Markov 预解式之分解与 Kolmogorov Q 过程之精析

卢影, 陈安岳*, 杜丽

南方科技大学金融数学与金融工程系, 深圳 518055
E-mail: luy@sustc.edu.cn, chenay@sustc.edu.cn, dul@sustc.edu.cn

收稿日期: 2015-01-20; 接受日期: 2015-02-15; * 通信作者

摘要 本文应用预解算子的分解定理来研究带有限个瞬时态的 Kolmogorov Q - 矩阵. 此模型是 Kolmogorov 等人早期研究的一类 Q - 矩阵的推广. 但本文的讨论不限于存在唯一性, 而是更着重于对过程性质的深刻分析. 在给出一个极易验证的存在唯一性条件后, 本文证明 Kolmogorov Q - 过程必定是常返的. 一个非常好的过程遍历的充分必要条件也在本文给出. 在此过程遍历的条件下, 过程极限分布的简洁清晰的显式也被展示出来. 过程的可逆性问题也在本文中获得了很好的完备解答.

关键词 连续参数 Markov 链 Q - 矩阵 瞬时态与稳定态 存在性 唯一性 常返性 遍历性 可逆性

MSC (2010) 主题分类 60J27, 60J35

1 引言

64 年前, Kolmogorov^[1] 提出了如下一个具有挑战性的问题:

给定一个定义于非负整数集 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ 上的拟 Q - 矩阵 $Q = \{q_{ij}\}$, 其元素由下式确定,

$$q_{ij} = \begin{cases} -\infty, & \text{若 } i = j = 0, \\ 1, & \text{若 } i = 0, \quad j \geq 1, \\ -q_i, & \text{若 } i = j \geq 1, \\ q_i, & \text{若 } i \geq 1, \quad j = 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (1.1)$$

这里

$$0 < q_i < \infty, \quad \forall i \geq 1, \quad (1.2)$$

那么在什么条件下存在一个不中断的 Markov 转移函数 $P(t)$ 使得 $P'(0) = Q$?

我们之所以称 Kolmogorov 问题带有挑战性是由于从 (1.1) 可以看出状态 0 是一个瞬时态. 周知直至今天, 我们仍然对于带瞬时态的 Q - 过程的理论知之甚少. 其原因或许是由于我们缺乏有效的概率分析方法与工具. 确实地, 在全稳定情形下极其有效的 Feller 最小解方法似乎难以应用于含有瞬时态的 Q - 过程.

尽管如此, 由 Kolmogorov 提出的存在性问题在若干年后被 Kendall 和 Reuter^[2] 所攻破. 他们在该文中证明了, 如果条件

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i} < \infty \quad (1.3)$$

满足, 则存在一个不中断的转移函数 $P(t)$ 使得 $P'(0) = Q$. 十多年后, Reuter^[3] 略微推广了 Kolmogorov 模型. 在 Reuter 模型中, (1.1) 中的 $q_{0j} = 1$ 被替换成了 $q_{0j} = h_j$, 这里 $h_j \geq 0$ ($j \geq 1$) 且 $\sum_{j=1}^{\infty} h_j = \infty$. Reuter^[3] 证明了, 若条件

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{h_j}{q_j} < \infty \quad (1.4)$$

成立, 则存在一个不中断的转移函数 $P(t)$ 使得 $P'(0) = Q$.

应当注意, 虽然条件 (1.3) 和 (1.4) 已被证明是充分的, 但其必要性并未确认. 事实上, 作为本文所得结论的一个简单推论, 我们后面将说明条件 (1.4) 其实并非必要, 但 (1.3) 倒是必要的.

更应当指出, 即便对于 Kolmogorov 和 Reuter 所考虑的 Q - 矩阵, 至今为止, 仅存在性问题已部分解答, 而唯一性问题并未解决. 而更为重要的是, 其相应 Q - 过程的概率性质 (在存在性条件满足的情形下) 问题还根本未被考虑过. 究其原因, 恐怕仍然是由于对含瞬时态的 Q - 过程, 我们缺乏有效的工具.

本文的主要目的有两个: 一是我们将推广上述 Kolmogorov 和 Reuter 型的 Q - 矩阵至具有任意 m 个 ($m \geq 1$) 瞬时态的情形, 并彻底解决存在唯一性诸问题; 二是且更为主要的目的则是考虑其真正 Q - 过程 (即那一族随机变量而不是转移概率) 的概率性态问题, 如常返性、可逆性乃至其重要的极限分布的显示表达问题. 我们将会看到, 这些问题均会在本文中得到一个令人极为满意的解答. 我们也将看到, 我们之所以能够得到这些令人满意的结果, 源于我们有一个得力的工具, 即所谓预解算子的分解定理. 这个重要的分解定理也将在本文中陈述并予以发展, 以便更适用于带任意有限个瞬时态的 Kolmogorov 和 Reuter 型的 Q - 矩阵. 我们在这里指出, 这个极其有效的分解定理及其一系列重要推论, 正是在侯振挺教授的直接指导下, 由侯振挺教授的诸多学生合作努力完成的.

为统一术语起见, 在正式描述我们的模型之前, 先给出如下一些基本定义.

定义 1.1 设 E 为可列集. 一个定义在 $E \times E$ 上的矩阵 $Q = \{q_{ij}; i, j \in E\}$ 称为一个拟 Q - 矩阵, 如果下列条件满足,

(i)

$$0 \leq q_{ij} < \infty, \quad \forall i, j \in E, \quad i \neq j; \quad (1.5)$$

(ii)

$$-\infty \leq q_{ii} \leq 0, \quad \forall i \in E; \quad (1.6)$$

(iii)

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} \leq q_i \triangleq -q_{ii} \leq \infty, \quad \forall i \in E. \quad (1.7)$$

如果 $q_i < \infty$, 则状态 i 称为稳定的; 而如果 $q_i = \infty$, 则状态 i 称为瞬时的. 进一步, 若所有的状态都是稳定的, 则拟 Q - 矩阵 Q 自身称为稳定的, 否则称为非稳定的. 进一步, 一个状态 $i \in E$ 称为保守的, 如果上述 (1.7) 成为等号, 即 $\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i \triangleq -q_{ii} \leq \infty$. 如果所有的状态都是保守的, 则给定的拟 Q - 矩阵 Q 称为保守的. 注意此处关于保守性的定义略宽于常用定义, 即按照此处的定义, 若 i 是瞬时态

且满足 $\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i = \infty$, 我们也称状态 i 为保守的. 按照这一定义易知, 由 (1.1) 给出的 Q 是一个保守的拟 Q - 矩阵.

定义 1.2 设 E 为可列集. 定义于 $E \times E$ 上的矩阵 $Q = \{q_{ij}; i, j \in E\}$ 称为一个 Q - 矩阵, 如果存在一个 Markov 转移函数 $P(t)$ 使得 $P'(0) = Q$.

可列 Markov 过程的一个基本结论断言, 一个 Q - 矩阵必定是拟 Q - 矩阵, 证明可参见文献 [4-9] 等相关经典著作. 然而反方向的结论未必总成立. 因而, 一个拟 Q - 矩阵在何条件下可成为一个 Q - 矩阵即成为可列 Markov 过程的一个极其重要的基本问题, 即 Q - 过程的存在性问题. 它构成了 Q - 过程构造论的核心课题之一. 当一个拟 Q - 矩阵 Q 是全稳定时 (未必保守), Feller^[10] 证明了该拟 Q - 矩阵 Q 必为 Q - 矩阵, 并构造了一个现今以他的名字命名的 Feller 最小解. 紧接着 Doob^[11] 也对此问题进行了深刻的研究, 并探讨了唯一性问题. 此后, 可列 Markov 过程构造论进入了它的辉煌发展阶段, 而且一直延续至今. 其中侯振挺教授的唯一性准则是一个非常重要的阶段性成果, 在 Markov 过程构造论中起到了极其重要的作用. 本文也是在此领域中的一种新探索.

为此, 我们特给出如下定义:

定义 1.3 定义于非负整数集 $\mathbb{N}$ 上的一个拟 Q - 矩阵 $Q = \{q_{ij}; i, j \in \mathbb{N}\}$ 称为一个 Kolmogorov 拟 Q - 矩阵, 若存在正整数 $m \geq 1$, 使得

$$Q = \begin{pmatrix} H^{(0)} & H^{(1)} & H^{(2)} & H^{(3)} & \cdots \\ Q^{(1)} & -Q^{(1)} & 0 & 0 & \cdots \\ Q^{(2)} & 0 & -Q^{(2)} & 0 & \cdots \\ Q^{(3)} & 0 & 0 & -Q^{(3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

其中的子块矩阵包括 0 以及 $H^{(n)} (n \geq 1)$ 和 $Q^{(n)} (n \geq 1)$ 均为 $m \times m$ 对角矩阵, 且

$$Q^{(n)} = \text{Diag}(q_{nm}, q_{nm+1}, \dots, q_{(n+1)m-1}), \quad (1.9)$$

$$H^{(n)} = \text{Diag}(h_{nm}, h_{nm+1}, \dots, h_{(n+1)m-1}), \quad (1.10)$$

而所有的 0 均为 $m \times m$ 零矩阵. $H^{(0)}$ 也为 $m \times m$ 矩阵 (但不是对角矩阵), 其元素由下式决定,

$$(H^{(0)})_{ij} = \begin{cases} -\infty, & \text{若 } 0 \leq i \leq m-1, \quad j = i, \\ h_j, & \text{若 } i = 0, \quad 1 \leq j \leq m-1, \\ q_i, & \text{若 } 1 \leq i \leq m-1, \quad j = 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (1.11)$$

这里

$$q_i > 0, \quad \forall i \geq 1, \quad (1.12)$$

$$h_j > 0, \quad \forall j \geq 1, \quad (1.13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_{nm+i} = +\infty, \quad \forall 0 \leq i \leq m-1. \quad (1.14)$$

由 (1.14) 可见, 一个 Kolmogorov 拟 Q - 矩阵 Q 含有 m 个瞬时态, 且 Q 为保守的.

