中国科学: 数学 2019 年 第 49 卷 第 4 期: 643～666
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

综 述

偏微分方程反问题: 模型、算法和应用

程晋[1,2], 刘继军[3,4*], 张波[5,6]

1. 上海财经大学数学学院, 上海 200433;
2. 复旦大学数学科学学院, 上海 200433;
3. 东南大学数学学院, 南京 211189;
4. 东南大学丘成桐中心, 南京 210096;
5. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190;
6. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049
E-mail: jcheng@fudan.edu.cn, jjliu@seu.edu.cn, b.zhang@amt.ac.cn

收稿日期: 2018-03-30; 接受日期: 2018-05-25; 网络出版日期: 2018-12-20; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11331004, 91730304, 11421110002, 11726503 和 91630309) 资助项目

摘要 偏微分方程反问题是一个重要的数学研究领域, 覆盖了偏微分方程、泛函分析、非线性分析、优化算法和数值分析等不同的数学分支, 在介质成像、遥感遥测和图像处理等当代重要的工程领域有广泛的应用. 基于问题的不适定性, 求解这类问题需要引进正则化思想. 但是由于模型的复杂性和广泛性, 很难建立统一的正则化框架. 本文旨在对几类重要的偏微分方程反问题的研究给出一个系统的总结. 在阐明偏微分方程反问题起源和特点的基础上, 对以电阻抗成像、波场逆散射和介质热成像为应用背景的三类重要的偏微分方程反问题, 系统阐述了核心研究问题、已有结果和方法、未来重要的研究方向. 最后从反演方法有效实现的角度, 对影响偏微分方程反问题数值求解精度和误差估计的主要因素给出了分析.

关键词 偏微分方程 反问题 不适定性 正则化 稳定性 数值解

MSC (2010) 主题分类 35Q60, 35Q93, 35R25, 35R30, 65N20, 65N21, 65R32

1 引言

反问题是相对于正问题而言的. 根据斯坦福大学数学家 Keller [1] 的说法, 一对问题称为是互逆的, 如果一个问题的构成 (已知数据) 需要另一个问题解的 (部分) 信息. 把其中一个称为正问题, 另一个就称为反问题. 与反问题密切相关的是问题的适定性. 数学家 Hadamard [2] 在 1923 年引进了问题的适定性的概念. 如果一个问题同时满足如下三个条件, 称其为是适定的问题:

(1) 问题的解是存在的;

(2) 问题的解是唯一的;

英文引用格式: Cheng J, Liu J J, Zhang B. Inverse problems for PDEs: Models, computations and applications (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 643–666, doi: 10.1360/N012018-00076

© 2018《中国科学》杂志社

(3) 问题的解是连续依赖于输入数据的.

显然, 问题解的存在性和唯一性都与解的定义 (解空间的大小) 有关系, 而解对输入数据的连续依赖性还取决于解和输入数据的度量方式, 即问题的拓扑度量. 大部分的反问题都是不适定的, 故反问题的有效求解必须引进正则化的概念 [3]. 正则化方法的主要思想是在一个容许集合 (admissible set) 中考虑原问题的求解. 通常, 这个容许集可以取成一个适当空间中的紧集合, 特别地, 在很多实际应用中, 这个容许集可以取成有限维集合. 这样, 一个带有约束的问题的求解通常可以转化为原问题在某种意义下的一个近似的适定问题的求解, 从而达到稳定求出原问题的近似解的目的. 从理论分析的角度而言, 需要具体明确这类近似解的自身定义及对原问题逼近的意义; 从数值计算的角度而言, 必须考虑问题的近似解和原来反问题解的误差估计, 以及有效的数值实现方法.

20 世纪早期, 基于对物理问题的直觉认知, 人们普遍认为, 描述物理问题的一个正确的数学模型必须是适定的. 或者说, 如果一个数学问题是不适定的, 它一定不是描述现实物理问题的一个合适的模型. 基于这种认识, 在很长的一段时间内, 数学上主要集中于对适定问题的研究, 即研究的数学问题应该保证问题解的存在性、唯一性和对输入数据的连续依赖性, 不适定问题的研究没有引起学术界的充分重视.

随着 20 世纪 50 年代地球物理勘探等工程领域的应用需求的驱动, 人们开始意识到, 由于客观条件的限制和应用问题本身的复杂性, 很多具有重要应用价值的工程问题对应的数学模型有可能是不适定的 (参见文献 [4]), 这种不适定性来源于问题的本身 (例如, 实际问题中能够提供的输入数据严重不足, 或者问题本身对输入数据高度敏感), 是不可能通过任何数学技巧加以回避的. 从数学研究本身来看, 除了 Hadamard [2] 在 1923 年给出的 Laplace 方程 Cauchy 问题作为不适定问题的一个典型例子外 (解不连续依赖于 Cauchy 数据), 物理学家也在数值计算中发现了很多问题求解的不适定性, 例如, 美国物理学家 Philips [5] 对第一类线性 Fredholm 积分方程的数值求解. 由于上述具有重要工程背景的应用问题的驱动, 发展求解不适定问题的数学理论和方法变得日益迫切. 数学上解决这类问题的奠基性工作是前苏联科学院 Tikhonov 院士提出的正则化方法 [3,6]. 该方法的基本思想是, 虽然问题的不适定性来源于问题本身, 但是可以考虑该问题的一个带有紧约束的问题, 这是原问题的一个近似问题, 而这个近似问题是适定的. 用这个近似问题的解 (称为正则化解) 来作为所求不适定问题的一个稳定的近似解. 或者说, 正则化方法求解不适定问题的本质是, 对问题的解进行一定的限制, 考虑一个近似的适定问题来保证原问题近似解的稳定性. 在这种一般的框架下, 容许集合的选择 (从而定义近似问题和近似问题的解)、近似解和原问题解的逼近度量、近似解的误差估计、近似解的有效计算等, 就构成了求解不适定问题的正则化理论和算法. 近年来, 除了在 Hilbert 空间继续深入发展正则化理论以外, 在一般的 Banach 空间上对不适定问题进行研究, 也是不适定问题研究的一个重要领域 [7].

