 $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^d)^T \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, 我们采用 $\mathbf{u}_i = (u_i^1, \dots, u_i^d)^T$ 表示其在子区域 Ω_i 上的限制, 即 $\mathbf{u}_i := \mathbf{u}|_{\Omega_i}$, $i = 1, 2$, 其中 $(\cdot)^T$ 表示转置算子.

对于非负整数 k , $H^k(\Omega)$ 表示标准的 Sobolev 空间, 特别地, $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. $H_0^1(\Omega)$ 是 $H^1(\Omega)$ 中所有 $\partial\Omega$ 上迹意义下为零的函数, $H^k(\mathbf{curl}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in (H^k(\Omega))^d, \mathbf{curl} \mathbf{u} \in (H^k(\Omega))^d\}$, 相应的齐次空间定义为

$$H_0^1(\mathbf{curl}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in H^1(\mathbf{curl}, \Omega), \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}\}.$$

图 1 区域几何设置示意图

此外, 我们定义

$$X_k = H^k(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega_1) \cap H^{k+1}(\Omega_2), \quad k = 0, 1,$$

并且定义其范数为

$$\|v\| = \|v\|_{H^k(\Omega)} + \|v\|_{H^{k+1}(\Omega_1)} + \|v\|_{H^{k+1}(\Omega_2)}, \quad \forall v \in X_k.$$

对于区域 D , D 可以是 Ω 或其边界 $\Gamma = \partial\Omega$, 甚至是 Γ 的一部分. $H^m(D)$ 上的范数或半范数分别表示为 $\|\cdot\|_{m,D}$ 和 $|\cdot|_{m,D}$. 我们用 $(\cdot, \cdot)_D$ 表示 $L^2(D)$ 上的内积. 如果 $D = \Omega$, 我们会省略符号 $\|\cdot\|_{m,D}$ 和 $(\cdot, \cdot)_D$ 中的 D . 除此之外, c 和 C 常用来表示不依赖于网格尺寸 h 和相关函数的常数; 符号 $\lesssim$ 表示如下, 对于两个非负数量 x 和 y , $x \lesssim y$ 表示 $x \leq Cy$, 这里常数 C 不依赖于 h 相关函数.

3 交界面模型问题

本节首先给出三类重要交界面模型问题的数学描述. 特别需要指出的是, 交界面问题的有限元数值方法设计与分析所面对的主要挑战是跨交界面间断材料系数所导致的全局意义下较低的正则性以及各子区域局部内较高的正则性. 因此, 许多基于解的光滑性假设的现有的数值方法对于交界面问题效果较差或者甚至完全失效.

3.1 椭圆型交界面问题

给定如图 1 所示几何区域设置, 我们考虑下面的椭圆交界面问题^[19, 22]:

$$-\nabla \cdot (\beta \nabla u) = f, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (3.1)$$

其解满足齐次 Dirichlet 边界条件和交界面上两个跳跃条件

$$u = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad (3.2)$$

$$[u] = 0, \quad \left[\beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] = g, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上}, \quad (3.3)$$

其中 f 和 g 分别为模型系统区域 Ω 和交界面 Γ 上的源项. 跳跃 $[v]$ 总是理解为在 Γ 上的 $v_1 - v_2$. 系数函数 β , 简便起见, 设为 Ω_i 上的常数 $\beta_i > 0$, $i = 1, 2$, 但这不是必须的, 相同技巧也适用于分片光滑函数. 假定 $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$. 注意 f 和 g 的正则性可能会相应提高以满足高次有限元逼近时问题解 u 在各子区域的正则性足够高.

定理 3.1 ^[19] 给定 $f \in L^2(\Omega)$ 和 $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, 则问题 (3.1)–(3.3) 有唯一解 $u \in X_1$, 而且满足下列先验估计:

$$\|u\|_{X_1} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}). \quad (3.4)$$

3.2 抛物型交界面问题

我们考虑抛物型交界面问题 (见图 1) 如下 (参见文献 [19]):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\beta \nabla u) = f, \quad \text{在 } Q_T := \Omega \times (0, T) \text{ 内}, \quad (3.5)$$

其解满足初边界条件和交界面上跳跃条件

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad u = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \times (0, T) \text{ 上}, \quad (3.6)$$

$$[u] = 0, \quad \left[\beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] = g(x, t), \quad \text{在 } \Gamma \times (0, T) \text{ 上}. \quad (3.7)$$

定理 3.2 ^[19] 给定 $f \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$, $u_0 \in H^1(\Omega)$ 且 $g \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Omega))$, 则问题 (3.5)–(3.7) 有唯一解 $u \in L^2(0, T; X_1) \cap H^1(0, T; X_0)$.

3.3 Maxwell 型交界面问题

Maxwell 型交界面问题 (见图 1) 的数学描述如下 (参见文献 [50]):

$$\operatorname{curl}(\chi \operatorname{curl} \mathbf{u}) + \beta \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (3.8)$$

其解满足边界条件和交界面上跳跃条件

$$\mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad (3.9)$$

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{u}] = 0, \quad [\chi \mathbf{n} \times \operatorname{curl} \mathbf{u}] = 0, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上}. \quad (3.10)$$

4 有限元网格和插值算子

4.1 有限元网格剖分

区域 Ω 被剖分成一族 (可能带曲边的) 单纯型单元 K , 记作 $\mathcal{T}$, 每一个单元 $K \in \mathcal{T}$ 是标准单纯型单元 $\hat{K} \subset \mathbb{R}^d$ 在单元映射 $F_K: \hat{K} \rightarrow K$ 下的镜像. 对于单元 K , 参考单元 $\hat{K}$ 的面、边、顶点在映射 F_K 下的镜像分别称作单元 K 的面、边、顶点. 单元尺寸

$$h_K := \operatorname{diam} K.$$

注意单元映射 F_K 的精确形式化定义如下 (参见文献 [22]):

定义 4.1 (γ -shape regular) 如果条件 (T1)–(T4) 成立, 有限元剖分 $\mathcal{T}$ 及其单元映射 $\{F_K\}_{K \in \mathcal{T}}$ 称为 Ω 上的一个 γ -shape regular 剖分:

(T1) 映射 $F_K: \hat{K} \rightarrow K = F_K(\hat{K})$ 是由 $\hat{K}$ 到 K 的 C^1 微分同胚, 但不一定是仿射变换.

(T2) $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}} \bar{K}$; 对于 $\mathcal{T}$ 中一对单元 K 和 K' , $K = K'$, 或者 $K \cap K' = \emptyset$, 二者必居其一.