注意, 我们也可考虑某些 $h_i = 0$ 的情形 (但必须确保 (1.14) 成立), 但我们不拟在此做这些平凡的推广工作.

定义 1.4 一个 Kolmogorov 拟 Q - 矩阵 Q 称为均衡的, 如果

$$h_i \equiv 1, \quad \forall i \geq 1. \quad (1.15)$$

显然, 前面提到的 Kolmogorov 和 Reuter 等人曾经考虑过的例子相当于我们的 $m = 1$ 的情形. 注意到在前面的定义中, 我们只给出了 h_i 和 q_i 关于 $i \geq 1$ 的确切定义, 为今后行文方便起见, 本文中一概约定

$$h_0 = q_0 = 1. \quad (1.16)$$

注意约定 (1.16) 与均衡拟 Q - 矩阵的定义也是吻合的.

2 预解算子分解定理

本节首先陈述重要的预解算子分解定理. 它是本文要反复用到的一个基本结论, 其重要性在于此定理及其众多推论具有方法论的意义.

假定 $P(t)$ 为定义于可列集 E 上的 Markov 转移概率函数, 具有 Q - 矩阵 Q 及预解算子 (亦称预解式) $R(\lambda)$. 假定 $F \subset E$ 为 E 的一个有限子集, 令 $G = E \setminus F$. 为方便起见, 不妨假定 E 已重置为 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots\}$ 使得 $F = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 成为 E 的首 m 个元素.

命题 2.1 假定 $Q = \{q_{ij}\}$ 为定义于可列集 $E \times E$ 上的一个 Q - 矩阵 (从而存在 Q - 过程), 且存在一个不中断的 Markov 转移函数 $P(t)$ 使得 $P'(0) = Q$. 进一步假定 $R(\lambda) = \{r_{ij}(\lambda); i, j \in E, \lambda > 0\}$ 是此 $P(t)$ 的 Markov 预解函数, 令 F 为 E 的一个有限子集且令 $G = E \setminus F$, 则此不中断的 Markov 预解式有如下唯一分解:

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Psi(\lambda) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda) \\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

这里

(i) $A(\lambda)$ 是 $R(\lambda)$ 在 $F \times F$ 上的限制, 即 $A(\lambda) = \{r_{ij}(\lambda); i, j \in F\}$ 且有

$$|A(\lambda)| > 0, \quad \forall \lambda > 0. \quad (2.2)$$

从而, $A(\lambda)$ 对所有的 $\lambda > 0$ 具有逆矩阵.

(ii) $\Psi(\lambda) = \{\psi_{ij}(\lambda); i, j \in G\}$ 是 Q_{GG} 预解函数 (通常是中断的), $Q_{GG} = (q_{ij}; i, j \in G)$ 为 Q 在 $G \times G$ 上的限制.

(iii) $\eta(\lambda) = \{\eta_{ij}(\lambda); i \in F, j \in G\}$ 满足

$$\eta(\lambda) - \eta(\mu) = (\mu - \lambda)\eta(\lambda)\Psi(\mu), \quad \forall \lambda, \mu > 0, \quad (2.3)$$

且

$$0 \leq \eta_{i\cdot}(\lambda) \in l_1, \quad \forall i \in F, \quad \forall \lambda > 0. \quad (2.4)$$

(iv) $\xi(\lambda) = \{\xi_{ij}(\lambda); i \in \mathbf{G}, j \in \mathbf{F}\}$ 满足

$$\xi(\lambda) - \xi(\mu) = (\mu - \lambda)\Psi(\lambda)\xi(\mu), \quad \forall \lambda, \mu > 0, \quad (2.5)$$

且

$$0 \leq \xi_{ij}(\lambda) < \infty, \quad \xi(\lambda)\mathbf{1} = \mathbf{1} - \lambda\psi(\lambda)\mathbf{1}. \quad (2.6)$$

从而, $\xi_{ij}(\lambda) \uparrow$, 当 $\lambda \rightarrow 0$ ($\forall i \in \mathbf{G}, j \in \mathbf{F}$) (这里 $\mathbf{1}$ 为元素恒为 1 的一个列向量, 至于其维数可视情形而定. 例如, (2.6) 中的第一个 $\mathbf{1}$ 为定义于 $\mathbf{F}$ 上的有限维向量, 而 (2.6) 中的其他两个 $\mathbf{1}$ 则为定义于 $\mathbf{G}$ 上的无限维列向量).

(v)

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \eta(\lambda) = Q_{FG}, \quad (2.7)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \xi(\lambda) = Q_{GF}, \quad (2.8)$$

这里 $Q_{FG} = (q_{ij}, i \in \mathbf{F}, j \in \mathbf{G})$ 和 $Q_{GF} = (q_{ij}, i \in \mathbf{G}, j \in \mathbf{F})$ 分别为 Q 在 $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ 和 $\mathbf{G} \times \mathbf{F}$ 上的限制.

(vi)

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \sum_{j \in \mathbf{G}} \eta_{ij}(\lambda)(1 - \xi_{ji}) < +\infty, \quad \forall i \in \mathbf{F}. \quad (2.9)$$

(vii) 存在常数矩阵 $\mathbf{C} = \{c_{ij}; i, j \in \mathbf{F}\}$ 使得

$$\mathbf{A}^{-1}(\lambda) = \mathbf{C} + \lambda \mathbf{I} + \lambda \langle \eta(\lambda), \xi \rangle. \quad (2.10)$$

从而 (2.10) 右式是可逆的, 这里 $\mathbf{C}$ 满足 $c_{ii} \geq 0, c_{ij} \leq 0, i \neq j, i, j \in \mathbf{F}$,

$$-c_{ij} = q_{ij} + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \sum_{k \in \mathbf{G}} \eta_{ik}(\lambda) \xi_{kj}, \quad \forall i, j \in \mathbf{F}, \quad i \neq j, \quad (2.11)$$

$$\sum_{j \in \mathbf{F}} c_{ij} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \sum_{k \in \mathbf{G}} \eta_{ik}(\lambda) \left(1 - \sum_{j \in \mathbf{F}} \xi_{kj}\right), \quad \forall i \in \mathbf{F}. \quad (2.12)$$

(viii) 若 $i \in \mathbf{F}$ 是瞬时态, 即 $q_i = +\infty$, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \sum_{k \in \mathbf{G}} \eta_{ik}(\lambda) \xi_{ki} = +\infty, \quad \forall i \in \mathbf{F}, \quad (2.13)$$

或者, 等价地,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \sum_{k \in \mathbf{G}} \eta_{ik}(\lambda) = +\infty, \quad \forall i \in \mathbf{F}; \quad (2.14)$$

而若 $i \in \mathbf{F}$ 是稳定的, 即 $q_i < \infty$, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \sum_{k \in \mathbf{G}} \eta_{ik}(\lambda) \xi_{ki} < +\infty, \quad (2.15)$$

且

$$q_i = c_{ii} + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \sum_{k \in \mathbf{G}} \eta_{ik}(\lambda) \xi_{ki}, \quad (2.16)$$

这里在 (2.10)–(2.13)、(2.15) 和 (2.16) 出现的 $\xi = \{\xi_{ij}; i \in G, j \in F\}$ 为

$$\xi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \xi(\lambda). \quad (2.17)$$

(2.17) 的极限 ξ 确实存在, 因为 $\xi(\lambda)$ 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时是上升的, 而后者是 (2.5) 的显然推论.

反之, 假定 $Q = (q_{ij}; i, j \in E)$ 为一个拟 Q - 矩阵且 F 为 E 的一个有限子集. 若存在一个 Q_{GG} - 预解函数 $\psi(\lambda)$ 、两个 $\lambda > 0$ 的矩阵函数 $\eta(\lambda)$ 和 $\xi(\lambda)$ 及一个常数矩阵 $C = \{c_{ij}; i, j \in F\}$ 使得 (2.3)–(2.13) 以及 (2.15)–(2.17) 均成立, 这里 $G = E \setminus F$ 且 Q_{GG} 为 Q 在 $G \times G$ 上的限制, 则 Q 是一个 Q - 矩阵, 也就是说, 必定存在一个 Q - 转移函数. 进一步, 若上述的 $\Psi(\lambda)$, $\xi(\lambda)$ 和 $\eta(\lambda)$ 还满足

$$\sum_{k \in F} \xi_{ik}(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{k \in G} \psi_{ik}(\lambda), \quad \forall i \in E, \quad (2.18)$$

且对所有的稳定状态 $i \in F$,

$$\sum_{j \in F} q_{ij} = - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \sum_{k \in G} \eta_{ik}(\lambda), \quad (2.19)$$

那么必存在不中断的 Q - 转移函数. 其相应的 Q - 预解函数 (中断或者不中断) 可由给定的 $\Psi(\lambda)$, $\eta(\lambda)$ 和 $\xi(\lambda)$ 按 (2.5) 以及 (2.10)–(2.17) 诸式再加上常数矩阵 C 构造出来.

证明 基于下述原因我们将略去此定理的证明. 事实上, 对于 F 为单点集的情形, 证明可参见文献 [12, 13]. 至于 F 为多点集的情形, 基于归纳法的一个详细证明可在文献 [14] 中找到. $\square$

应当指出, 该分解定理有明确的概率意义, 它的必要性部分源于周知的首达未离分解综合定理的 Laplace 变换形式. 而 (2.1) 中的 $\Psi(\lambda)$ 就是文献 [9] 中陈述的禁止概率的 Laplace 变换. 还应当指出 (2.1) 中的 $A(\lambda)$ 就是文献 [15] 中所发展的“拟 Markov 链”的描述转移性态函数的 Laplace 变换, 从而是可逆的.