由于描述不适定问题的数学模型非常广泛, 除了线性不适定问题以外, 一般很难建立一个统一的正则化方法去求解非线性不适定问题. 也正是由于这个原因, 关于不适定问题求解的数学理论和方法的研究, 才形成了当代应用数学和计算数学的一个多姿多彩的重要研究领域, 受到了广泛的关注 (参见文献 [8–10]).

微分方程模型作为刻画自然世界物理现象的重要工具之一, 一直是数学研究的一个重要领域. 在渐渐意识到不适定问题的重要性的同时, 人们很快发现许多微分方程模型对应的初边值问题也是不适定的, 例如, 常微分方程的反谱问题 [11]、系统控制和参数辨识问题 [12]、抛物型方程的逆时问题 [13]. 20 世纪 80 年代初期, 在冯康先生的大力推动下, 国内以李大潜院士、马在田院士、张关泉先生、刘家琦先生和栾文贵先生为代表的老一辈科学家, 在把偏微分方程反问题的建模和计算应用于地球物理勘探上开展了大量的工作. 近年来, 随着现代科学技术的不断发展, 在数值天气预报 [14]、材料无损检测 [15]、

波场逆散射 [16,17]、图像处理 [18,19] 和生物医学成像 [20] 等领域出现了大量的由偏微分方程模型描述的全新的不适定问题, 统称为偏微分方程的反问题. 在美国科学院国家研究理事会最近发表的咨询报告 [21] 中, 专门把反问题的研究作为数学科学生命力的一个典型例子, 其中特别提到的 Calderón 问题就是一个以生命科学中电阻抗成像为应用背景的散度型椭圆方程的反问题.

偏微分方程反问题作为不适定问题的一类典型代表, 难点在于问题的非线性性和不适定性耦合在一起, 而且在建立有效的数值求解方法时还需要考虑现实的三维空间模型的大计算量. 另一个难点在于, 由于描述现实问题的偏微分方程模型是千变万化的, 同时作为求解反问题输入数据的解的附加信息的给定方式又是各不相同的, 因此, 偏微分方程反问题的研究很难有统一的框架, 都是针对具体的问题发展有效的正则化方法和相应的数值求解方案. 也正是因为这个原因, 偏微分方程反问题的研究目前已经发展成为应用数学和计算数学的一个前沿领域, 在有效解决很多重要的应用问题的同时, 也对数学学科自身的发展起到了重要的推动作用.

2 几类重要的偏微分方程反问题

线性偏微分方程大体上可以分为椭圆型方程、双曲型方程和抛物型方程三类. 这三类方程对应的适定的初边值问题在描述自然界许多重要的物理过程中发挥了巨大的作用, 也已经得到了系统深入的研究. 但是, 人们也发现, 一些偏微分方程对应的不适定的初边值问题也是非常重要的, 具有明确的物理背景. 最早的例子可以追溯到 1923 年由数学家 Hadamard [2] 提出的上半平面 Laplace 方程的 Cauchy 问题的经典的例子:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, & (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = 0, \quad u_y(x,0) = \dfrac{1}{n}\sin(nx), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.1}$$

该问题的精确解 $u(x,y) = (1/n^2)\sin(nx)\sinh(ny)$ 在 $n \to \infty$ 时并不趋于 0, 因此, 解对初始条件不具有连续依赖性. 但是与 (2.1) 具有相似结构的椭圆方程的 Cauchy 问题在波场的解析延拓中起着核心的作用, 是地球物理勘探中利用地面接收到的反射波信息探测地球内部参数的一类重要的数学工具 (参见文献 [4,22]). 随着当代科学技术的不断发展和工程应用问题的驱动, 以介质成像为应用背景的一大类偏微分方程反问题的研究得到了广泛的重视. 这类问题的物理描述是利用介质外部的可测量的信息去探测介质的内部或者边界结构 (包括物理参数和几何参数), 而其数学描述则是由微分方程系统解的部分信息去确定系统中的未知成分 (如微分方程中的系数、系统的边界位置和状态等). 本节将阐述几类重要的偏微分方程反问题的起源、研究现状和有待进一步解决的问题.

2.1 电阻抗成像问题

从生物体表面输入激发电流, 在生物体内部各点就形成了不同的电位, 这种电位分布本质上是由生物体内部的电导率 (conductivity) 决定的. 电阻抗成像问题的基本任务就是利用在生物体表面测量得到的电位信息来检测生物体内部的电导率分布.

假定 $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ 是一个具有光滑边界 ∂D 的有界区域, ν 是 ∂D 的单位外法向量. 对各向同性的生物介质 D, 用有正下界的标量函数 $\gamma(x) \in C^2(\overline{D})$ 来表示其上的电导率分布. 假定 D 中没有产生电流的生物源项, 则 D 内部的电位分布函数 $u(x)$ 满足散度型微分方程

$$\nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0, \quad x \in D. \tag{2.2}$$

假定 D 的边界上的电位分布

$$u = f, \quad x \in \partial D \tag{2.3}$$

是已知的, 则当电导率 $\gamma(x)$ 已知时, 问题 (2.2) 和 (2.3) 就构成了经典的散度型椭圆方程的 Dirichlet 边值问题, 可以完全确定 D 上的电位分布 $u(x)$.