(T3) 对于 $\mathcal{T}$ 中一对单元 K 和 K' , 它们的交集 $\overline{K} \cap \overline{K'}$ 有三种情况: 相交为空集, 相交一个面, 或相交一条边. 如果 $\overline{K} \cap \overline{K'} \neq \emptyset$, 则对于 $\sigma = \partial K \cap \partial K'$, 映射 $Q: x \mapsto (F_{K'}^{-1} \circ F_K)(x)$ 是 $F_{K'}^{-1}(\sigma)$ 和 $F_K^{-1}(\sigma)$ 间的等距同构.

(T4) 对于任意 $K \in \mathcal{T}$,

$$\|F'_K\|_{L^\infty(\hat{K})} \leq \gamma h_K, \quad \|(F'_K)^{-1}\|_{L^\infty(\hat{K})} \leq \gamma h_K^{-1}.$$

除此之外, 我们还假设剖分 $\mathcal{T}$ 是拟一致的, 即 $\mathcal{T}$ 的网格剖分大小 h 满足

$$h_K \leq h \leq Ch_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}, \quad (4.1)$$

其中 $C > 0$ 不依赖于网格尺寸 h .

4.2 扰动节点插值算子

对于 γ -shape regular 的网格剖分, 其有限元空间定义如下:

$$S^{p,1}(\mathcal{T}) = \{u \in H^1(\Omega); u|_K \circ F_K \in \hat{P}_p(\hat{K}), \forall K \in \mathcal{T}\}, \quad (4.2)$$

其中 $\hat{P}_p$ 是总次数小于等于 p 的多项式空间.

节点插值算子 $I_p: C(\overline{\Omega}) \rightarrow S^{p,1}(\mathcal{T})$ 逐单元地定义为

$$(I_p u)|_K = \hat{I}_p(u|_K \circ F_K), \quad \forall K \in \mathcal{T}, \quad (4.3)$$

其满足下面的假设.

假设 4.2 对于 $q \in \{0, 1\}$, 插值算子 I_p 满足

$$\|v - I_p v\|_{H^q(K)} \lesssim h^{p+1-q} \|v\|_{H^{p+1}(K)}, \quad \forall v \in H^{p+1}(K). \quad (4.4)$$

请注意假设 4.2 是实际可行的, 相关有限元空间将在后续部分给出. 更进一步, 我们有下面的引理.

引理 4.3 若插值算子 I_p 满足假设 4.2, 则对任意 $s \in \{1, \dots, p\}$ 和 $q \in \{0, 1\}$, 成立如下不等式:

$$\|u - I_p u\|_{H^q(\Omega)}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}} \|u - I_p u\|_{H^q(K)}^2 \lesssim h^{2(s+1-q)} \|u\|_{H^{s+1}(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H^{s+1}(\Omega). \quad (4.5)$$

对于给定足够小 $\delta > 0$, 我们引入交界面 Γ 的三个 δ 宽度的邻域:

$$S_\delta := \{x \in \Omega; \text{dist}(x; \Gamma) < \delta\}, \quad S_\delta^i := \{x \in \Omega_i; \text{dist}(x; \Gamma) < \delta\}, \quad i = 1, 2.$$

对于 $i = 1, 2$, 我们定义其对偶 i' 如下: 如果 $i = 2$, 则 $i' = 1$; 如果 $i = 1$, 则 $i' = 2$.

下面的引理对于引出 δ 论证技巧意义重大, 类似结果曾在文献 [33] 中出现.

引理 4.4 ^[22] 给定函数 $z \in H^1(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, 成立下面不等式:

$$\|z\|_{L^2(S_\delta)} \lesssim \sqrt{\delta} \|z\|_{H^1(\Omega_1 \cup \Omega_2)}, \quad (4.6)$$

如果 $z \in H^1(\Omega)$ 并且在 Γ 上满足 $z = 0$, 下式成立,

$$\|z\|_{L^2(S_\delta)} \lesssim \delta \|z\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.7)$$

定义 4.5 网格剖分 $\mathcal{T}$ 称作交界面 Γ 上达到误差 δ 的剖分, 如果此剖分能分解成

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^1 \cup \mathcal{T}^2 \cup \mathcal{T}_*^1 \cup \mathcal{T}_*^2,$$

其中对于 $i = 1, 2$, 非交界面单元集合

$$\mathcal{T}^i = \{K \in \mathcal{T}; K \subset \Omega_i \setminus S_\delta\},$$

而对于交界面单元集合 $\mathcal{T}_*^i$, 如果

$$\max\{\text{dist}(x; \Gamma \cap K); x \in \overline{K} \cap \overline{\Omega_{i'}}\} \leq \delta,$$

则

$$K \in \mathcal{T}_*^i.$$

举例来说, 如果 Γ 是 C^2 光滑, $\mathcal{T}$ 是仿射变换定义的剖分, 而且 K 的所有节点完全在 $\bar{\Omega}_1$ 或者 $\bar{\Omega}_2$ 内, 则此剖分 $\mathcal{T}$ 能表示此 Γ 达到 $\delta = O(h^2)$ 的误差精度, 见图 2.

下面引入一种扰动的节点插值算子 I .

定义 4.6 (扰动节点插值算子) 网格剖分 $\mathcal{T}$ 是拟一致正则剖分并满足定义 4.1, 网格尺寸为 h , $S^{p,1}(\mathcal{T})$ 是其上定义的有限元空间 (4.2), 则算子 $I: C(\bar{\Omega}) \rightarrow S^{p,1}(\mathcal{T})$ 在节点集合 $\Xi(\mathcal{T})$ 上的节点值定义如下:

(1) 对于 $\xi \in \Xi(\mathcal{T}) \setminus \bar{S}_\delta$, 令 $(Iu)(\xi) := u(\xi)$;

(2) 对于 $\xi \in \Xi(\mathcal{T}) \cap \bar{S}_\delta$, 选择某一点 $\tilde{\xi} \in \Gamma \cap B_{2\delta}(\xi)$, 并令 $(Iu)(\xi) := u(\tilde{\xi})$, 其中 $B_{2\delta}(\xi)$ 是以 ξ 为圆心半径为 2δ 的开球.

下面的定理刻画了扰动节点插值算子 I 的逼近性质, 参见文献 [22].