我们还需要这个分解定理的一个重要推论. 该推论特别适用于我们后面对 Kolmogorov 拟 Q - 矩阵的解析. 我们仍假定 Q 为一个保守的定义于可列集 E 上的一个拟 Q - 矩阵, 仍假定 F 为 E 的一个有限子集且 $G = E \setminus F$. 我们将 Q 表为分块形式如下:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{FF} & Q_{FG} \\ Q_{GF} & Q_{GG} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

这里 Q_{FF} 是 Q 在 $F \times F$ 上的限制. 其他子块的意义也确切自明. 现假定 $R(\lambda) = \{r_{ij}(\lambda); \lambda > 0, i, j \in E\}$ 是一个 Q - 预解函数. 我们将 $R(\lambda)$ 也分块表为

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} R_{FF}(\lambda) & R_{FG}(\lambda) \\ R_{GF}(\lambda) & R_{GG}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

其中各子块的意义均自明. 今后我们仅考虑 $R(\lambda)$ 是不中断的情形, 因为对于中断过程的概率性质, 我们极少有兴趣.

我们进一步假定 Q_{GG} 是全稳定的且既为零流入又为零流出. 但对于 F 中的状态, 除保守性外, 我们没有其他要求, 虽然本文的兴趣集中于 F 中的状态均为瞬时的情形.

命题 2.2 设 Q 为定义于 $E = F \cup G$ 上形如 (2.20) 的 Q - 矩阵, 假定 Q_{GG} - 矩阵是全稳定且零流入和零流出的, 则不中断的 Q - 预解式 $R(\lambda)$ 可表为

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda) \\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Psi(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

这里

- (i) $A(\lambda) = R_{FF}(\lambda)$;
- (ii) $\Psi(\lambda)$ 为 Feller 最小 Q_{GG} - 预解式;
- (iii) $\eta(\lambda) = Q_{FG}\Psi(\lambda)$;
- (iv) $\xi(\lambda) = \Psi(\lambda)Q_{GF}$.

进一步, $\xi(\lambda)$ 是 $\lambda > 0$ 的有界 (界为 1) 下降函数, 故当 $\lambda \downarrow 0$ 时, 极限 $\xi(\lambda) \uparrow \xi$ 存在. 矩阵函数 $A(\lambda)$ 对于任意 $\lambda > 0$ 可逆. 且有

$$A^{-1}(\lambda) = C + \lambda I + \lambda \langle \eta(\lambda), \xi \rangle, \quad (2.23)$$

此处常数矩阵 $C = \{c_{ab}; a, b \in F\}$ 具有形式

$$c_{aa} = \sum_{b \in F \setminus \{a\}} q_{ab} + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \sum_{j \in G} \eta_{aj}(\lambda)(1 - \xi_{ja}), \quad a \in F, \quad (2.24)$$

$$c_{ab} = - \left(q_{ab} + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \sum_{j \in G} \eta_{aj}(\lambda) \xi_{jb} \right), \quad a \neq b, \quad a, b \in F. \quad (2.25)$$

反之, 假定给定的拟 Q - 矩阵 Q 具有形式 (2.20) 且其子矩阵 Q_{GG} 为零流出且零流入的, 则 Q 成为一个 Q - 矩阵 (即存在一个 Q - 转移函数) 当且仅当对任意瞬时态 (若有的话) $a \in F$, 我们有对某个 (从而对所有的) $\lambda > 0$,

$$\sum_{j \in G} \sum_{k \in G} q_{ak} \phi_{kj}(\lambda) < \infty, \quad \lambda > 0, \quad (2.26)$$

且对所有 $b \in F \setminus \{a\}$, 有

$$\sum_{k \in G} q_{ak} q_{kb} < \infty. \quad (2.27)$$

另外, 若条件 (2.26) 和 (2.27) 对于任意瞬时态 a 及 b 都满足, 则存在一个唯一的不中断 Q - 转移函数, 其构造可用上述的元素依命题 2.1 的方法构造出来.

下面将用 $\langle a, b \rangle$ 代表两个向量 a 与 b 的内积. 也就是说, 如果 $a = (a_i; i \in E)$ 且 $b = (b_i; i \in E)$, 则 $\langle a, b \rangle = \sum_{i \in E} a_i b_i$. 注意, 我们用相同的记号表示矩阵的乘积, 见 (2.10) 和 (2.23).

证明 本命题是命题 2.1 的直接推论. 事实上, 首先由 (2.1) 立得 (2.22). 而 (i) 仅仅是记号而已, 无须证明. 其次由于 Q 是保守的, 故而容易证明 (2.22) 中的 Q_{GG} - 预解式 $\Psi(\lambda)$ 必满足关于 Q_{GG} 的向后方程组. 但 Q_{GG} 是零流出的, 故 $\Psi(\lambda)$ 必为 Feller 最小预解式. 这得证 (ii). 接下来, 由命题 2.1 中的 (2.3) 和 (2.4) 知, $\eta(\lambda)$ 是一族 (共 $|F|$ 个) 行协调族, 故由行协调族的 Riesz 表现定理^[6] 及 Q_{GG} 为零流入的事实得证 (iii). 同理, 由 (2.5) 和 (2.6) 知, $\xi(\lambda)$ 是一族 (共 $|F|$ 个) 列协调族, 从而, 再由列协调族的 Riesz 表现定理及 Q_{GG} 零流出的事实得到 (iv). 至于 $\xi(\lambda)$ 的单调性及有关极限 $\xi(\lambda) \uparrow \xi$ 存在的事实是显然的. 最后, (2.23)–(2.25) 可由 (2.10)–(2.12) 再加一些计算而得到. 证毕. $\square$

3 Kolmogorov Q - 过程的存在唯一性及构造定理

我们现开始正式讨论在第 1 节中给出的 Kolmogorov 拟 Q - 矩阵. 我们的第一个结果是如下的存在唯一性定理.

定理 3.1 假定 $Q = \{q_{ij}; i, j \in \mathbb{N}\}$ 是一个 Kolmogorov 拟 Q - 矩阵, 则存在一个 Q - 过程 (即 Q 成为一个 Q - 矩阵) 当且仅当下述条件成立,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{1+q_k} < \infty. \quad (3.1)$$

进而, 若 (3.1) 成立, 则存在无穷多个 Q - 过程, 但仅仅只有一个是不中断的.

在给出证明之前, 我们先指出关于条件 (3.1) 的一个重要注释.

注释 3.1 周知条件 (3.1) 等价于如下条件成立,

$$\forall \lambda > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{\lambda + q_k} < \infty, \quad (3.2)$$

因而在下面充分性的证明中, 我们将使用 (3.2).

定理 3.1 的证明 必要性是简单的. 事实上, 若存在一个 Q - 过程, 即便是中断的, 它也有表现形式 (2.1) 或 (2.22). 注意到对于 Kolmogorov Q - 矩阵来说, Q_{GG} 是对角型的, 从而必定零流出且零流入. 故可应用命题 2.2. 另外, 由于 Q_{GG} 是对角型的, 易知 Q_{GG} -Feller 最小预解式 $\Phi(\lambda) = \{\Phi_{ij}(\lambda); i, j \in \mathbb{N}\}$ 必取形式

$$\Phi_{ij}(\lambda) = \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i}. \quad (3.3)$$

现由命题 2.2(iii) 知, $\eta(\lambda) = Q_{FG}\Phi(\lambda)$ 且 $\eta(\lambda)$ 的每一个分量是可和的, 从而, 由 (3.3) 立得 (3.2).

充分性也极易证明. 事实上, 条件 (3.2) 和 (3.3) 保证了命题 2.2 中的 (2.26) 成立. 至于 (2.27), 它更是平凡的. 因为注意一下 Kolmogorov 拟 Q - 矩阵的结构便知, 对于任意的 $a \neq b \in F$, 必有 $\sum_{k \in G} q_{ak}q_{kb} = 0$, 从而, (2.27) 平凡成立. 充分性从而得证.

再由命题 2.2 及 Q_{GG} 的对角矩阵性质, 必定只存在唯一的不中断 Q - 过程. 至于存在无穷多个中断的 Q - 过程是由于有瞬时态存在. 因为易知, 对于有瞬时态的 Q - 过程, 一旦存在, 就必然有无穷多个. 定理证毕. $\square$

作为存在性条件 (3.1) 的第一个推论, 可得出 Kolmogorov Q - 过程的存在性与侯振挺教授的唯一性准则 (参见文献 [16, 17]) 之间的一个有趣关系.

推论 3.1 对于 Kolmogorov Q - 矩阵而言, Q_{GG} - 过程必定不唯一.

证明 由于 Q_{GG} 是对角矩阵, 故由非保守情形的唯一性准则^[16, 17] 知, Q_{GG} 过程唯一当且仅当

$$\sup_{i \in G} q_i < \infty, \quad (3.4)$$

参见文献 [5, 16, 17]. 但若 (3.4) 成立且由 Kolmogorov Q - 矩阵的条件 $\sum_{j=1}^{\infty} h_j = +\infty$ 可知, 必有 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{h_j}{1+q_j} = +\infty$ 与条件 (3.1) 矛盾. 因而, Q_{GG} - 过程必定不唯一. $\square$

若将条件 (3.1) 与 Reuter 对于 $m = 1$ 的存在性条件 (1.4) 作比较, 就会发现我们的条件 (3.1) 弱于 (1.4). 那么何时它们等价? 下面的简单推论回答了这个问题.

推论 3.2 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf h_n > 0$, 则 Kolmogorov 拟 Q - 矩阵成为 Kolmogorov Q - 矩阵当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{q_k} < \infty. \quad (3.5)$$

证明 首先条件 (3.5) 导出条件 (3.1) 是显然的. 故只须说明, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf h_n > 0$, 则 (3.1) 隐含 (3.5). 但易知上述下极限条件加上 (3.1) 隐含

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = \infty.$$

从而,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h_k/q_k}{h_k/(1+q_k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_k}\right) = 1.$$

故而此时 (3.1) 确实导出 (3.5). $\square$

我们指出, 即便对于 $m = 1$ 的情形也不难找出反例说明当 (3.1) 成立时, (3.5) 可以不成立. 当然由于推论 3.2, 这样的反例必须满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf h_n = 0.$$

这里不再列出这样的平凡反例了. 不过由此可以看到, Reuter 的条件 (1.4) 仅仅是存在 Kolmogorov Q -过程的充分条件, 但并非必要. 真正的充要条件是我们的条件 (3.1).