在 $\gamma(x)$ 未知的情形下, 假定边界电位 f 是由已知的边界输入电流

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} = g, \quad x \in \partial D$$

产生的, 则电阻抗成像的基本问题是, 可以由边界上的已知电流 - 电位分布对 (f, g) 来确定 D 内部的电导率 $\gamma(x)$ 吗? 如果可以, 如何确定?

可以预料, 由于 (f, g) 只是在边界上给定的信息, 由 ∂D 上的一组 Cauchy 数据 $(u, \gamma\frac{\partial u}{\partial \nu}) = (f, g)$ 是不可能唯一确定 $\gamma(x)$ 的. 因此, 一个自然的想法是利用 (无穷组的) 边界 Cauchy 数据 (f, g) 来确定 $\gamma(x)$, 即对边界上任意的 Dirichlet 数据 $u = f$, 假定其对应的 Neumann 数据 $\gamma\partial u/\partial\nu = g$ 都是已知的. 引进由问题 (2.2) 和 (2.3) 定义的 Dirichlet-to-Neumann (DtN) 映射:

$$\Lambda_\gamma : f \in H^{1/2}(\partial D) \mapsto \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial D} \in H^{-1/2}(\partial D), \tag{2.4}$$

则电阻抗成像的数学模型理论上可以描述为: 由 Λ_γ 来反演 $\gamma(x)$.

这就是著名的 Calderón 问题. 但是 Calderón 在他的研究中是用另一种等价的方法来刻画此问题的. 对 $h \in H^{1/2}(\partial D)$, 定义 $v(x)$ 满足

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\gamma \nabla v) = 0, & x \in D, \\ v = h, & x \in \partial D. \end{cases} \tag{2.5}$$

引进 f 和 h 的双线性泛函

$$Q_\gamma(f, h) := \int_D \gamma \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

其中 u 由问题 (2.2) 和 (2.3) 来定义. 显然, $Q_\gamma(f, f)$ 是对应于问题 (2.2) 和 (2.3) 的 Dirichlet 积分, 它表示由边界电位势 f 产生的 D 上的能量. 由散度定理知,

$$Q_\gamma(f, h) = \int_{\partial D} v\gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} ds(x) = \int_{\partial D} h(x)\Lambda_\gamma(f) ds(x). \tag{2.6}$$

此式表示, $\Lambda_\gamma : H^{1/2}(\partial D) \mapsto H^{-1/2}(\partial D)$ 是对应于二次型 $Q_\gamma(f, h)$ 的唯一的自伴算子. 因此, 由 Λ_γ 确定 $\gamma(x)$ 的 Calderón 问题也可以描述为由已知的双线性泛函 $Q_\gamma(\cdot, \cdot)$ 来确定 $\gamma(x)$.

由 Dirichlet-to-Neumann 映射 Λ_γ 来确定 $\gamma(x)$ 的理论问题是解的唯一性和稳定性. 一般而言, 如果对未知的电导率不加任何限制, 是不可能建立稳定性的. 我们可以建立的是关于 $\gamma(x)$ 的某种条件稳定性. 另一方面, 对唯一性和稳定性的回答极大地依赖于所考虑的区域 D 所在的空间维数. 幸运的是, 实际的三维生物介质的电阻抗成像 (electrical impedance tomography, EIT) 模型可以归入一般的 $n \geqslant 3$ 的框架下, 而对 $n = 2$ 时的电阻抗重建问题理论上要困难得多. 造成这一差别的原因是 Dirichlet-to-Neumann 映射 Λ_γ 的 Schwartz 核是具有 $(n-1)+(n-1) = 2n-2$ 个自变量的函数, 而待反演的 $\gamma(x)$ 的自变量个数是 n. 因此, 对确定 $\gamma(x)$ 的反问题, 直观来看, 在 $n \geqslant 3$ 时是过定的, 而在 $n = 2$ 时是确定的. 这种差别反映在唯一性证明中就是构造形如 $u = \mathrm{e}^{\rho\cdot x}\gamma^{-1/2}(1 + \psi_\gamma(x, \rho))$ 的复几何光学解时, 满足 $\rho \cdot \rho = 0$ 的复数 $\rho \in \mathbb{C}^n$ 的选择的自由度不一样. 下面先给出在 $n \geqslant 3$ 时早期的但重要的结果 (参见文献 [23–25]).

定理 2.1 ($n \geqslant 3$, 唯一性) 假定 $\gamma_1, \gamma_2 \in C^2(\overline{D})$ 具有正下界. 如果 $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$, 则 $\gamma_1 = \gamma_2$.

定理 2.2 ($n \geqslant 3$, 稳定性) 对 $i = 1, 2$, 假定 $\gamma_i \in H^{s+2}(D)$, $s > n/2$ 并且

$$0 < \alpha \leqslant \gamma_i(x) \leqslant \frac{1}{\alpha}, \quad x \in \overline{D}, \quad \|\gamma_i\|_{H^{s+2}(D)} \leqslant \frac{1}{\alpha},$$

则有估计

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(D)} \leqslant C\omega(\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{1/2,-1/2}),$$

其中 $\omega(t) := |\log t|^{-\delta}$, $t \in (0,1)$, $\delta \in (0,1)$ 是依赖于 s 和 n 的某常数, $C = C(D, \alpha, n, s) > 0$, $\|\cdot\|_{1/2,-1/2}$ 表示从 $H^{1/2}(\partial D)$ 到 $H^{-1/2}(\partial D)$ 的算子范数.

对 $n = 2$ 的情形, 利用求解逆散射问题的 $\overline{\partial}$ 方程方法, 可以在 $\gamma(x)$ 的更一般的条件下建立全局唯一性 (参见文献 [26]).

定理 2.3 ($n = 2$, 唯一性) 假定 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界 Lipschitz 区域, $\gamma_1, \gamma_2 \in W^{2,p}(D)$ $(p > 1)$ 具有正下界. 如果 $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$, 则 $\gamma_1 = \gamma_2$.