定理 4.7 对于维度 $d \in \{2, 3\}$, 如果节点插值算子 I_p 满足条件 4.2, I 是其依据定义 7.3 而得到的扰动算子, 则对于 $u \in H^1(\Omega) \cap H^{s+1}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, $s \in \{1, \dots, p\}$, 下列不等式对于 $q \in \{0, 1\}$ 成立:

$$\|u - Iu\|_{H^q(\Omega)} \lesssim (\delta^{1-q/2} + \sqrt{\delta}h^{1-q})\|u\|_{H^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)} + h^{s+1-q}\|u\|_{H^{s+1}(\Omega_1 \cup \Omega_2)}.$$

特别地, 对于 $s \geq 2$ 可以得到增强的估计如下:

$$\begin{aligned} \|u - Iu\|_{H^q(S_\delta)} &\lesssim \delta^{1-q/2}\|u\|_{H^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)} + \delta h^{1/2-q}\|u\|_{H^3(\Omega_1 \cup \Omega_2)} + h^{s+1-q}\|u\|_{H^{s+1}(\Omega_1 \cup \Omega_2)}, \\ \|u - Iu\|_{H^q(\Omega \setminus S_\delta)} &\lesssim \delta h^{1/2-q}\|u\|_{H^3(\Omega_1 \cup \Omega_2)} + h^{s+1-q}\|u\|_{H^{s+1}(\Omega_1 \cup \Omega_2)}. \end{aligned}$$

图 2 S_δ : 交界面 Γ 两边虚线所夹 δ 宽度内的区域; 交界面单元: $K_3 \in \mathcal{T}_*^1$, $K_4 \in \mathcal{T}_*^2$; 非交界面单元: $K_1 \in \mathcal{T}^1$, $K_2 \in \mathcal{T}^2$

5 椭圆型交界面问题的有限元方法

通常来说, 曲边交界面因在数值实现中无法精确表示, 而必须做某种程度的逼近, 由此造成交界面与实际剖分的误差与有限元逼近误差需要平衡解决, 文献 [22] 成功给出了下面两个问题的完整答案:

- (1) 交界面的逼近精度如何影响 (一次或高阶) 有限元解的 H^1 和 L^2 意义下的最优收敛率;
- (2) 形成刚度矩阵时, 跨交界面单元的数值积分如何影响有限元解的 H^1 和 L^2 意义下的最优收敛率.

下面给出交界面问题 (3.1)–(3.3) 的有限元方法, 包括变分形式、离散格式、数值积分和解的误差估计. 通过分部积分公式, 问题 (3.1)–(3.3) 的变分形式定义如下.

问题 (P) 求解 $u \in H_0^1(\Omega)$ 使其满足变分等式

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (5.1)$$

其中双线性形式 $a(\cdot, \cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ 定义如下:

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \beta_i \nabla u_i \cdot \nabla v_i dx, \quad (5.2)$$

线性形式 $L(v) : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ 定义如下:

$$L(v) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} f v_i dx + \int_{\Gamma} g v ds. \quad (5.3)$$

问题 (P) 的协调有限元离散格式由下面给出.

问题 (P_h^c) 求解 $u_h \in S_0^{p,1}(\mathcal{T})$ 满足

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in S_0^{p,1}(\mathcal{T}). \quad (5.4)$$

注意 (5.4) 中的双线性形式 $a(\cdot, \cdot)$ 在跨交界面单位上的子刚度矩阵计算非常复杂, 三维情形更为突出. 文献 [19] 提出了一种如下定义的更为方便的逼近双线性形式 $a_h(\cdot, \cdot)$:

$$a_h(u, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \beta_K \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad (5.5)$$

其中 β_K 可以是分片光滑的. 对于分片常数函数 $\beta(x)$, $K \in \mathcal{T}$, 我们取 $\beta_K = \beta_i$, 如果 $K \in \mathcal{T}^i$, 或者 $\mathcal{T}_*^i$, $i \in \{1, 2\}$. 请注意, 这里的逼近双线性形式 $a_h(\cdot, \cdot)$ 仍然具有椭圆性.

通过简化的双线性形式 (5.5), 我们现在可以定义变分问题 (P) 的一种更实用的有限元方法如下:

问题 (P_h) 求解 $u_h \in S_0^{p,1}(\mathcal{T})$ 使其满足变分等式

$$a_h(u_h, v) = L(v), \quad \forall v \in S_0^{p,1}(\mathcal{T}). \quad (5.6)$$

下面继续讨论椭圆交界面问题的一般收敛性理论. 首先引入下面的 δ -argument 论证技巧 [22].

引理 5.1 对于 $\delta \lesssim h$, 存在不依赖于 h 的常数 μ 满足

$$\|w_h\|_{H^1(S_\delta)} \lesssim \sqrt{\frac{\delta}{h}} \|w_h\|_{H^1(S_{\mu h})}, \quad \forall w_h \in S^{p,1}(\mathcal{T}).$$

利用 δ -argument 论证技巧, 文献 [22] 给出了椭圆交界面问题 (3.1)–(3.3) 的 H^1 和 L^2 范数意义下的最优收敛性结果如下.

定理 5.2 假设 u 是 (5.1) 的解, 且具有正则性 $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^{s+1}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, $s \in \{1, \dots, p\}$, 而 u_h 是其相应的离散问题 (5.6) 的有限元解, 则存在 $\delta \lesssim h$, 使得下面的估计式成立,

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \sqrt{\delta} \|u\|_{H^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)} + h^s \|u\|_{H^{s+1}(\Omega_1 \cup \Omega_2)}.$$

误差 $u - u_h$ 的 L^2 范数估计可以由对偶技巧获得. 有趣的是, L^2 意义下的最优收敛率对于交界面逼近阶数要求不必要像 H^1 收敛时那么强. 特别地, 对于 $p > 1$, 等参单元可以获得最优 L^2 收敛, 但是却无法得到 H^1 意义下的最优收敛性.