注意到均衡 Kolmogorov 拟 Q -矩阵满足推论 3.2 的条件, 故由推论 3.2 立得下面的结论.

定理 3.2 一个均衡 Kolmogorov 拟 Q -矩阵 Q 成为 Q -矩阵当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k} < \infty,$$

且当此条件成立时, 存在唯一的不中断 Q -过程. 因而, 对于 Kolmogorov 考虑过的 Q -矩阵 (1.1), 条件 (1.3) 确实是存在 Q -过程的充分必要条件.

在 Kolmogorov Q -过程的存在唯一性解决之后, 我们转而讨论由存在性条件保证的那个唯一的不中断 Q -过程的构造. 极其有趣的是, 对这个具有 m 个瞬时态貌似颇为复杂我们知之甚少的 Kolmogorov Q -过程, 在存在性条件 (3.1) 满足的前提下, 其预解函数 $R(\lambda)$ 可以异常清晰明确地表达出来. 这就是下面将要陈述的构造定理. 为此, 将 $R(\lambda) = \{r_{ij}(\lambda); i, j \in \mathbb{N}\}$ 表为分块型矩阵如下:

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} R^{(0,0)}(\lambda) & R^{(0,1)}(\lambda) & R^{(0,2)}(\lambda) & \cdots \\ R^{(1,0)}(\lambda) & R^{(1,1)}(\lambda) & R^{(1,2)}(\lambda) & \cdots \\ R^{(2,0)}(\lambda) & R^{(2,1)}(\lambda) & R^{(2,2)}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

这里每一个 $R^{(i,j)}(\lambda)$ ($i, j \in \mathbb{N}$) 为一个 $m \times m$ 的矩阵函数. 我们将指出如何构造每一个有限子块 $R^{(i,j)}(\lambda)$. 回顾我们的 Q -矩阵 Q 具有形式 (1.8), 其中 $H^{(n)}$ ($n \geq 1$) 和 $Q^{(n)}$ ($n \geq 1$) 均为 $m \times m$ 对角矩阵形如 (1.9) 和 (1.10), 它们均由满足 (1.12)–(1.14) 的已知条件 $\{q_i; i \geq 1\}$ 及 $\{h_i; i \geq 1\}$ 所决定.

令

$$\eta(\lambda) = (\eta^{(1)}(\lambda), \eta^{(2)}(\lambda), \dots, \eta^{(n)}(\lambda), \dots), \quad (3.7)$$

$$\xi(\lambda) = (\xi^{(1)}(\lambda), \xi^{(2)}(\lambda), \dots, \xi^{(n)}(\lambda), \dots)^T, \quad (3.8)$$

这里每一个 $\eta^{(n)}(\lambda)$ ($n \geq 1$) 和 $\xi^{(n)}(\lambda)$ ($n \geq 1$) 均为 $m \times m$ 对角型矩阵, 其形式为

$$\eta^{(n)}(\lambda) = \text{Diag} \left(\frac{h_{nm}}{\lambda + q_{nm}}, \frac{h_{nm+1}}{\lambda + q_{nm+1}}, \dots, \frac{h_{(n+1)m-1}}{\lambda + q_{(n+1)m-1}} \right), \quad n \geq 1, \quad (3.9)$$

$$\xi^{(n)}(\lambda) = \text{Diag}\left(\frac{q_{nm}}{\lambda + q_{nm}}, \frac{q_{nm+1}}{\lambda + q_{nm+1}}, \dots, \frac{q_{(n+1)m-1}}{\lambda + q_{(n+1)m-1}}\right), \quad n \geq 1. \quad (3.10)$$

再令

$$\Phi^{(n)}(\lambda) = \text{Diag}\left(\frac{1}{\lambda + q_{nm}}, \frac{1}{\lambda + q_{nm+1}}, \dots, \frac{1}{\lambda + q_{(n+1)m-1}}\right), \quad n \geq 1. \quad (3.11)$$

最后令

$$b_0(\lambda) = \lambda + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{nm}}{\lambda + q_{nm}} + \sum_{k=1}^{m-1} h_k, \quad (3.12)$$

$$b_i(\lambda) = \lambda + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{nm+i}}{\lambda + q_{nm+i}} + q_i, \quad 1 \leq i \leq m-1. \quad (3.13)$$

现在可以陈述并证明如下重要的构造定理了.

定理 3.3 设 $Q = \{q_{ij}; i, j \in \mathbb{N}\}$ 是形如定义 1.3 中陈述的 Kolmogorov 拟 Q - 矩阵且满足条件 (3.1), 从而存在唯一的不中断 Q - 过程. 则其唯一的不中断 Q - 预解算子 $R(\lambda) = \{r_{ij}(\lambda); i, j \in \mathbb{N}\}$ 可分块表为形如 (3.6) 的形式, 这里

(i) $R^{(0,0)}(\lambda) = \{r_{ij}(\lambda); 0 \leq i, j \leq m-1\}$ 这个 $m \times m$ 矩阵函数形式为

$$r_{00}(\lambda) = \left(b_0(\lambda) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{h_k q_k}{b_k(\lambda)}\right)^{-1}, \quad (3.14)$$

$$r_{0j}(\lambda) = \frac{h_j}{b_j(\lambda)} r_{00}(\lambda), \quad 1 \leq j \leq m-1, \quad (3.15)$$

$$r_{i0}(\lambda) = \frac{q_i}{b_i(\lambda)} r_{00}(\lambda), \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad (3.16)$$

$$r_{ij}(\lambda) = \frac{\delta_{ij}}{b_i(\lambda)} + \frac{q_i h_j}{b_i(\lambda) b_j(\lambda)} r_{00}(\lambda), \quad 1 \leq i, j \leq m-1, \quad (3.17)$$

(3.14)–(3.17) 中的 $b_0(\lambda)$ 及 $b_k(\lambda)$ ($1 \leq k \leq m-1$) 由 (3.12) 和 (3.13) 确定;

(ii)

$$R^{(0,j)}(\lambda) = R^{(0,0)}(\lambda) \eta^{(j)}(\lambda), \quad \forall j \geq 1; \quad (3.18)$$

(iii)

$$R^{(i,0)}(\lambda) = \xi^{(i)}(\lambda) R^{(0,0)}(\lambda), \quad \forall i \geq 1; \quad (3.19)$$

(iv)

$$R^{(i,j)}(\lambda) = \delta_{ij} \Phi^{(i)}(\lambda) + \xi^{(i)}(\lambda) R^{(0,0)}(\lambda) \eta^{(j)}(\lambda), \quad \forall i, j \geq 1, \quad (3.20)$$

(3.18)–(3.20) 中出现的 $\xi^{(i)}(\lambda)$ ($i \geq 1$), $\eta^{(j)}(\lambda)$ ($j \geq 1$) 和 $\Phi^{(i)}(\lambda)$ ($i \geq 1$) 均为对角矩阵函数分别由 (3.9)–(3.11) 确定, 而 $R^{(0,0)}(\lambda)$ 由 (3.14)–(3.17) 决定.

注意, 如果需要, 不难将 (3.18)–(3.20) 表为逐元的形式.

例如, 矩阵等式 (3.18) 的意义是指, 若 $0 \leq i \leq m-1$, $j = km + s$ ($k \geq 1, 0 \leq s \leq m-1$),

$$r_{ij}(\lambda) = r_{is}(\lambda) \frac{h_j}{\lambda + q_j} \equiv r_{is}(\lambda) \frac{h_{km+s}}{q_{km+s}}, \quad (3.21)$$

而 (3.21) 右式中的 $r_{is}(\lambda)$ ($0 \leq i, s \leq m-1$) 由 (3.14)–(3.17) 确定.

同理, 矩阵等式 (3.19) 的意义是指, 若 $i = nm + l$ ($n \geq 1, 0 \leq l \leq m-1$), $0 \leq j \leq m-1$,

$$r_{ij}(\lambda) = \frac{q_i}{\lambda + q_i} r_{lj}(\lambda) \equiv \frac{q_{nm+l}}{\lambda + q_{nm+l}} r_{lj}(\lambda), \quad (3.22)$$

而 (3.22) 中的 $r_{lj}(\lambda)$ ($0 \leq j, l \leq m-1$) 由 (3.14)–(3.17) 确定. 同样不难写出 (3.20) 的分量形式如下: 若 $i = nm + l$, $j = km + s$ ($n, k \geq 1, 0 \leq l, s \leq m-1$),

$$\begin{aligned} r_{ij}(\lambda) &= \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i} + \frac{q_i}{\lambda + q_i} r_{ls}(\lambda) \frac{h_j}{\lambda + q_j} \\ &\equiv \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_{nm+l}} + \frac{q_{nm+l}}{\lambda + q_{nm+l}} \cdot r_{ls}(\lambda) \cdot \frac{h_{km+s}}{\lambda + q_{km+s}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

现在来给出定理 3.3 的证明.