对于二维线性椭圆方程由 Dirichlet-to-Neumann 映射反演系数的更一般的非线性反问题, 文献 [27] 给出了比较完整的回答, 可以看成是二维 Calderón 问题唯一性的一个推广.

考虑下面关于 $u(x)$ 的线性椭圆方程的边值问题:

$$\begin{cases} \Delta u + b_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + b_2 \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0, & x = (x_1, x_2) \in D, \\ u = f, & x = (x_1, x_2) \in \partial D. \end{cases}$$

定义 Dirichlet-to-Neumann 映射

$$\Lambda_b f = \frac{\partial u}{\partial \nu}, \quad x \in \partial D.$$

定理 2.4 ($n = 2$, 反演多个系数的唯一性) 假定 D 是一个带有光滑边界的二维有界单联通区域. 假定 $b = (b_1, b_2)$, $\widetilde{b} = (\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2) \in L^p(\overline{D}) \times L^p(\overline{D})$, $p > 2$. 如果 $\Lambda_b = \Lambda_{\widetilde{b}}$, 则 $b(x) = \widetilde{b}(x)$, $x \in D$.

自从定理 2.1 被证明后, 人们试图放松定理 2.1 中对 γ 的正则性要求. 例如, 文献 [28, 29] 分别将 γ 的正则性放松到了 $\gamma \in W^{3/2,p}(D)$ $(p > 2n)$ 和 $\gamma \in W^{3/2,\infty}(D)$; 文献 [30] 将 γ 的正则性放松为 $\gamma \in C^1(\overline{D})$ 或 $\gamma \in W^{1,\infty}(\overline{D})$ 且在某种意义下 γ 接近于 1; 而文献 [31] 将 γ 的正则性放松为 $\gamma \in W^{1,p}(D)$ $(p = 3, 4)$ 从而允许 γ 的梯度是无界的. 最近, 文献 [32] 将 γ 的正则性放松到了 Lipschitz 连续的情形, 即 $\gamma \in W^{1,\infty}(D)$. 但是, 如果 γ 的正则性比 Lipschitz 连续还要弱, 定理 2.1 的唯一性是否成立目前仍然是未知的. 对 $n = 2$ 的情形, 利用拟共形映射、Beltrami 方程和 Hilbert 变换等工具, 文献 [33] 于 2006 年彻底解决了 Calderón 问题的唯一性, 即证明了定理 2.3 对于 $\gamma \in L^\infty(D)$ 且有正下界的情形仍然成立. 关于 Calderón 问题的唯一性、稳定性和数值反演算法以及利用部分 Dirichlet-to-Neumann 映射数据反演 γ 的部分数据 Calderón 问题的更一般的结果, 参见文献 [34–37].

在 $n = 2$ 时, Calderón 问题的条件稳定性是比较弱的, 一个早期的结果可以参见文献 [38]. 以 Dirichlet-to-Neumann 映射作为反演输入数据的 Calderón 问题的稳定性本质上是一类对数稳定性, 是非常弱的. 已有的相关工作表明, 这种对数稳定性对一般的 $\gamma(x)$ 一般是最优的 (参见文献 [39, 40]). 但是, 如果假定 $\gamma(x)$ 在 D 上是在有限个已知区域上的分片常数, 则条件稳定性的结果可以提高到 Lipschitz 稳定性. 该结果的更一般的形式是下面的 Lipschitz 稳定性结果 (参见文献 [41]).

定理 2.5 假定 D 具有 Lipschitz 边界. 如果 γ_1 和 γ_2 在 D 上几乎处处满足

$$0 < \lambda \leqslant \gamma_1(x), \gamma_2(x) \leqslant \frac{1}{\lambda},$$

并且可以表示为有限个已知函数 $\psi_j(x) \in C^2(\overline{D})$ $(j = 1, \ldots, N)$ 的线性组合, 即

$$\gamma_i(x) = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j^{(i)} \psi_j(x), \quad x \in D, \quad i = 1, 2, \tag{2.7}$$

其中 $\gamma_j^{(i)}$ 是未知常数, 则由 Dirichlet-to-Neumann 映射 Λ_γ 重建 $\gamma(x)$ 的 Calderón 问题是 Lipschitz 稳定的:

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(D)} \leqslant C \|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{1/2,-1/2}. \tag{2.8}$$

该定理的本质是, 如果知道更多的关于未知电导率的分布信息, 则反问题的稳定性可以提高. 然而, 文献 [42] 证明了 (2.8) 中的常数 C 随着子区域的个数 N 指数增长. 对 Calderón 问题如何改进稳定性估计, 一直是一个重要的前沿研究课题.

Dirichlet-to-Neumann 映射是在无限维空间上研究反问题的一类重要的输入数据形式, 该类反演输入数据意味着对边界上的任意 Dirichlet 数据, 其相应的 Neumann 数据都是已知的. 这类问题的条件稳定性在应用上的意义是特别重要的, 因为从具体的应用模型的角度而言, 真正能给定的只是边界上的有限组的 Dirichlet 数据及其对应的 Neumann 测量数据. 这种有限组的输入数据可以看成是 Dirichlet-to-Neumann 映射的一种不完全的数据. 条件稳定性意味着, 对具有先验约束的未知的电导率, 即使给定不完全的输入数据, 重建结果也可以达到一定的精度. 另一方面, 除了考虑有限组的 Dirichlet-to-Neumann 数据对作为不完全数据外, 人们减少实际测量数据的一个努力方向就是考虑在部分边界上定义的 Dirichlet-to-Neumann 映射, 此时与有限组的 Dirichlet-to-Neumann 数据对不同, 该类反问题的唯一性结果在一定条件下仍然是成立的 (参见文献 [43, 44]).