定理 5.3 在定理 5.2 的假设下, 下面的误差估计成立,

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \lesssim (h^{s+1} + \delta) \|u\|_{H^{s+1}(\Omega_1 \cup \Omega_2)}. \quad (5.7)$$

由上面的定理可以看出, 椭圆交界面问题 (3.1)–(3.3) 的求解, 必须使用等参或者超参有限元方法以达到最优收敛率, 即单元映射的多项式次数 m 必须不低于参考单元上多项式的总最高次数 p . 在此, 我们给出使用等参或者超参有限元方法求解交界面问题的有限元收敛阶 (参见文献 [22]):

定理 5.4 (等参和超参有限元) 假定 u 和 u_h 分别是问题 (5.1) 和 (5.6) 的解, 且满足 $u \in H^{p+1}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, 假设交界面 Γ 充分光滑,

(1) 对于等参有限元, 即 $m = p$, 那么,

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \lesssim h^{(p+1)/2} \|u\|_{H^{p+1}(\Omega_1 \cup \Omega_2)}, \quad \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \lesssim h^{p+1} \|u\|_{H^{p+1}(\Omega_1 \cup \Omega_2)};$$

(2) 对于超参有限元, 并且要求 $m \geq 2p - 1$, 那么,

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \lesssim h^p \|u\|_{H^{p+1}(\Omega_1 \cup \Omega_2)}, \quad \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \lesssim h^{p+1} \|u\|_{H^{p+1}(\Omega_1 \cup \Omega_2)}.$$

6 抛物型交界面问题的有限元方法

本节构造抛物型交界面问题的后向 Euler 差商的协调一阶连续有限元全离散格式. 首先, 我们把时间区间 $(0, T)$ 剖分成 M 个等间距的子区间:

$$0 = t^0 < t^1 < \dots < t^M = T,$$

其中 $t^n = n\tau$, $\tau = T/M$ 是时间步长. 定义 $I^n = (t^{n-1}, t^n]$ 为第 n 段子区间. 对于某给定的时间连续映射 $w : [0, T] \mapsto L^2(\Omega)$, 定义 $w^n = w(\cdot, n\tau)$, 而对于函数序列 $\{w^n\}_{n=0}^M \subset L^2(\Omega)$, 我们可以引入后向差商

$$\partial_\tau w^n = \frac{w^n - w^{n-1}}{\tau}.$$

借用椭圆型问题的有限元空间, 我们引入 $V_h = S^{1,1}(\mathcal{T})$, $V_h^0 = S^{1,1}(\mathcal{T}) \cap H_0^1(\Omega)$. 为了逼近交界面上定义的函数 $g(x, t)$, 我们定义 $g_h^n \in V_h$ 如下:

$$\bar{g}_h^n = \sum_{j=1}^{m_h} \bar{g}^n(P_j) \phi_j, \quad \bar{g}^n(\cdot) = \frac{1}{\tau} \int_{I_n} g(\cdot, t) dt. \quad (6.1)$$

借鉴椭圆形问题的扰动双线性形式, 我们可以直接定义抛物型交界面问题 (3.5)–(3.7) 的全离散格式如下:

问题 $(\mathbf{P}_{h,\tau})$ 求解 $u_h \in V_h^0$, $n = 1, 2, \dots, M$, $u_h^0 = \Pi_h u_0$, 且满足

$$(\partial_\tau u_h^n, v_h) + a_h(u_h^n, v_h) = (f^n, v_h) + \langle \bar{g}_h^n, v_h \rangle_h, \quad \forall v_h \in V_h^0. \quad (6.2)$$

结合文献 [22] 中的技巧, 不难提高文献 [19] 中的收敛结果, 使得不再出现 $\log h$ 项, 从而达到时间和空间离散尺度的最优收敛阶, 其结果可以归纳如下:

定理 6.1 (H^1 范数估计) 假设 u 是连续问题的解, $u_0 \in H^1(\Omega)$, $f \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$, $g \in L^2(0, T; H^2(\Gamma))$, 而 $u_{h,\tau}$ 是其相应的离散问题 (6.2) 的有限元解, 则对于充分小 $0 < h < h_0$, 下面的有限元解的 H^1 范数误差估计成立,

$$\|u - u_{h,\tau}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \lesssim C_1(\tau + h),$$

其中 C_1 是仅依赖于 u , f 和 g 的常数.

定理 6.2 (L^2 范数估计) 假设 u 是连续问题的解, $u_0 \in X_1$, $f \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$, $g \in L^2(0, T; H^2(\Gamma))$, 而 $u_{h,\tau}$ 是其相应的离散问题 (6.2) 的有限元解, 则对于充分小 $0 < h < h_0$, 下面的有限元解的 L^2 范数误差估计成立,

$$\|u - u_{h,\tau}\|_{L^2(Q_T)} \lesssim C_2(\tau + h^2),$$

其中 C_2 是仅依赖于 u , f 和 g 的常数.

7 Maxwell 型交界面问题的有限元方法

Maxwell 型交界面问题 (3.8)–(3.10) 的变分形式通过分部积分公式可以推导如下:

问题 (Q) 求解 $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{curl}; \Omega)$ 使其满足变分等式

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{curl}; \Omega), \quad (7.1)$$

其中双线性形式定义如下:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} (\chi_i \mathbf{curl} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{curl} \mathbf{v}_i + \beta \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i) d\mathbf{x}. \quad (7.2)$$

类似于椭圆交界面问题, 我们引入 δ -精度的单纯型有限元剖分, 更严格地要求跨交界面单元的顶点落在交界面上. 下面引入关键的几何构型 [22].

定义 7.1 (交界面邻边) 对于剖分网格的某条边 $e \in \mathcal{E}_h$, 存在两个相邻交界面单元 K_1 和 K_2 , 它们共有 e 和另一顶点 $\mathbf{q}$, 并且存在曲边 $\tilde{e}$, 它与 e 共享两个端点, 我们称 $\tilde{e}$ 为 e 的交界面邻边 (见图 3).

图 3 交界面邻边 $\tilde{e}$: 图中红蓝相间的曲线, 与其共享顶点的蓝色直线为 e , 分片平面 $S_{e,\tilde{e}}$ 是夹在 $\tilde{e}$ 与 e 之间的窄带区域

此处, 我们选用棱单元函数空间 $\mathbf{E}_h \subset \mathbf{H}_0(\mathbf{curl}; \Omega)$ 来离散问题 (7.1), 第一类最低阶 $\mathbf{H}(\mathbf{curl}; \Omega)$ 协调的棱单元定义如下:

$$\mathbf{E}_h := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_0(\mathbf{curl}; \Omega) \mid \mathbf{v}_h|_K(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_K + \mathbf{b}_K \times \mathbf{x}, \mathbf{a}_K, \mathbf{b}_K \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \in K, \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

如果定义 $\hat{\mathcal{E}}_h$ 为网格剖分 $\mathcal{T}_h$ 上的所有内边, 有限元空间 $\mathbf{E}_h$ 的棱相关自由度由下面的线积分给定:

$$\mathbf{v}_h \mapsto \int_e \mathbf{v}_h \cdot d\vec{s}, \quad e \in \hat{\mathcal{E}}_h.$$

标准的棱单元插值算子 $\mathbf{I}_h : \mathbf{H}^1(\mathbf{curl}; \Omega) \mapsto \mathbf{E}_h$ 具有如下逼近性质 (参见文献 [51, 定理 5.41]).