定理 3.3 的证明 如前所述, 记 $F = \{0, 1, \dots, m-1\}$, 则 $G = \mathbb{N} \setminus F = \{m, m+1, m+2, \dots\}$. 注意我们的 Kolmogorov Q - 矩阵是保守的且其在 $G \times G$ 上的限制为对角矩阵. 从而, 我们可以应用命题 2.2 得到, 其不中断的 Kolmogorov Q - 预解式一定有形式 (2.22). 同时, (2.22) 中的 $\Psi(\lambda)$ 必为 Q_{GG} 最小 Feller 预解式 $\Phi(\lambda)$. 再由 Q_{GG} 为对角矩阵的事实立知,

$$\Psi(\lambda) = \Phi(\lambda) = \text{Diag} \left(\frac{1}{\lambda + q_l}, l \geq m \right). \quad (3.24)$$

为方便起见, 如 (3.11) 所示, 定义 $\Phi^{(n)}(\lambda)$ ($\forall n \geq 1$) 为

$$\Phi^{(n)}(\lambda) = \text{Diag} \left(\frac{1}{\lambda + q_{nm}}, \dots, \frac{1}{\lambda + q_{(n+1)m-1}} \right).$$

现由命题 2.2(iii) 知, 在表达式 (2.22) 中 $\eta(\lambda)$ 取形式

$$\eta(\lambda) = Q_{FG} \Phi(\lambda).$$

由定义 1.3 中的 (1.8) 知, $Q_{FG} = (H^{(1)}, H^{(2)}, \dots)$, 这里 $H^{(n)}$ ($\forall n \geq 1$) 取形式 (1.10). 再利用 (3.24) 中的 $\Phi(\lambda)$ 可知, $\eta(\lambda)$ 可表为

$$\eta(\lambda) = (\eta^{(1)}(\lambda), \eta^{(2)}(\lambda), \dots), \quad (3.25)$$

这里对所有的 $n \geq 1$, $\eta^{(n)}(\lambda)$ 为 $m \times m$ 对角矩阵函数且取形式

$$\eta^{(n)}(\lambda) = H^{(n)} \Phi^{(n)}(\lambda) = \text{Diag} \left(\frac{h_{nm}}{\lambda + q_{nm}}, \frac{h_{nm+1}}{\lambda + q_{nm+1}}, \dots, \frac{h_{(n+1)m-1}}{\lambda + q_{(n+1)m-1}} \right). \quad (3.26)$$

同理由命题 2.2(iv) 知, (2.22) 中的 $\xi(\lambda)$ 取形式 $\xi(\lambda) = \Phi(\lambda) Q_{GF}$. 现注意到 $Q_{GF} = (Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots)^T$, 则用上述相同的方法易得

$$\xi(\lambda) = (\xi^{(1)}(\lambda), \xi^{(2)}(\lambda), \dots)^T, \quad (3.27)$$

这里 $\xi^{(n)}(\lambda)$ ($\forall n \geq 1$) 也为 $m \times m$ 对角矩阵函数形如

$$\xi^{(n)}(\lambda) = \Phi^{(n)}(\lambda) Q^{(n)} = \text{Diag} \left(\frac{q_{nm}}{\lambda + q_{nm}}, \frac{q_{nm+1}}{\lambda + q_{nm+1}}, \dots, \frac{q_{(n+1)m-1}}{\lambda + q_{(n+1)m-1}} \right). \quad (3.28)$$

从 (3.27) 和 (3.28), 我们立得

$$\xi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \xi(\lambda) = (I^{(m)}, I^{(m)}, \dots)^T, \quad (3.29)$$

这里 $I^{(m)}$ 为 $m \times m$ 单位矩阵.

现在进一步表出 (2.22) 中的 $A(\lambda)$. 注意由 (2.23), 我们须首先得出 $\lambda\langle\boldsymbol{\eta}(\lambda), \boldsymbol{\xi}\rangle$ 和常数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的具体表达式, 但这容易得到. 事实上, 由 (3.25)、(3.26) 和 (3.29) 易得

$$\lambda\langle\boldsymbol{\eta}(\lambda), \boldsymbol{\xi}\rangle = \text{Diag}(a_{00}(\lambda), a_{11}(\lambda), \dots, a_{m-1, m-1}(\lambda)), \quad (3.30)$$

这里

$$a_{ii}(\lambda) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{nm+i}}{\lambda + q_{nm+i}}, \quad 0 \leq i \leq m-1, \quad (3.31)$$

矩阵 $\boldsymbol{C}$ 也极易得到. 事实上, 由 (2.25) 并注意到 (3.30) 和 $H^{(n)}$ 的对角型型态, 立知 $\forall i \neq j$ ($0 \leq i, j \leq m-1$), 我们有

$$\sum_{k \in G} q_{ik} \xi_{kj} = 0. \quad (3.32)$$

从而, 由 (2.25) 得到 $\forall i \neq j$,

$$c_{ij} = -q_{ij}, \quad 0 \leq i \neq j \leq m-1. \quad (3.33)$$

注意 (3.33) 中的 q_{ij} ($i \neq j$) 即为 $H^{(0)}$ 中的 (i, j) 元素, 从而, 由 (1.11) 立得 $\forall i \neq j$,

$$c_{ij} = \begin{cases} -h_j, & i = 0, \quad 1 \leq j \leq m-1, \\ -q_i, & 0 \leq i \leq m-1, \quad j = 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (3.34)$$

再考虑 c_{ii} 的情形. 现由 (2.24)、(3.26) 和 (3.29) 立得

$$c_{00} = \sum_{j=1}^{m-1} h_j, \quad c_{ii} = q_i, \quad 1 \leq i \leq m-1. \quad (3.35)$$

综合 (3.34) 和 (3.35), 我们得到常数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 取一个极简单的形式如下:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m-1} h_j & -h_1 & -h_2 & \cdots & -h_{m-1} \\ -q_1 & q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -q_2 & 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -q_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & q_{m-1} \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

即

$$c_{ij} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m-1} h_j, & i = 0, \quad j = 0, \\ -h_j, & i = 0, \quad 1 \leq j \leq m-1, \\ -q_i, & 1 \leq i \leq m-1, \quad j = 0, \\ q_i, & 1 \leq i \leq m-1, \quad j = i, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (3.37)$$

现由 (2.23) 并考虑到 (3.30)、(3.31) 和 (3.37) 立得

$$(A^{-1}(\lambda))_{ij} = \begin{cases} b_0(\lambda), & i = j = 0, \\ -h_j, & i = 0, \quad 1 \leq j \leq m-1, \\ -q_i, & 1 \leq i \leq m-1, \quad j = 0, \\ b_i(\lambda), & 1 \leq i \leq m-1, \quad j = i, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (3.38)$$

(3.38) 中的 $b_0(\lambda)$ 和 $b_i(\lambda)$ ($1 \leq i \leq m-1$) 分别取表达式 (3.12) 和 (3.13).

为寻求 $A(\lambda)$ 的确切表达式, 我们首先由 (3.38) 容易得到

$$|A^{-1}(\lambda)| = \prod_{i=0}^{m-1} b_i(\lambda) - \sum_{k=1}^{m-1} h_k q_k \prod_{l=1, l \neq k}^{m-1} b_l(\lambda).$$

为方便起见, 我们将此行列式写成更齐整的形式如下:

$$|A^{-1}(\lambda)| = \left(b_0(\lambda) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{h_k q_k}{b_k(\lambda)} \right) \prod_{l=1}^{m-1} b_l(\lambda). \quad (3.39)$$

再注意 $A^{-1}(\lambda)$ 的 $(0,0)$ 元素的代数余子式为 $\prod_{l=1}^{m-1} b_l(\lambda)$, 我们立即得到 $A(\lambda)$ 的 $(0,0)$ 元素为

$$A_{00}(\lambda) = \left(b_0(\lambda) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{h_k q_k}{b_k(\lambda)} \right)^{-1}. \quad (3.40)$$

进一步, 对于 $1 \leq j \leq m-1$, 我们由 (3.38) 也容易得到 $A^{-1}(\lambda)$ 的 $(j,0)$ 元素的代数余子式为 $\frac{h_j}{b_j(\lambda)} \prod_{l=1}^{m-1} b_l(\lambda)$, 从而, $A(\lambda)$ 的 $(0,j)$ 元素为

$$A_{0j}(\lambda) = \frac{h_j}{b_j(\lambda)} \left(b_0(\lambda) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{h_k q_k}{b_k(\lambda)} \right)^{-1} = \frac{h_j}{b_j(\lambda)} A_{00}(\lambda). \quad (3.41)$$

类似地容易得到, 对于 $1 \leq i \leq m-1$,

$$A_{i0}(\lambda) = \frac{q_i}{b_i(\lambda)} A_{00}(\lambda). \quad (3.42)$$

最后对于 $1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq m-1$, 从 (3.38) 出发并经过一些数学计算, 不难得到一个齐整的形式如下:

$$A_{ij}(\lambda) = \frac{\delta_{ij}}{b_i(\lambda)} + \frac{q_i h_j}{b_i(\lambda) b_j(\lambda)} A_{00}(\lambda). \quad (3.43)$$

确实地, 为得到 (3.43), 我们将 $A^{-1}(\lambda)$ 和 $A(\lambda)$ 分块分别表成如下形式:

$$A^{-1}(\lambda) = \begin{bmatrix} b_0(\lambda) & \overline{H} \\ \overline{Q} & D(\lambda) \end{bmatrix}, \quad A(\lambda) = \begin{bmatrix} r_{00}(\lambda) & X(\lambda) \\ Y(\lambda) & Z(\lambda) \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

这里

$$\overline{H} = (-h_1, -h_2, \dots, -h_{m-1}), \quad \overline{Q} = (-q_1, -q_2, \dots, -q_{m-1})^T, \quad (3.45)$$

$$D(\lambda) = \text{Diag}(b_1(\lambda), b_2(\lambda), \dots, b_{m-1}(\lambda)), \quad (3.46)$$

而 $X(\lambda)$ 和 $Y(\lambda)$ 已由 (3.41) 和 (3.42) 分别确定. 现由 (3.44) 和关系

$$A^{-1}(\lambda)A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{m-1} \end{bmatrix}$$

立得

$$\overline{Q}X(\lambda) + D(\lambda)Z(\lambda) = I_{m-1}. \quad (3.47)$$

从而,

$$Z(\lambda) = D^{-1}(\lambda)I_{m-1} - D^{-1}(\lambda)\overline{Q}X(\lambda). \quad (3.48)$$

注意到

$$(\overline{Q}X(\lambda))_{ij} = -q_i \frac{h_j}{b_j(\lambda)} A_{00}(\lambda), \quad 1 \leq i, j \leq m-1,$$

并利用 (3.46) 立得 $\forall 1 \leq i, j \leq m-1$, 我们有

$$Z_{ij}(\lambda) = \frac{\delta_{ij}}{b_i(\lambda)} + \frac{q_i h_j}{b_i(\lambda) b_j(\lambda)} A_{00}(\lambda). \quad (3.49)$$

而 (3.49) 正是我们需要的 (3.43).