上述未知电导率可以用有限个基函数展开的假定, 实际上是先验假定未知的电导率是有限维的, 这种假定对应用问题和实际计算都是很自然的. 文献 [45] 对一般的非线性算子方程已经建立了类似的结果, 只要问题的非线性性不是很强, 当待求的解是有限维时, 都可以建立 Lipschitz 稳定性.

以 (2.2)–(2.4) 为数学模型的电阻抗成像问题的本质是利用区域边界的电位 - 电流分布数据去重建区域内部的电导率 $\gamma(x)$. 如前所述, 该类问题的稳定性是很弱的, 给数值实现带来了巨大的困难. 本世纪以来, 与电阻抗成像密切相关的一类新的数学模型是核磁共振电阻抗成像 (magnetic resonance electrical impedance tomography, MREIT). 该类模型的本质是对边界输入的激发电流, 基于 Maxwell 方程组, 通过使用 MR 扫描仪测量介质内部的磁场的部分信息, 由此得到区域内部的电位分布的某种 (不完全) 信息. 由于使用的是区域内部的信息, 重建电导率的算法效果和稳定性估计都有极大的改善, 具体工作可参见文献 [46–51].

2.2 波场逆散射问题

利用介质对入射波场的散射现象从散射波中提取介质的某些核心信息 (如几何参数和物理参数), 数学上可以用一类重要的偏微分方程反问题来描述, 通常称为波场的逆散射问题. 逆散射问题根据待确定的目标介质的未知性质分为两大类. 一类是对不可穿透的介质从散射波中提取散射体的边界特性 (inverse obstacle scattering, 如边界几何形状和边界的物理性质); 第二类是对可穿透的介质提取介质的内部散射参数 (inverse medium scattering, 如介质密度参数和介质中波场的速度参数, 异于均匀背景介质的散射区域的大小和位置). 从使用的作为提取散射波信息的载体来看, 逆散射问题可以分为声波、电磁波和弹性波的逆散射. 地球物理勘探中的地质参数成像问题, 可以看成是声波或弹性波的逆散射成像问题.

波场逆散射的经典问题是声波逆散射模型. 对于均匀背景介质中的不可穿透的有界散射体 $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ 和给定的入射平面波 $u^i(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd\cdot x}$, 其中 $k\in\mathbb{R}$ 为入射波的波数, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 为虚数单位, $d\in\mathbb{S}^{n-1}$ 为单位入射方向, 波场的正散射问题是由 Helmholtz 方程的外问题

$$\begin{cases} \Delta u+k^2u=0, & x\in\mathbb{R}^n\setminus\overline{D}, \\ \mathcal{B}[u]=0, & x\in\partial D, \\ \dfrac{\partial u^s}{\partial|x|}-\mathrm{i}ku^s=O\left(\dfrac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}}\right), & |x|\to\infty \end{cases} \tag{2.9}$$

确定已知散射体 D 外部的总场 $u(x):=u^i(x)+u^s(x)$, 其中边界算子 $\mathcal{B}$ 表示不可穿透的散射体的边界 ∂D (其上的外法向记为 $\nu(x)$) 的物理性质, 可以是下述三类形式之一:

$$\mathcal{B}=\mathcal{I},\quad \mathcal{B}=\frac{\partial}{\partial\nu},\quad \mathcal{B}=\frac{\partial}{\partial\nu}+\mathrm{i}k\lambda(x)\mathcal{I}, \tag{2.10}$$

对应的边界条件分别称为声软条件 (sound-soft)、声硬条件 (sound-hard) 和阻尼边界条件 (impedance); 也可以在边界的不同部分分别是上述三类条件之一, 称为混合边界条件.

散射体 D 外部的散射波场在无穷远处有下面的渐近行为:

$$u^s(x)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}}{|x|^{\frac{n-1}{2}}}\left(u^\infty(\hat{x},d)+O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right),\quad |x|\to\infty, \tag{2.11}$$

其中 $u^\infty(\hat{x},d)$ 称为是散射波 $u^s=u^s(x,d)$ 的远场形式 (far-field pattern), $\hat{x}:=x/|x|\in\mathbb{S}^{n-1}$. 可以证明, 对已知的散射体 D 和边界条件 $\mathcal{B}$, 外问题 (2.9)–(2.11) 在适当的函数空间上是适定的 (参见文献 [16]), 并且散射场 $u^s(x)$ 在 $\mathbb{R}^n\setminus\overline{D}$ 上是解析的.

对于不可穿透的散射体 D, 逆散射问题是由在散射体 D 的外部测量的散射场 $u^s(x)$ 的某些信息来重建散射体的边界形状 ∂D 以及 ∂D 上的边界条件 $\mathcal{B}$. 一般而言, $u^s(x)$ 的可测量信息分为两类: 一类是给定散射体的远场数据 $u^\infty(\hat{x},d)$; 另一类是直接测量在 ∂D 外部的某些有界点集上的 $u^s(x)$, 分别称为远场数据成像和近场数据成像. 基于 Rellich 引理 [16], 由远场数据 $\{u^\infty(\hat{x},d):\hat{x}\in\mathbb{S}^{n-1}\}$ 可以唯一确定 D 的外部任意一点的散射场 $u^s(x,d)$. 因此, 从重建散射体使用的输入数据来看, 利用近场数据重建散射体是基本的问题. 但是由于散射体的远场形式具有明确的物理意义 (散射波的振幅) 并且易于测量, 同时由远场数据重建近场是一个不稳定的过程, 因此, 直接利用散射波的远场数据重建 ∂D 一直是逆散射问题的一个重要研究领域.