引理 7.2 给定区域上 Ω 的一族拟一致和已定向的无结构单纯型网格 $(\mathcal{T}_h)_h$, 标准插值算子 $\mathbf{I}_h \mathbf{u}$ 具有如下逼近属性:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{I}_h \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}; \Omega)} \leq Ch \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\mathbf{curl}; \Omega)}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\mathbf{curl}; \Omega). \quad (7.3)$$

棱单元是一族仿射等价的有限元, 参见文献 [51, 52], 其拖回变换定义如下:

$$\hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}) := \mathbf{B}^T \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{t}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3,3}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3.$$

在一个具有重心坐标 $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ 的四面体 K , 棱有限元空间 $\mathbf{E}_h$ 的局部基函数由下式给定 (参见文献 [52, 第 3.2 小节]),

$$\lambda_i \mathbf{grad} \lambda_j - \lambda_j \mathbf{grad} \lambda_i, \quad 1 \leq i < j \leq 4.$$

它们通过装配可以得到棱单元空间 $\mathbf{E}_h$ 的一族基 $\{\mathbf{b}_e, e \in \hat{\mathcal{E}}_h\}$.

通过引入的棱单元函数空间, 我们可以定义问题 (7.1) 的有限元离散格式如下:

问题 $(\mathbf{Q}_h)$ 求解 $\mathbf{u}_h \in \mathbf{E}_h$ 满足

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{E}_h. \quad (7.4)$$

离散问题 (7.4) 的双线性形式 $a(\cdot, \cdot)$ 的刚度矩阵的计算需要避开跨交界面单元的复杂性. 文献 [50] 引入了新的逼近双线性形式 $a_h(\cdot, \cdot)$:

$$a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K (\chi_K \mathbf{curl} \mathbf{u} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{v} + \beta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x}, \quad (7.5)$$

其中单元上的系数函数 χ_K 是常数, 其定义如下: 对于单元 $K \in \mathcal{T}$, 如果 $K \in \mathcal{T}^i$ 或者 $\mathcal{T}_*^i$, χ_K 取作 χ_i , 其中 $i \in \{1, 2\}$.

引入修改后的双线性形式 (7.5), 我们能定义一种更加实用的离散格式.

问题 $(\tilde{\mathbf{P}}_h)$ 求解 $\mathbf{u}_h \in \mathbf{E}_h$ 满足

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{E}_h. \quad (7.6)$$

修改的双线性形式 $a_h(\cdot, \cdot)$ 仍然具有椭圆性和连续性, 因此, 修正的问题 $(\tilde{\mathbf{P}}_h)$ 的适定性可以得到保障.

值得注意的是, 标准插值算子 $\mathbf{I}_h$ 作用于 $\mathbf{H}_0(\mathbf{curl}; \Omega) \cap \mathbf{H}^1(\mathbf{curl}; \Omega_1) \cap \mathbf{H}^1(\mathbf{curl}; \Omega_2)$ 是可以的, 但是, 它不是合适的构造最优逼近误差的候选. 相应地, 文献 [50] 定义了一个问题相关的插值算子, 它可以看作是标准插值算子 $\mathbf{I}_h$ 的扰动版本, 其定义如下.

定义 7.3 (邻边扰动插值算子) 给定已定向的无结构四边形网格剖分 $\mathcal{T}_h$, h 表示其网格尺寸, $\mathbf{E}_h$ 是 $\mathcal{T}_h$ 上第一类最低价 Nédélec 型 $\mathbf{H}(\mathbf{curl}; \Omega)$ 协调棱有限元空间.

对于函数

$$\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{curl}; \Omega) \cap \mathbf{H}^1(\mathbf{curl}; \Omega_1) \cap \mathbf{H}^1(\mathbf{curl}; \Omega_2),$$

我们定义邻边扰动插值算子

$$\tilde{\mathbf{I}}_h : \mathbf{H}_0(\mathbf{curl}; \Omega) \cap \mathbf{H}^1(\mathbf{curl}; \Omega_1) \cap \mathbf{H}^1(\mathbf{curl}; \Omega_2) \mapsto \mathbf{E}_h$$

和插值函数 $\tilde{\mathbf{I}}_h \mathbf{u}$ 如下:

(1) 对于非交界面上的边 $e \in \hat{\mathcal{E}}_h$, 其基函数 $\mathbf{b}_e$ 的自由度是沿该边 e 的定向积分, 即

$$\int_e \tilde{\mathbf{I}}_h \mathbf{u} \cdot d\vec{s} := \int_e \mathbf{u} \cdot d\vec{s};$$

(2) 对于交界面上的边 $e \in \hat{\mathcal{E}}_h$, 其基函数 $\mathbf{b}_e$ 的自由度改为沿该边 e 的邻边 $\tilde{e}$ 的定向积分, 即

$$\int_e \tilde{\mathbf{I}}_h \mathbf{u} \cdot d\vec{s} := \int_{\tilde{e}} \mathbf{u} \cdot d\vec{s}.$$

通过类似于椭圆型交界面问题的 δ -argument 论证技巧, 文献 [50] 给出了下面关于邻边扰动插值算子的插值误差估计.

引理 7.4 假设

$$\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{curl}; \Omega) \cap \mathbf{H}^1(\mathbf{curl}; \Omega_1) \cap \mathbf{H}^1(\mathbf{curl}; \Omega_2),$$

那么, 下面的插值误差估计成立,

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{I}}_h \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}; \Omega)} \leq C \left(h + \sqrt{\delta} + \frac{\delta}{\sqrt{h}} \right) (\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\mathbf{curl}; \Omega_1)} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\mathbf{curl}; \Omega_2)}), \quad (7.7)$$

其中常数 $C > 0$ 仅依赖于区域 Ω , 但不依赖于 $\mathbf{u}$ 和网格尺寸 h .

基于引理 7.4, 文献 [50] 给出棱有限元逼近 Maxwell 型交界面问题的最优收敛结果.

定理 7.5 假设 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{u}_h$ 分别是问题 (Q) 和 $(\tilde{\mathbf{P}}_h)$ 的连续解和有限元解, 假设

$$\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{curl}; \Omega) \cap \mathbf{H}^1(\mathbf{curl}; \Omega_1) \cap \mathbf{H}^1(\mathbf{curl}; \Omega_2),$$

那么, 下面的有限元误差估计成立,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}(\text{curl}; \Omega)} \leq Ch(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\text{curl}; \Omega_1)} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\text{curl}; \Omega_2)}), \quad (7.8)$$

其中常数 $C > 0$ 仅依赖于区域 Ω , 但不依赖于 $\mathbf{u}$ 和网格尺寸 h .