现若回顾一下命题 2.2 中的 (2.22), 即知 $A(\lambda)$ 就是 Kolmogorov 预解函数在 $F \times F$ 上的限制, 从而, 由 (3.40)–(3.43) 立得 (3.14)–(3.17). 本定理的 (i) 从而得证.

再次回顾一下 (2.22) 中的 $A(\lambda)\eta(\lambda)$, 则由已得的 $A(\lambda)$ 的表达式以及 (3.25) 和 (3.26), 可知 (3.18) 得证.

类似地, 对于 (2.22) 中的 $\xi(\lambda)A(\lambda)$, 由 (3.27) 和 (3.28) 再加上 $A(\lambda)$ 的表达式, 我们立得 (3.19) 成立.

最后, 由上述诸关系加上 (3.24) 中的 $\Phi(\lambda)$, 再考虑 (2.22) 的基本构造, 可知 (3.20) 成立. 定理全部得证. $\square$

现若在定理 3.3 中令所有的 $h_j \equiv 1$ ($j \geq 1$), 则立得下面的重要推论.

推论 3.3 对于均衡 Kolmogorov Q - 矩阵 Q , 存在 Kolmogorov Q - 过程的充分必要条件是

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{q_j} < \infty. \quad (3.50)$$

当 (3.50) 满足时, 存在唯一的不中断的均衡 Kolmogorov Q - 过程, 同时有无穷多个中断的 Q - 过程, 这个唯一的不中断均衡 Kolmogorov Q - 过程的预解算子可表示为 (3.6) 中的分块形式, 其中

(i) $R^{(00)}(\lambda) = \{r_{ij}(\lambda); 0 \leq i, j \leq m-1\}$ 为

$$r_{00}(\lambda) = \left(b_0(\lambda) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{q_k}{b_k(\lambda)} \right)^{-1}, \quad (3.51)$$

$$r_{0j}(\lambda) = \frac{1}{b_j(\lambda)} r_{00}(\lambda), \quad 1 \leq j \leq m-1, \quad (3.52)$$

$$r_{i0}(\lambda) = \frac{q_i}{b_i(\lambda)} r_{00}(\lambda), \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad (3.53)$$

$$r_{ij}(\lambda) = \frac{\delta_{ij}}{b_i(\lambda)} + \frac{q_i}{b_i(\lambda)b_j(\lambda)}r_{00}(\lambda), \quad (3.54)$$

(3.51)–(3.54) 中的 $b_i(\lambda)$ 定义如下:

$$b_0(\lambda) = \lambda + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda + q_{nm}} + m - 1, \quad (3.55)$$

$$b_i(\lambda) = \lambda + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda + q_{nm+i}} + q_i, \quad 1 \leq i \leq m-1; \quad (3.56)$$

(ii) 对于 $j \geq 1$,

$$R^{(0,j)}(\lambda) = R^{(0,0)}(\lambda)\eta^{(j)}(\lambda), \quad (3.57)$$

这里

$$\eta^{(j)}(\lambda) = \text{Diag}\left(\frac{1}{\lambda + q_{jm}}, \frac{1}{\lambda + q_{jm+1}}, \dots, \frac{1}{\lambda + q_{(j+1)m-1}}\right); \quad (3.58)$$

(iii) 对于 $i \geq 1$, $R^{(i,0)}(\lambda) = \xi^{(i)}(\lambda)R^{(0,0)}(\lambda)$, 这里

$$\xi^{(i)}(\lambda) = \text{Diag}\left(\frac{q_{im}}{\lambda + q_{im}}, \frac{q_{im+1}}{\lambda + q_{im+1}}, \dots, \frac{q_{(i+1)m-1}}{\lambda + q_{(i+1)m-1}}\right); \quad (3.59)$$

(iv) 对于 $1 \leq i, j \leq m-1$,

$$R^{(i,j)}(\lambda) = \delta_{ij}\Phi^{(i)}(\lambda) + \xi^i(\lambda)R^{(0,0)}(\lambda)\eta^{(j)}(\lambda), \quad (3.60)$$

此处 $\Phi^{(i)}(\lambda)$ 由 (3.11) 确定, 而 $\xi^{(i)}(\lambda)$, $R^{(0,0)}(\lambda)$ 和 $\eta^{(j)}(\lambda)$ 分别由 (3.59)、(3.51)–(3.54) 和 (3.58) 唯一确定.

4 遍历性与极限分布

本节讨论 Kolmogorov Q -过程的遍历性质. 首先注意到定义 1.4 中的 (1.12) 和 (1.13) 两式保证了任意 Kolmogorov Q -矩阵是不可约的. 再从 Kolmogorov Q -过程的构造定理 (即定理 3.3) 易知, 那个唯一的不中断 Kolmogorov Q -过程也是不可约的, 即整个状态空间组成了一个互通类. 这给我们研究遍历性质提供了极大方便.

我们的第一个结果指出, 由定理 3.3 构造的唯一不中断 Kolmogorov Q -过程必定是常返的.

定理 4.1 对于由定义 1.3 给定的 Kolmogorov Q -矩阵 Q 所决定的唯一不中断 Kolmogorov Q -过程必定是常返的.

证明 由上面指出的互通性, 只须证明

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} r_{00}(\lambda) = \infty. \quad (4.1)$$

注意到 $r_{00}(\lambda)$ 由 (3.14) 给出, 因而为证 (4.1), 只须证明

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(b_0(\lambda) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{h_k q_k}{b_k(\lambda)} \right) = 0, \quad (4.2)$$

但 (4.2) 是显然的. 确实地, 首先由 (3.12) 我们容易得到

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} b_0(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\lambda + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{nm}}{\lambda + q_{nm}} + \sum_{k=1}^{m-1} h_k \right) = \sum_{k=1}^{m-1} h_k. \quad (4.3)$$

当然, 为得到 (4.3) 的第二个等式, 我们应用了过程的存在性条件 (3.1) 所保证的事实, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{nm}}{\lambda + q_{nm}} < \infty$. 其次由 (3.13),

$$b_i(\lambda) = \lambda + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{nm+i}}{\lambda + q_{nm+i}} + q_i, \quad 1 \leq i \leq m-1. \quad (4.4)$$

同样, 由于存在性条件保证了 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{nm+i}}{\lambda + q_{nm+i}} < \infty, \forall 1 \leq i \leq m-1$. 从而, 在 (4.4) 中令 $\lambda \rightarrow 0$, 可立即得到

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} b_i(\lambda) = q_i, \quad 1 \leq i \leq m-1. \quad (4.5)$$

(4.3) 和 (4.5) 共同保证了

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(b_0(\lambda) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{h_k q_k}{b_k(\lambda)} \right) = \sum_{k=1}^{m-1} h_k - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{h_k q_k}{q_k} = 0. \quad (4.6)$$

从而 (4.2) 及等价的 (4.1) 成立. 定理证毕. $\square$

下面讨论正常返性.

定理 4.2 由定义 1.3 给定的 Kolmogorov Q - 矩阵 Q 所决定的唯一不中断 Kolmogorov Q - 过程正常返当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{q_k} < \infty. \quad (4.7)$$

证明 由互通性, Kolmogorov Q - 过程正常返当且仅当

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda r_{00}(\lambda) > 0, \quad (4.8)$$

而由 $r_{00}(\lambda)$ 的表达式 (3.14) 知, Kolmogorov Q - 过程正常返当且仅当

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{b_0(\lambda) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{h_k q_k}{b_k(\lambda)}}{\lambda} < \infty, \quad (4.9)$$

但由 $b_0(\lambda)$ 的表达式 (3.12) 知,

$$\frac{b_0(\lambda)}{\lambda} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{nm}}{\lambda + q_{nm}} + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{m-1} h_k. \quad (4.10)$$

因而为探究 (4.9) 左式的性态, 我们集中讨论一下表达式

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{m-1} h_k - \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{h_k q_k}{b_k(\lambda)}, \quad (4.11)$$

但易知 (4.11) 可变形为 $\sum_{k=1}^{m-1} h_k \frac{b_k(\lambda) - q_k}{\lambda b_k(\lambda)}$. 将 (3.13) 的 $b_k(\lambda)$ ($1 \leq k \leq m-1$) 代入上式后, (4.11) 成为

$$\sum_{k=1}^{m-1} h_k \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{nm+k}}{\lambda + q_{nm+k}}}{b_k(\lambda)}. \quad (4.12)$$

若在 (4.12) 中令 $\lambda \rightarrow 0$, 并注意到 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} b_k(\lambda) = q_k$ ($1 \leq k \leq m-1$) 的事实 (见 (4.5)), 我们立得

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{k=1}^{m-1} h_k - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{h_k q_k}{b_k(\lambda)} \right) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{h_k}{q_k} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{nm+k}}{q_{nm+k}} \right). \quad (4.13)$$

(4.13) 和 (4.10) 共同将导出 (4.9) 左式的性态, 即我们有

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{b_0(\lambda) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{h_k q_k}{b_k(\lambda)}}{\lambda} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{nm}}{q_{nm}} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{h_k}{q_k} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{nm+k}}{q_{nm+k}} \right). \quad (4.14)$$

注意到约定 (1.16), 则 (4.14) 右式可表为一个极其整齐的形式如下:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\lambda r_{00}(\lambda))^{-1} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h_k}{q_k} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{nm+k}}{q_{nm+k}} \right). \quad (4.15)$$

从而, Kolmogorov Q -过程正常返当且仅当

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{h_k}{q_k} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{nm+k}}{q_{nm+k}} \right) < \infty. \quad (4.16)$$

但易知 (4.16) 成立当且仅当 $\sum_{k=m}^{\infty} \frac{h_k}{q_k} < \infty$. 这证明了我们的最后结论, 唯一的不中断 Kolmogorov Q -过程正常返当且仅当 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{q_k} < \infty$. $\square$

下面进一步讨论在正常返条件满足的前提下, 极限分布的明显表达式问题. 再次注意, 我们已有约定 (1.16), 即

$$h_0 = q_0 = 1. \quad (4.17)$$

定理 4.3 在正常返条件 (4.7) (等价地, 条件 (4.16)) 下, Kolmogorov Q -过程的极限分布 $\{u_j; j \geq 0\}$ 可如下得到,

(i) 若 $0 \leq j \leq m-1$,

$$u_j = \frac{1}{d} \frac{h_j}{q_j}, \quad 0 \leq j \leq m-1; \quad (4.18)$$

(ii) 若 $j \geq m$, 则必定存在正整数 $n \geq 1$ 和正整数 k ($0 \leq k \leq m-1$) 使得 $j = nm + k$, 则此时,

$$u_j = \frac{1}{d} \cdot \frac{h_k}{q_k} \cdot \frac{h_{nm+k}}{q_{nm+k}} \quad (4.19)$$

在 (4.18) 和 (4.19) 中,

$$d = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h_k}{q_k} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{nm+k}}{q_{nm+k}} \right) \quad (4.20)$$

在 (4.18)–(4.20) 中, 我们已使用约定 (1.16).