唯一性是反问题的核心问题, 它反映了给定数据是否足以确定未知量的问题. 注意到定义于单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的散射场 $u^\infty(\cdot,d)$ 依赖于入射平面波 $u^i(x)$ 的入射方向 d, 一个很自然的问题就是利用远场数据 $u^\infty(\cdot,d)$ 重建 ∂D 时需要多少个入射方向 d 的入射平面波作为产生 $u^\infty(\cdot,d)$ 的激发源. 这是一个至今仍然引起高度关注但仍未完全解决的问题. 关于这方面的最早的唯一性结果是由 Schiffer 在 20 世纪中叶对声软边界的散射体给出的 (参见文献 [52]).

定理 2.6 对 $\mathcal{B}=\mathcal{I}$ 的逆散射问题 (2.9)–(2.11), 对应于一个给定波数 $k>0$ 的远场数据 $\{u^\infty(\cdot,d):d\in\mathbb{S}^{n-1}\}$ 可以唯一确定 ∂D.

该定理的核心是要求所有入射方向 d 对应的散射波场. 在其后的长期的研究工作中, 人们将利用所有入射方向的散射波重建 ∂D 的唯一性推广到了不同类型的边界条件, 包括带有未知阻尼边界系数 $\lambda(x)$ 的逆散射问题 (参见文献 [53]).

定理 2.7 $(n=3)$ 假定 D 和 $\lambda(x)$ 满足 $\partial D \in C^2$, $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ 是连通的, 未知阻尼边界系数

$$0 < \lambda \in L^\infty(\partial D), \quad \|\lambda\| \leqslant \lambda_0,$$

则 ∂D 可以由远场数据 $\{u^\infty(\hat{x}, d) : \hat{x}, d \in \mathbb{S}^2\}$ 唯一确定.

证明该定理的思路大体分为两部分. 对未知的 $(D, \lambda(x))$, 取一个已知区域 $\Omega \supset \overline{D}$. 利用 $\Omega \setminus \overline{D}$ 上 u 的方程和 ∂D 上的阻尼边界条件定义 $\partial\Omega$ 上的 Dirichlet-to-Neumann 映射

$$\Lambda_{D,\lambda} : u = f \in H^{1/2}(\partial\Omega) \mapsto \frac{\partial u}{\partial \nu} \in H^{-1/2}(\partial\Omega).$$

首先, 证明反演输入数据 $\{u^\infty(\hat{x}, d) : \hat{x}, d \in \mathbb{S}^2\}$ 可以确定 $\Lambda_{D,\lambda}$; 其次, 利用 Runge 逼近定理构造一个 ∂D 的标志函数证明 ∂D (即使 ∂D 上的阻尼系数未知) 可以由 $\Lambda_{D,\lambda}$ 确定. 与电阻抗成像的问题一样, 这里本质上还是利用 Dirichlet-to-Neumann 映射 $\Lambda_{D,\lambda}$ 作为反演输入数据. 关于由噪声远场数据重建映射 $\Lambda_{D,\lambda}$ 的误差估计和数值实现, 参见文献 [54, 55].

该结果还被进一步推广到带有混合边界条件的逆散射问题 [56]. 在此情形下, 除了证明了重建 ∂D 的唯一性外, 还通过利用远场数据构造适当的标志函数进一步证明了 $\{u^\infty(\cdot, d) : d \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ 可以确定不同类型的边界条件在 ∂D 上所处的位置以及阻尼边界部分上的阻尼系数 $\lambda(x)$. 对 ∂D 上更为一般的广义阻尼边界条件

$$\mathcal{B}[u] := \frac{\partial u}{\partial \nu} + \mathrm{div}_{\partial D}(\mu \nabla_{\partial D} u) + \lambda u,$$

其中 $\mu \in C^1(\partial D)$, $\lambda \in C(\partial D)$ 是满足 $\Im(\mu) \leqslant 0$ 和 $\Im(\lambda) \geqslant 0$ 的复值函数, 文献 [57] 对二维情形证明了 $\{u^\infty(\cdot, d) : d \in \mathbb{S}^1\}$ 可以唯一确定 $(\partial D, \mu, \lambda)$.

上述结果表明, $\{u^\infty(\cdot, d) : d \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ 不仅有几何信息 ∂D, 还有散射体的边界散射类型和边界参数这样一类物理信息. 换言之, 如果利用所有的入射方向 d, 则 $u^\infty(\cdot, d)$ 包含了散射体的足够多的信息. 一个很自然的问题是, 如果我们只是给定有限个入射方向 $d_j \in \mathbb{S}^{n-1}$, $j = 1, \ldots, N$ (这是在工程应用中的实际情形), $\{u^\infty(\cdot, d_j) : j = 1, \ldots, N\}$ 还能确定 ∂D 吗? 在二维空间的情形, 这方面的一个重要进展参见文献 [58, 59], 在多边形边界的适当的限制下 (如凸多边形), 文献 [58, 59] 证明了只用一个方向的入射波就可以唯一重建带有 Dirichlet 边界条件的多边形边界; 在带有 Neumann 边界条件的情形, 两个方向的入射波也可以唯一确定多边形边界. 在高维空间多边体散射的情形, 利用有限个入射方向的平面波对应的散射波重建 ∂D 的唯一性参见文献 [60]. 最近, 文献 [61] 证明了利用有限个入射方向的平面波对应的散射波重建声硬多面体的稳定性. 但是对一般情形的散射体边界, 在单频率入射波情形下利用有限个入射方向的入射波确定不可穿透的散射体边界形状的唯一性仍然是一个公开的问题.