8 应用举例 — 交界面上的热通量重构

本节考虑热传导系统中热交换交界面上的热通量重构问题, 其数学描述可以用下面的偏微分方程表示:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\alpha \nabla u) = f(x), & x \in \Omega, \\ -\alpha \frac{\partial u}{\partial n} = k(u - u_a(x)), & x \in \Gamma_a, \\ -\alpha \frac{\partial u}{\partial n} = q(x), & x \in \Gamma_i, \end{cases} \quad (8.1)$$

其中 f 是热源项, u_a 是周围温度, k 是热交换系数, α 是热传导率. 区间 Ω 与周围环境的热交换界面 Γ 由两部分组成, Γ_a 是可测量部分, Γ_i 是不可测部分, 即 $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_i$. 热交换交界面上的热通量重构问题即给定可测交界面 Γ_a 上精确温度 $u(x)$ 的近似观察数据 $z(x)$, 重构不可测交界面 Γ_i 上的热通量分布 $q(x)$.

交界面上的热通量重构问题是极度不适定的, 文献 [53] 提出采用输出最新二乘方法配合 Tikhonov 正则化来确定热通量分布 $q(x)$, 即最小化下面的泛函:

$$J(q) = \frac{1}{2} \|u(q) - z\|_{0, \Gamma_a}^2 + \frac{\beta}{2} \|q\|_{0, \Gamma_i}^2, \quad (8.2)$$

其中 $q \in L^2(\Gamma_i)$, $u(q) : L^2(\Gamma_i) \rightarrow H^1(\Omega)$ 表示正问题 (8.1) 的解算子, 即从热通量分布 $q(x)$ 到解 u 的映射.

下面给出优化问题 (8.1) 和 (8.2) 的 KKT 最优条件 [53].

引理 8.1 最优化问题 (8.1) 和 (8.2) 有唯一的解 q , 且 q 是极小值点当且仅当存在对偶变量 $p \in H^1(\Omega)$ 使得三元组 (u, p, q) 满足下面的最优化条件:

$$\begin{cases} (\alpha \nabla u, \nabla \phi) + (ku, \phi)_{\Gamma_a} = (f, \phi) + (ku_a, \phi)_{\Gamma_a} - (q, \phi)_{\Gamma_i}, & \forall \phi \in H^1(\Omega), \\ (\alpha \nabla p, \nabla \phi) + (kp, \phi)_{\Gamma_a} = (u - z, \phi)_{\Gamma_a}, & \forall \phi \in H^1(\Omega), \\ (J'(q), w) = (\beta q - p, w)_{\Gamma_i} = 0, & \forall w \in L^2(\Gamma_i). \end{cases} \quad (8.3)$$

下面给出文献 [53] 所提出的全离散的自适应有限元策略来离散求解原有连续优化问题 (8.1) 和 (8.2). 给定 T^h 是 Ω 上三角形剖分, 满足 $\bar{\Omega} = \bigcup_{\tau \in T^h} \bar{\tau}$. T^h 在 Ω 边界上的自然限制构成 Γ_i^h 和 Γ_a^h 的剖分, 分别记作 Γ_i^h 和 Γ_a^h . 定义 F^h 为 T^h 上内部边集合, 即

$$F^h = \partial T^h \setminus (\Gamma_i^h \cup \Gamma_a^h).$$

定义 h_τ 为单元 τ 的尺寸, h_l 为某个边 l 的长度. T^h 上分片线性连续有限元空间记作 $V^h \subset C(\bar{\Omega})$. 热通量 q 的逼近空间取作 V^h 在 Γ_i 上的自然限制, 记作 $V_{\Gamma_i}^h$.

则连续重构问题 (8.2) 可以全离散如下:

$$\min_{q_h \in V_{\Gamma_i}^h} J_h(q_h) = \frac{1}{2} \|u_h(q_h) - z\|_{0,\Gamma_a}^2 + \frac{\beta}{2} \|q_h\|_{0,\Gamma_i}^2, \quad (8.4)$$

其中 $u_h(q_h) \in V^h$ 是 (8.1) 的离散有限元解, 即

$$(\alpha \nabla u_h, \nabla \phi_h) + (k u_h, \phi_h)_{\Gamma_a} = (f, \phi_h) + (k u_a, \phi_h)_{\Gamma_a} - (q_h, \phi_h)_{\Gamma_i}, \quad \forall \phi_h \in V^h. \quad (8.5)$$

为了建立自适应有限元解的 L^2 - H^1 可靠性, 我们需要引入下面的后验误差:

$$\begin{aligned} \eta_1^2 &= \sum_{\tau \in T^h} h_\tau^2 \int_\tau |\nabla \cdot (\alpha \nabla p_h)|^2 dx, & \eta_2^2 &= \sum_{l \in \Gamma_a^h} h_l \int_l \left| \alpha \frac{\partial p_h}{\partial n} + k p_h - u_h + z \right|^2 ds, \\ \eta_3^2 &= \sum_{l \in \Gamma_i^h} h_l \int_l \left| \alpha \frac{\partial p_h}{\partial n} \right|^2 ds, & \eta_4^2 &= \sum_{l \in F^h} h_l \int_l [(\alpha \nabla p_h) \cdot n]^2 ds, \\ \zeta_1^2 &= \sum_{\tau \in T^h} h_\tau^2 \int_\tau |\nabla \cdot (\alpha \nabla u_h) + f|^2 dx, & \zeta_2^2 &= \sum_{l \in \Gamma_a^h} h_l \int_l \left| \alpha \frac{\partial u_h}{\partial n} + k u_h - k u_a \right|^2 ds, \\ \zeta_3^2 &= \sum_{l \in \Gamma_i^h} h_l \int_l \left| \alpha \frac{\partial u_h}{\partial n} + q_h \right|^2 ds, & \zeta_4^2 &= \sum_{l \in F^h} h_l \int_l [(\alpha \nabla u_h) \cdot n]^2 ds. \end{aligned} \quad (8.6)$$

基于这些后验误差估计项, 文献 [53] 给出了下面的第一个关于自适应有限元解的可靠性结果.

定理 8.2 给定 (u, p, q) 和 (u_h, p_h, q_h) 分别是连续和离散系统的解, 下面的自适应有限元解的 L^2 - H^1 可靠性结果成立,

$$\|q - q_h\|_{0,\Gamma_i}^2 + \|u - u_h\|_1^2 + \|p - p_h\|_1^2 \leq C \beta^{-2} \left(\sum_{i=1}^4 \eta_i^2 + \sum_{i=1}^4 \zeta_i^2 \right), \quad (8.7)$$

其中 η_i 和 ζ_i ($1 \leq i \leq 4$) 由 (8.6) 定义.