证明 由于唯一的不中断 Kolmogorov Q -过程是不可约, 不中断且正常返的, 故而极限分布必定存在. 我们只须将极限分布表达出来. 记此极限分布为 $\{u_j; j \geq 0\}$, 周知 $u_j = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda r_{0j}(\lambda)$. 注意在 (4.15) 中, 我们已经得到了

$$u_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda r_{00}(\lambda) = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{h_k}{q_k} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{nm+k}}{q_{nm+k}} \right) \right]^{-1}. \quad (4.21)$$

为记号简单起见, 令 $d = \frac{1}{u_0}$, 即 d 为 (4.21) 最左端项的倒数. 由 (3.15) 和 (4.5) 知, 对于 $1 \leq j \leq m-1$,

$$u_j = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda r_{0j}(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{h_j}{b_j(\lambda)} \cdot \lambda r_{00}(\lambda) = \frac{h_j}{q_j} \cdot \frac{1}{d}; \quad (4.22)$$

对于 $j \geq m$, 我们一定可以找到正整数 $n \geq 1$ 及正整数 $k = 0, 1, \dots, m-1$ 使得 $j = nm + k$, 我们的目标是找到 $u_j \equiv u_{nm+k}$ 的表达式. 注意由定理 3.3 的 (3.18) 知, 对于 $j = nm + k$, 我们有 $r_{0j}(\lambda) = r_{0k}(\lambda) \cdot \frac{h_{nm+k}}{\lambda + q_{nm+k}}$. 从而,

$$u_j = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda r_{0j}(\lambda) = \frac{1}{d} \cdot \frac{h_k}{q_k} \cdot \frac{h_{nm+k}}{q_{nm+k}}, \quad 0 \leq k \leq m-1. \quad (4.23)$$

定理得证. $\square$

若令 $h_j \equiv 1$, 则我们又得到如下推论.

推论 4.1 对于均衡 Kolmogorov 拟 Q - 矩阵 Q , 存在均衡 Kolmogorov Q - 过程当且仅当

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i} < \infty. \quad (4.24)$$

当 (4.24) 满足时, 存在一个唯一的不中断均衡 Kolmogorov Q - 过程. 此唯一的不中断 Q - 过程是正常返的 (从而当然常返) 且其极限分布 $\{u_j; j \geq 0\}$ 可表为如下:

(i) 若 $0 \leq j \leq m-1$, 则

$$u_j = \frac{1}{q_j} \cdot \frac{1}{d}; \quad (4.25)$$

(ii) 若 $j \geq m$, 则必定存在正整数 n ($n \geq 1$) 及 $0 \leq k \leq m-1$ 使得 $j = nm + k$, 且此时,

$$u_j = \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{q_k} \cdot \frac{1}{q_{nm+k}}, \quad (4.26)$$

这里

$$d = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{q_k} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_{nm+k}} \right), \quad (4.27)$$

并注意约定 (1.16).

5 弱可配称性与可逆性

对于 Q - 矩阵和 Q - 过程的弱可配称性及可逆性的基本概念及重要结果, 文献 [18] 中有详尽论述, 我们这里将直接引用该书的结果. 特别地, 该书中的一个重要结果如下.

命题 5.1 假定定义于 $E \times E$ 上的一个 Q - 矩阵 Q (未必全稳定) 是不可约的, 则如下结论等价:

- (i) Q 是弱可配称的;
- (ii) Q 是零同的且与路径无关;
- (iii) Q 是零同的且 Q 中的任意闭路符合 Kolmogorov 闭路准则;
- (iv) Q 是零同的且 Q 中任何没有重复点的任意闭路符合 Kolmogorov 闭路准则.

当 (ii)–(iv) 中的任一个条件满足时, 其唯一的一个弱可配称序列 $\{\pi_j, j \in E\}$ 可如下得到.

固定 $i_0 \in E$, 令 $\pi_{i_0} = 1$, 对任意 $j \in E \setminus \{i_0\}$, 找出从 i_0 至 j 的一条路径 (通常取最短路径) $(i_0, i_1, \dots, i_n, j)$ (由 Q 的不可约性, 这样的路径必定存在), 然后令

$$\pi_j = \frac{q_{i_0 i_1} \cdot q_{i_1 i_2} \cdots q_{i_{n-1} i_n} \cdot q_{i_n j}}{q_{j i_n} \cdot q_{i_n i_{n-1}} \cdots q_{i_2 i_1} \cdot q_{i_1 i_0}}. \quad (5.1)$$

注意由于路径无关性, 由 (5.1) 定义的 π_j 是唯一确定的. 命题 5.1 的证明可参见文献 [7, 18].

现在将命题 5.1 应用于 Kolmogorov Q - 矩阵, 立得任意 Kolmogorov Q - 矩阵 Q 是弱可配称的. 这是由于首先由 Kolmogorov Q - 矩阵 Q 的性态立知 Q 是零同的, 其次易知 Q 是路径无关的. 为说明路径无关性, 注意如下事实: 首先由于 Q_{GG} 是对角矩阵, 从而, 任意两个状态 $i \neq j$, 且 $i \geq m, j \geq m$ 均是不能直达的; 其次也容易看出, 对于任意 $1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq m-1, i \neq j$ 也是不能相互直达的; 第三对于任意给定的正整数 k ($0 \leq k \leq m-1$), 则状态类 $\{nm+k; n=0, 1, 2, \dots\}$ 组成一个互通子类; 最后使整个状态空间互通的“中心”是状态 0. 由以上事实立知, Q 确实是路径无关的. 由上述诸事实也容易看到, Q 的弱可配称列必为下述定理所述.

定理 5.1 任意 Kolmogorov Q - 矩阵 Q 是不可约且弱可配称的, 其唯一 (不计常数倍数) 的弱可配称序列可如下构造:

(i) 对于 $0 \leq j \leq m-1$,

$$\pi_j = \frac{h_j}{q_j}; \quad (5.2)$$

(ii) 对于 $j \geq m$, 必可找到两个正整数 $n \geq 1$ 和 k ($0 \leq k \leq m-1$), 使得 $j = nm+k$, 此时有

$$\pi_j = \pi_{nm+k} = \frac{h_k}{q_k} \cdot \frac{h_{nm+k}}{q_{nm+k}}. \quad (5.3)$$

其次 Kolmogorov Q - 矩阵 Q 可配称当且仅当

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{h_k}{q_k} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{nm+k}}{q_{nm+k}} \right) < \infty, \quad (5.4)$$

或等价地

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k}{q_k} < \infty. \quad (5.5)$$

在 (5.2)、(5.4) 和 (5.5) 中, 我们已经如 (1.16) 约定 $h_0 = q_0 = 1$.

证明 (5.4) 与 (5.5) 的等价性是显然的. 其他方面的证明见定理陈述前的说明. $\square$

在 (5.2)–(5.5) 中, 令 $h_j \equiv 1$, 则得到关于均衡 Kolmogorov Q - 矩阵的结果. 由于下面将提及的原因, 我们这里只考虑可配称情形.

推论 5.1 均衡 Kolmogorov Q - 矩阵 Q 可配称当且仅当

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q_k} < \infty. \quad (5.6)$$

当 (5.6) 成立时, 均衡 Kolmogorov Q - 矩阵 Q 存在唯一的 (不计常数因子) 可配称分布, 其形式可表示如下:

$$\pi_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q_k} \right)^{-1}, \quad (5.7)$$

$$\pi_j = \pi_0(q_j)^{-1}, \quad 1 \leq j \leq m-1; \quad (5.8)$$

当 $j \geq m$ 时, 存在正整数 $n \geq 1$ 和整数 k ($0 \leq k \leq m-1$) 使得 $j = nm + k$, 且此时,

$$\pi_j = \pi_0(q_k \cdot q_{nm+k})^{-1}. \quad (5.9)$$

证明是显然的.

我们现转而讨论 Kolmogorov 过程的可配称性和可逆性. 一个基本结果如下.

定理 5.2 对于任意给定的 Kolmogorov Q - 矩阵 Q , 存在不中断弱可配称 Q - 过程的充要条件是

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{h_j}{1+q_j} < \infty. \quad (5.10)$$

当条件 (5.10) 满足时, 存在唯一的不中断弱可配称 Q - 过程. 进一步, 存在可逆 Q - 过程的充要条件是

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{h_j}{q_j} < \infty. \quad (5.11)$$

而当 (5.11) 满足时, 存在唯一的可逆 Q - 过程.

证明 条件 (5.10) 和 (5.11) 的必要性是显然的. 事实上, (5.10) 本来就是存在 Q - 过程的充要条件 (见定理 3.1), 从而, 若存在不中断弱可配称 Q - 过程, (5.10) 自然是必须成立的. 进一步, 若存在可逆 Q - 过程, 则它必然是可配称的. 然如全稳定情形完全一样, 容易证明其 Q - 矩阵也必定可配称 (事实上, 在讨论弱可配称性及可逆性时, Q - 矩阵 Q 的对角线元不起任何作用). 但由定理 5.1, Kolmogorov Q - 矩阵 Q 可配称的充要条件是 (5.5) 成立, 而 (5.5) 即为 (5.11), 因而, (5.11) 必然成立.