除了利用入射平面波作为激发源利用散射场的远场数据来重建散射体的边界以外, 也可以在包含 D 的一个更大的已知区域 $\Omega \supset \overline{D}$ 的边界点 $y \in \partial\Omega$ 上放置点源 $u^i(x) := \Phi(x, y)$ 作为激发源, 其中 $\Phi(x, y)$ 为 Helmholtz 方程 $\Delta u + k^2 u = 0$ 的基本解, 并在 $\partial\Omega$ 上测量对应的近场. 此时的逆散射问题是由近场数据 $\{u^s(x, y) : x, y \in \partial\Omega\}$ 来重建 ∂D. 由互易原理和 Rellich 引理, 这样的近场散射数据与入射平面波对应的远场数据 $\{u^s(\hat{x}, d) : \hat{x}, d \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ 是等价的, 因此也可以完全确定 ∂D (参见文献 [62]).

对均匀背景介质中的可穿透的散射体, 对给定的入射波 $u^i(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kd\cdot x}$, 由对应的散射波信息确定散射体信息的逆问题可以一般描述为确定散射指数 (refraction index) 分布 (或其支集) 的问题. 此时在全空间 $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ 上的总场 $u(x) = u^i(x) + u^s(x)$ 满足的控制系统为

$$\begin{cases} \Delta u + k^2(1 + q(x))u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ \dfrac{\partial u^s}{\partial |x|} - \mathrm{i}k u^s = O\left(\dfrac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}}\right), & |x| \to \infty, \end{cases} \tag{2.12}$$

其中 $-1 < q(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且具有某个已知的紧支集 $B \subset \mathbb{R}^n$. 利用 Lippmann-Schwinger 方程和椭圆型方程的唯一延拓原理 (参见文献 [9, 定理 6.4] 或 [16, 第 8.3 节]), 可以证明 (2.12) 对所有 $k > 0$ 是适定的 (参见文献 [9, 定理 6.9] 或 [16, 定理 8.7]).

对于由散射场的远场数据 $u^\infty(\hat{x}, d)$ 确定 $q(x)$ 的逆介质问题, 在 $n = 3$ 时下面的唯一性结果也成立 (参见文献 [9, 定理 6.26] 和 [16, 定理 10.5]), 其证明基于文献 [63,64] 的工作.

定理 2.8 ($n = 3$) 对给定的任一波数 $k > 0$, $q(x)$ 在 B 上可以由所有的 $\hat{x}$ ($d \in \mathbb{S}^2$) 对应的 $u^\infty(\hat{x}, d)$ 唯一确定.

与 Calderón 问题一样, $n = 2$ 时由远场数据重建一般的 $q(x)$ 的唯一性也是一个非常困难的问题, 其核心原因仍然是 $q(x)$ 的自变量的个数与输入数据 $\{u^\infty(\hat{x}, d) : \hat{x}, d \in \mathbb{S}^1\}$ 的自变量的个数是一样的. 但是可以由 $\{u^\infty(\hat{x}, d) : \hat{x}, d \in \mathbb{S}^1\}$ 重建 $q(x)$ 的某些特征, 例如, 其间断线的位置 (参见文献 [65]). 然而, 如果 $q(x)$ 是分片 $W^{1,p}(B)$ 函数 ($p > 2$), 那么 $q(x)$ 在 B 上仍然可以由所有的 $\hat{x}$ ($d \in \mathbb{S}^1$) 对应的 $u^\infty(\hat{x}, d)$ 唯一确定. 这一结果可以利用 Bukhgeim 的结果 (参见文献 [66] 或 [67] 中第 4.1 节中的定理) 以及近场散射数据和远场散射数据的等价性得到.

这里的关键是仍然需要全体的入射波方向. 与不可穿透的散射体确定 ∂D 的问题一样, 是否可以由有限个入射方向确定 $q(x)$ (或者至少某些特殊类型的 $q(x)$) 仍然是一个公开的问题. 一个最新的结果是, 在 $q(x)$ 支集 B 具有某些 "尖点" 时, 可以由对应于一个入射方向的散射波信息来唯一重建支集 B (参见文献 [68]).

定理 2.9 ($n = 2$) 假定 $q_j(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ 的支集 $B_j := \{x : q_j(x) \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ ($j = 1, 2$) 是有界的凸多边形, 并且满足

(1) 对 B_j 的每一个顶点 O 都存在一个邻域 U_j 使得 $q_j|_{U_j} \in C^\alpha$, $\alpha > 0$;

(2) 在 B_j 的每一个顶点 O 成立 $q_j(O) \neq 1$.

如果 $u^\infty[q_1](\cdot, d) = u^\infty[q_2](\cdot, d)$ 对给定的一个入射方向 d 和一个波数 $k > 0$ 成立, 则 $B_1 = B_2$.

这个结果源于散射体的尖点总是会造成散射, 从而包含了 $q(x)$ 的不光滑的支集的信息. 在 $n \geqslant 3$ 时, 文献 [68] 也对 B 是矩形盒子的情形建立了对应于一个入射方向的散射波的远场数据重建 B 的唯一性. 关于 2012 年以前的逆散射问题唯一性结果的比较全面的综述, 包括唯一性问题的研究工具和方法以及相关的公开问题, 参见文献 [69].

基于应用领域对光栅散射现象研究的推动, 另一种可穿透介质的逆散射问题 — 光栅逆散射问题也引起了高度的重视 (参见文献 [70–72]). 对这种模型, (2.12) 中 $q(x)$ 所在的紧支集不再是一个有界区域 B (其边界 ∂B 是一个闭曲线 (面)), 而是一个沿某一方向周期变化的无界区域, 这种周期变化反应了光栅的周期性结构. 此时的逆散射问题是指由半空间给定的入射波对应的反射波或透射波的信息去重建光栅的周期性界面和内部参数. 文献 [71,72] 考虑了一个二维空间的光栅重建的反问题.