为了建立更弱的自适应有限元解的 L^2 - L^2 可靠性, 我们还需引入若干可计算的后验误差项:

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_1^2 &= \sum_{\tau \in T^h} h_\tau^4 \int_\tau |\nabla \cdot (\alpha \nabla p_h)|^2 dx, & \hat{\eta}_2^2 &= \sum_{l \in \Gamma_a^h} h_l^3 \int_l \left| \alpha \frac{\partial p_h}{\partial n} + k p_h - u_h + z \right|^2 ds, \\ \hat{\eta}_3^2 &= \sum_{l \in \Gamma_i^h} h_l^3 \int_l \left| \alpha \frac{\partial p_h}{\partial n} \right|^2 ds, & \hat{\eta}_4^2 &= \sum_{l \in F^h} h_l^3 \int_l [(\alpha \nabla p_h) \cdot n]^2 ds, \\ \tilde{\eta}_1^2 &= \sum_{\tau \in T^h} h_\tau^3 \int_\tau |\nabla \cdot (\alpha \nabla p_h)|^2 dx, & \tilde{\eta}_2^2 &= \sum_{l \in \Gamma_a^h} h_l^2 \int_l \left| \alpha \frac{\partial p_h}{\partial n} + k p_h - u_h + z \right|^2 ds, \\ \tilde{\eta}_3^2 &= \sum_{l \in \Gamma_i^h} h_l^2 \int_l \left| \alpha \frac{\partial p_h}{\partial n} \right|^2 ds, & \tilde{\eta}_4^2 &= \sum_{l \in F^h} h_l^2 \int_l [(\alpha \nabla p_h) \cdot n]^2 ds, \\ \hat{\zeta}_1^2 &= \sum_{\tau \in T^h} h_\tau^4 \int_\tau |f + \nabla \cdot (\alpha \nabla u_h)|^2 dx, & \hat{\zeta}_2^2 &= \sum_{l \in \Gamma_a^h} h_l^3 \int_l \left| \alpha \frac{\partial u_h}{\partial n} + k u_h - k u_a \right|^2 ds, \\ \hat{\zeta}_3^2 &= \sum_{l \in \Gamma_i^h} h_l^3 \int_l \left| \alpha \frac{\partial u_h}{\partial n} + q_h \right|^2 ds, & \hat{\zeta}_4^2 &= \sum_{l \in F^h} h_l^3 \int_l [(\alpha \nabla u_h) \cdot n]^2 ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}_1^2 &= \sum_{\tau \in T^h} h_\tau^3 \int_\tau |f + \nabla \cdot (\alpha \nabla u_h)|^2 dx, & \tilde{\zeta}_2^2 &= \sum_{l \in \Gamma_a^h} h_l^2 \int_l \left| \alpha \frac{\partial u_h}{\partial n} + ku_h - ku_a \right|^2 ds, \\ \tilde{\zeta}_3^2 &= \sum_{l \in \Gamma_i^h} h_l^2 \int_l \left| \alpha \frac{\partial u_h}{\partial n} + q_h \right|^2 ds, & \tilde{\zeta}_4^2 &= \sum_{l \in F^h} h_l^2 \int_l [(\alpha \nabla u_h) \cdot n]^2 ds.\end{aligned}$$

基于这些后验误差项, 下面的定理给出了自适应有限元解的 L^2 - L^2 可靠性分析 (参见文献 [53]).

定理 8.3 给定 (u, p, q) 和 (u_h, p_h, q_h) 分别是连续和离散系统的解, 则有下面的自适应有限元解的可靠性:

$$\|q_h - q\|_{0, \Gamma_i}^2 + \|p_h - p\|_0^2 + \|u_h - u\|_0^2 \leq C \left(\sum_{i=1}^4 \hat{\eta}_i^2 + \sum_{i=1}^4 \hat{\zeta}_i^2 + \beta^{-2} \sum_{i=1}^4 \tilde{\eta}_i^2 + \beta^{-2} \sum_{i=1}^4 \tilde{\zeta}_i^2 \right).$$

参考文献

- 1 Ahn H T, Shashkov M. Multi-material interface reconstruction on generalized polyhedral meshes. *J Comput Phys*, 2007, 226: 2096–2132
- 2 Babuška I. The finite element method for elliptic equations with discontinuous coefficients. *Computing*, 1970, 5: 207–213
- 3 Chan K H, Zhang K, Zou J. Spherical interface dynamics: Mathematical theory, finite element approximation, and application. *SIAM J Numer Anal*, 2006, 44: 1877–1902
- 4 Nicaise S, Sändig A-M. General interface problems, I. *Math Methods Appl Sci*, 1994, 17: 395–429
- 5 Nicaise S, Sändig A-M. General interface problems, II. *Math Methods Appl Sci*, 1994, 17: 431–450
- 6 Ohmori K, Saito N. On the convergence of finite element solutions to the interface problem for the stokes system. *J Comput Appl Math*, 2007, 198: 116–128
- 7 Olshanskii M A, Reusken A. Analysis of a stokes interface problem. *Numer Math*, 2006, 103: 129–149
- 8 Kellogg R B. Singularities in interface problems. In: *Numerical Solution of Partial Differential Equations II*. New York: Academic Press, 1971, 351–400
- 9 Kellogg R B. Higher order singularities for interface problems. In: *The Mathematical Foundations of the Finite Element Methods with Applications to Partial Differential Equations*. New York: Academic Press, 1972, 589–602
- 10 Kellogg R B. On the poisson equation with intersecting interfaces. *Appl Anal*, 1974, 4: 101–129
- 11 Li Z, Ito K. *The Immersed Interface Method: Numerical Solutions of PDEs Involving Interfaces and Irregular Domains*. Philadelphia: SIAM, 2006
- 12 Tikhonov A N, Sarmarskii A A. Homogeneous difference schemes. *Comput Math Math Phys*, 1962, 1: 5–67
- 13 Peskin C S. Numerical analysis of blood flow in heart. *J Comput Phys*, 1977, 25: 220–252
- 14 Peskin C S. The immersed boundary method. *Acta Numer*, 2002, 11: 1–39
- 15 LeVeque R J, Li Z. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. *SIAM J Numer Anal*, 1994, 31: 1019–1044
- 16 Brehm C, Fasel H. A novel concept for the design of immersed interface methods. *J Comput Phys*, 2013, 242: 234–267
- 17 Barrett J W, Elliott C M. Fitted and unfitted finite-element methods for elliptic equations with smooth interfaces. *IMA J Numer Anal*, 1987, 7: 283–300
- 18 Bramble J, King J. A finite element method for interface problems in domains with smooth boundaries and interfaces. *Adv Comput Math*, 1996, 6: 109–138
- 19 Chen Z, Zou J. Finite element methods and their convergence for elliptic and parabolic interface problems. *Numer Math*, 1998, 79: 175–202
- 20 Huang J, Zou J. Some new a priori estimates for second-order elliptic and parabolic interface problems. *J Differential Equations*, 2002, 184: 570–586
- 21 Plum M, Wieners C. Optimal a priori estimates for interface problems. *Numer Math*, 2003, 95: 735–759
- 22 Li J, Melenk J M, Wohlmuth B, et al. Optimal a priori estimates for higher order finite elements for elliptic interface problems. *Appl Numer Math*, 2010, 60: 19–37
- 23 Li Z. The immersed interface method using a finite element formulation. *Appl Numer Math*, 1998, 27: 253–267