现往证充分性. 首先假定 (5.10) 成立, 由定理 3.1 存在唯一的不中断 Q - 过程, 其构造如定理 3.3 所述. 现只须说明定理 3.3 中所构造的唯一不中断的 Q - 过程必弱可配称即可. 为此, 只需说明对于定理 3.3 中所构造的 Q - 预解算子, 记作 $R(\lambda) = \{r_{ij}(\lambda); i, j \in \mathbb{N}\}$, 必定满足

$$\pi_i r_{ij}(\lambda) = \pi_j r_{ji}(\lambda), \quad \forall i, j \in \mathbb{N}, \quad (5.12)$$

这里 $\{\pi_j; j \in \mathbb{N}\}$ 由 (5.2) 和 (5.3) 决定. 我们分五步来证明 (5.12).

第 1 步 我们首先证明

$$\pi_0 r_{0j}(\lambda) = \pi_j r_{j0}(\lambda), \quad 1 \leq j \leq m-1. \quad (5.13)$$

事实上, 由 $\pi_0 = 1$ 及 $\pi_j = \frac{h_j}{q_j}$ ($1 \leq j \leq m-1$), 故根据 (3.15), (5.13) 左端即为

$$r_{0j}(\lambda) = \frac{h_j}{b_j(\lambda)} r_{00}(\lambda) = \frac{h_j}{q_j} \cdot \frac{q_j}{b_j(\lambda)} r_{00}(\lambda) = \pi_j \cdot \frac{q_j}{b_j(\lambda)} r_{00}(\lambda). \quad (5.14)$$

而由 (3.16), 立知 (5.14) 的最右端即为 (5.13) 的右式, (5.13) 从而得证.

第 2 步 往证 $\forall 1 \leq i, j \leq m-1$ 且 $i \neq j$, (5.12) 必定成立. 事实上由 (3.17)、(5.2) 和 (5.3) 可知, (5.12) 的左端为

$$\frac{h_i}{q_i} \cdot \frac{q_i h_j}{b_i(\lambda) b_j(\lambda)} \cdot r_{00}(\lambda) = \frac{h_j}{q_j} \cdot \frac{q_j h_i}{b_i(\lambda) b_j(\lambda)} \cdot r_{00}(\lambda). \quad (5.15)$$

现再由 (3.17)、(5.2) 和 (5.3) 诸式立知, (5.15) 的右端即为 (5.12) 的右端, 从而, (5.12) 对于 $1 \leq i, j \leq m-1$ 成立.

第 3 步 我们证明 $\forall 0 \leq i \leq m-1, j \geq m$, (5.12) 仍成立. 由于 $j \geq m$, 可假定 $j = km + s$, 其中 k 和 s 分别满足 $k \geq 1$ 和 $0 \leq s \leq m-1$. 由于 $0 \leq i \leq m-1, 0 \leq s \leq m-1$, 由前两步证明可知,

$$\pi_i \cdot r_{is}(\lambda) = \pi_s \cdot r_{si}(\lambda). \quad (5.16)$$

联合 (5.16)、(3.15) 和 (3.16) 知, (5.12) 的左端可化为

$$\pi_i \cdot r_{is}(\lambda) \cdot \frac{h_j}{\lambda + q_j} = \pi_s \cdot r_{si}(\lambda) \cdot \frac{h_j}{\lambda + q_j} = \frac{h_s}{q_s} \cdot \frac{h_j}{q_j} \cdot \frac{q_j}{\lambda + q_j} \cdot r_{si}(\lambda). \quad (5.17)$$

注意到 (5.3) 和 (3.15)–(3.17), 我们立即得出 (5.17) 的右端即为 (5.12) 的右端. 第 3 步得证.

第 4 步 用与第 3 步完全相同的方法易证 (5.12) 对于 $i \geq m, 0 \leq j \leq m-1$ 亦成立. 这完成了第 4 步的证明. 其实第 4 步完全是第 3 步的推论.

第 5 步 往证 (5.12) 对于 $i \geq m, j \geq m$ 且 $i \neq j$ 仍成立. 由于 $i \geq m, j \geq m$, 不妨假设 $i = nm + l$, $j = km + s$, 这里 $n \geq 1, k \geq 1$ 以及 $0 \leq s \leq m-1, 0 \leq l \leq m-1$. 现由 (3.20) (或等价地 (3.23)) 和 (5.3) 及 $i \neq j$ 可知, (5.12) 左端为 $\frac{h_l}{q_l} \cdot \frac{h_i}{q_i} \cdot \frac{q_i}{\lambda + q_i} \cdot r_{ls}(\lambda) \cdot \frac{h_j}{\lambda + q_j}$. 现由已证明的 (5.16) 可知上式 (即 (5.12) 左端) 即为

$$\frac{h_s}{q_s} \cdot \frac{h_j}{q_j} \cdot \frac{q_j}{\lambda + q_j} \cdot r_{sl}(\lambda) \cdot \frac{h_i}{\lambda + q_i}, \quad (5.18)$$

再次由 (3.20) (或等价地 (3.23)) 和 (5.3), 我们立即得出 (5.18) 就是 (5.12) 的右端.

以上五步合在一起最终证明了 (5.12) 对各种情形均成立. 从而, 不中断的 Kolmogorov Q -过程确实是弱可配称的.

最后当条件 (5.11) 满足时, 我们知道 Kolmogorov Q -过程是可配称的. 再由其不可约性和不中断性, 立知 Kolmogorov Q -过程是可逆的, 且可逆 Q -过程必定唯一. 这最终完成了本定理的证明. $\square$

将定理 5.2 和推论 5.1 应用于均衡 Kolmogorov Q -矩阵, 立得如下结果.

推论 5.2 对于均衡 Kolmogorov Q -矩阵 Q , 存在可逆 Q -过程当且仅当

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{q_j} < \infty. \quad (5.19)$$

进一步, 当 (5.19) 成立时, 存在唯一的可逆 Q -过程. 这个唯一的可逆 Q -过程的平稳分布 $\{u_j; j \geq 0\}$ 具有如下形式:

(i) 若 $0 \leq j \leq m-1$, 则

$$u_j = (dq_j)^{-1}; \quad (5.20)$$

(ii) 若 $j \geq m$, 则存在 $n \geq 1, 0 \leq k \leq m$ 使得 $j = nm + k$, 此时,

$$u_j = (dq_k q_j)^{-1} \equiv (dq_k q_{nm+k})^{-1}, \quad (5.21)$$

这里

$$d = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{q_k} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_{nm+k}} \right) < \infty. \quad (5.22)$$

而在 (5.20)–(5.22) 中, 我们已约定 $q_0 = 1$.

证明 显然. 只须注意一个简单事实, 即 (5.19) 成立当且仅当 (5.22) 成立. $\square$

致谢 本文通信作者陈安岳师从侯振挺教授至今已逾 37 年, 获益匪浅, 终生受益. 怀着最深切的感激之情, 特献此文恭贺侯振挺老师 80 华诞! 衷心祝愿侯老师福如东海、寿比南山!

参考文献

- 1 Kolmogorov A N. On the differentiability of the transition probabilities in stationary Markov processes with a denumerable number of states (in Russian). *Moskov Gos Univ Učeny Zapiski Matematika*, 1951, 148: 53–59
- 2 Kendall D G, Reuter G E H. Some pathological Markov processes with a denumerable infinity of states and the associated semigroups of operators on $\mathcal{L}$. In: *Proceedings of the National Conference on Mathematical*, vol. III. Amsterdam: North-Holland, 1954, 377–415
- 3 Reuter G E H. Remarks on a Markov chain example of Kolmogorov. *Z Wahrsch Verw Geb*, 1969, 13: 315–320
- 4 陈木法. 跳过程与粒子系统. 北京: 北京师范大学出版社, 1986
- 5 侯振挺, 郭青峰. 齐次可列马尔科夫过程. 北京: 科学出版社, 1978
- 6 杨向群. 可列马尔科夫过程构造论. 第二版. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1986
- 7 Anderson W. *Continuous-Time Markov Chains: An Applications-Oriented Approach*. New York: Springer-Verlag, 1991
- 8 Chen M F. *From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems*. Singapore: World Scientific, 1992
- 9 Chung K L. *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*. 2nd ed. New York: Springer, 1967
- 10 Feller W. On the integro-differential equations of purely discontinuous Markov processes. *Trans Amer Math Soc*, 1940, 48: 488–515
- 11 Doob J L. Markov chains—Denumerable case. *Trans Amer Math Soc*, 1945, 58: 455–473
- 12 Chen A Y, Renshaw E. Markov branching processes with instantaneous immigration. *Probab Theory Related Fields*, 1990, 87: 209–240
- 13 Chen A Y, Renshaw E. Existence and uniqueness criteria for conservative uni-instantaneous denumerable Markov processes. *Probab Theory Related Fields*, 1993, 94: 427–456
- 14 侯振挺, 邹捷中, 张汉君, 等. 马尔可夫过程的 Q -矩阵问题. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1994
- 15 Kingman J F C. *Regenerative Phenomena*. London: Wiley, 1972
- 16 侯振挺. Q -过程唯一性准则. *中国科学*, 1974, 2: 115–130
- 17 侯振挺. Q -过程的唯一性准则. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1982
- 18 钱敏, 侯振挺, 陈木法, 等. 可逆马尔可夫过程. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1979

Resolvent decomposition theorems and Kolmogorov Q -process

LU Ying, CHEN AnYue & DU Li

Abstract The main aim of this paper is to use the resolvent decomposition theorems to analysing the Kolmogorov Q -process which has finitely many instantaneous states. After obtaining an elegant condition for existence and uniqueness, we focus on discussing all kinds of properties of such subtle process. In particular, we show that the Kolmogorov Q -process is always recurrent and then an easy-checking condition for positive recurrence is obtained. The closed form for the limiting distribution is explicitly expressed. The symmetry and reversibility of such process are also discussed and well-answered.

Keywords continuous-time Markov chains, Q -matrix, instantaneous states, existence, uniqueness, recurrence, ergodicity, reversibility

MSC(2010) 60J27, 60J35

doi: 10.1360/N012015-00031