- 24 Li Z, Lin T, Wu X. New cartesian grid methods for interface problems using the finite element formulation. *Numer Math*, 2003, 96: 61–98
- 25 Camp B, Lin T, Lin Y, et al. Quadratic immersed finite element spaces and their approximation capabilities. *Adv Comput Math*, 2006, 24: 81–112
- 26 Lin T, Lin Y, Sun W. Error estimation of a class of quadratic immersed finite element methods for elliptic interface problems. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2007, 7: 807–823
- 27 Cai Z, Ye X, Zhang S. Discontinuous galerkin finite element methods for interface problems: A priori and a posteriori error estimations. *SIAM J Numer Anal*, 2011, 49: 1761–1787
- 28 Cai Z, Zhang S. Recovery-based error estimator for interface problems: Conforming linear elements. *SIAM J Numer Anal*, 2009, 47: 2132–2156
- 29 Cai Z, Zhang S. Recovery-based error estimators for interface problems: Mixed and nonconforming finite elements. *SIAM J Numer Anal*, 2010, 48: 30–52
- 30 Cao Y, Gunzburger M. Least-squares finite element approximations to solutions of interface problems. *SIAM J Numer Anal*, 1998, 35: 393–405
- 31 Chen J, Xu Y, Zou J. Convergence analysis of an adaptive edge element method for Maxwell's equations. *Appl Numer Math*, 2009, 59: 2950–2969
- 32 Hansbo A, Hansbo P. An unfitted finite element method, based on nitsche's method, for elliptic interface problems. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2002, 191: 5537–5552
- 33 Huang J, Zou J. A mortar element method for elliptic problems with discontinuous coefficients. *IMA J Numer Anal*, 2002, 22: 549–576
- 34 Lamichhane B P, Wohlmuth B I. Mortar finite elements for interface problems. *Computing*, 2004, 72: 333–348
- 35 Hiptmair R, Li J, Zou J. Convergence analysis of finite element methods for $H(\text{div}; \Omega)$ -elliptic interface problems. *J Numer Math*, 2010, 18: 187–218
- 36 Hiptmair R, Li J, Zou J. Convergence analysis of finite element methods for $H(\text{curl}; \Omega)$ -elliptic interface problems. *Numer Math*, 2012, 122: 557–578
- 37 Burman E, Hansbo P. Interior-penalty-stabilized lagrange multiplier methods for the finite-element solution of elliptic interface problems. *IMA J Numer Anal*, 2010, 30: 870–855
- 38 Dyadechko V, Shashkov M. Reconstruction of multi-material interfaces from moment data. *J Comput Phys*, 2008, 227: 5361–5384
- 39 Goldstein C I. The solution of exterior interface problems using a variational method with lagrange multipliers. *J Math Anal Appl*, 1983, 97: 480–508
- 40 Huang J, Zou J. Uniform a priori estimates for elliptic and static Maxwell interface problems. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2007, 7: 145–170
- 41 Isakov V. On uniqueness of recovery of a discontinuous conductivity coefficient. *Commun Pure Appl Math*, 1988, 41: 865–877
- 42 Jin J, Wu X. The singular finite element method for some elliptic boundary value problem with interface. *J Comput Appl Math*, 2004, 170: 197–216
- 43 Maccamy R C, Marin S P. A finite element method for exterior interface problems. *Int J Math Math Sci*, 1980, 3: 311–350
- 44 Chung E T, Du Q, Zou J. Convergence analysis of a finite volume method for Maxwell's equations in nonhomogeneous media. *SIAM J Numer Anal*, 2003, 41: 37–63
- 45 Chung T S, Zou J. A finite volume method for Maxwell's equations with discontinuous physical coefficients. *Int J Appl Math*, 2001, 7: 201–223
- 46 Mu L, Jari R. A recovery-based error estimate for nonconforming finite volume methods of interface problems. *Appl Math Comput*, 2013, 220: 63–74
- 47 Mu L, Jari R. A posteriori error analysis for discontinuous finite volume methods of elliptic interface problems. *J Comput Appl Math*, 2014, 255: 529–543
- 48 Han H. The numerical solutions of interface problems by infinite element method. *Numer Math*, 1982, 39: 39–50
- 49 Ying W, Wang W-C. A kernel-free boundary integral method for variable coefficients elliptic PDEs. *Commun Comput Phys*, 2014, 15: 1108–1140
- 50 Hiptmair R, Li J, Zou J. Universal extension for Sobolev spaces of differential forms and applications. *J Funct Anal*, 2012, 263: 364–382
- 51 Monk P. *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. Oxford: Clarendon Press, 2003
- 52 Hiptmair R. Finite elements in computational electromagnetism. *Acta Numer*, 2002, 11: 237–339

53 Li J, Xie J, Zou J. An adaptive finite element reconstruction of distributed fluxes. *Inverse Problems*, 2011, 27: 075009

Advances of finite element analysis for elliptic, parabolic and Maxwell interface equations

LI JingZhi & ZOU Jun

Abstract The development of finite element methods for interface problems in the recent two decades is reviewed with an emphasis on elliptic, parabolic and Maxwell interface problems. We summarize some important results, e.g., regularity, variational forms, discretization schemes, numerical quadrature, interface approximation, and convergence analysis. The state of the art for these problems is described along with the history of developments. Finally, we outline some applications governed by the PDE systems with interfaces.

Keywords finite element methods, interface problems, numerical analysis

MSC(2010) 65M60, 65N30, 76M10

doi: 10.1360/N012014-00213