该问题的描述如下. 假定全空间 $\mathbb{R}^2$ 被两个 x_1 方向的 2π 周期界面

$$\Gamma_\pm := \{x = (x_1, x_2) : x_2 = f_\pm(x_1)\}$$

分为 Ω_+、Ω 和 Ω_- 三个部分, 其中 Ω 为非均匀介质, 其上的反射指标函数 $q(x)$ 为满足 $\Re q > 0$ 和 $\Im q \geqslant 0$ 的关于 x_1 的 2π 周期函数 (参见图 1). 引进上半空间 Ω_+ 上的波数 $k_+ := k\sqrt{q_+}$. 对其上入射角为 $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ 的给定的入射平面波

$$u^i(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha x_1 - \beta x_2)}, \quad \alpha := k_+ \sin\theta, \quad \beta := k_+ \cos\theta,$$

由于不均匀介质 Ω 的作用, 在 Ω_+ 上会产生散射波 $u^s(x)$, 在 Ω_- 上会产生透射波 $u^t(x)$. 定义

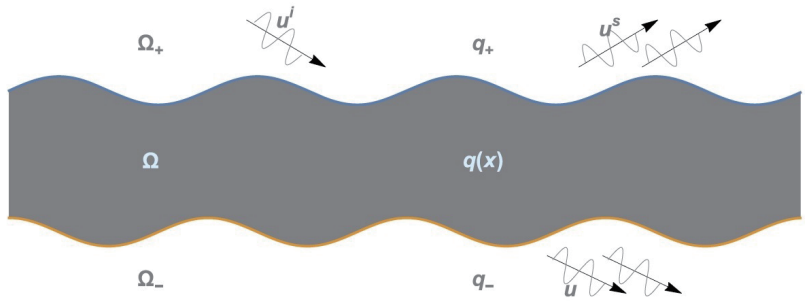

图 1　二维光栅介质的逆散射问题 (本图取自文献 [72])

$$
n(x)=\begin{cases} q_+, & x\in\Omega_+,\\ q(x), & x\in\Omega,\\ q_-, & x\in\Omega_-,\end{cases}
\qquad
u(x)=\begin{cases} u^i(x)+u^s(x), & x\in\Omega_+,\\ u(x), & x\in\Omega,\\ u^t(x), & x\in\Omega_-.\end{cases}
\tag{2.13}
$$

定义 $\Gamma_\pm$ 上的外法向为指向 Ω 的外部, 则在全空间 $\mathbb{R}^2$ 上的波场 $u(x)$ 满足

$$
\Delta u+k^2n(x)=0,\quad x\in\mathbb{R}^2\setminus\Gamma_\pm, \tag{2.14}
$$

$$
u\,|_+=u\,|_-,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_+=\lambda_\pm\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_-,\quad x\in\Gamma_\pm, \tag{2.15}
$$

$u(x)\,|_+$ 和 $u(x)\,|_-$ 分别表示 x 从 Ω 的外部和内部的极限. 由于 $u^i(x)$ 关于 x_1 是 α- 拟周期的, 即

$$
u^i(x_1+2\pi,x_2)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\alpha}u^i(x_1,x_2),
$$

$q(x)$ 关于 x_1 是 2π 周期的, Ω_+ 上的散射波 $u^s(x)$ 和 Ω_- 上的透射波 $u^t(x)$ 有 Rayleigh 展开:

$$
u^s(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}u_n^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_nx_1+\beta_n^+x_2)},\quad x_2>\max_{x_1}f_+(x_1), \tag{2.16}
$$

$$
u^t(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}u_n^-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_nx_1-\beta_n^-x_2)},\quad x_2<\min_{x_1}f_-(x_1), \tag{2.17}
$$

其中

$$
\alpha_n=\alpha+n,\quad \beta_n^\pm=\begin{cases}\sqrt{k^2q_\pm-\alpha_n^2}, & |\alpha_n|<k\sqrt{q_\pm},\\ \mathrm{i}\sqrt{\alpha_n^2-k^2q_\pm}, & |\alpha_n|\geqslant k\sqrt{q_\pm},\end{cases} \tag{2.18}
$$

u_n^+ 和 u_n^- 分别为散射波和透射波的展开系数. 对已知的 $\Gamma_\pm$ 和 $q(x)$, (2.13)–(2.18) 构成一个光栅散射的正问题, 在 $q(x)$ 的一些条件下, 它是适定的.

对应于光栅散射模型 (2.13)–(2.18) 的逆散射问题是一类全新的可穿透介质的反问题. 此模型的特点是, 介质的两个界面 $\Gamma_\pm$ 都是无界的, 但是具有周期结构, 这相当于界面的自由度降低了. 对前

述 (2.12) 的逆散射问题, $q(x)$ 的支集的界面是一个有界的闭曲面. 对光栅逆散射问题, 其任务是通过测量在上半空间散射波 $u^s(x)$ 的信息或者在下半空间 $u^t(x)$ 的信息来重建边界 $\Gamma_\pm$.

文献 [71] 证明了, 对无限可数个 $\{(\alpha_j, \beta_j^+) : j \in \mathbb{Z}\}$ 对应的入射平面波 $u^i(x)$, 利用相应的 $u^s(x)$ 在 Ω_+ 上的一条水平线 $x_2 = C > \max_{x_1} f_+(x_1)$ 上的全部测量数据来重建 $\Gamma_\pm$ 是唯一的, 并且文献 [72] 提出了基于因子分解方法 (factorization method) 的重建方案和数值实现, 结果是令人满意的.

一个有意思的问题是, 从实际的应用模型的角度而言, 我们总是只能取有限组 (α_j, β_j^+) 产生入射平面波, 此时测量的散射波信息也是有限组的. 由这些有限组数据重建 $\Gamma_\pm$ 的理论上的误差分析是一个值得进一步研究的问题. 另一方面, 如果 $\Gamma_\pm$ 的周期也是未知的, 但是 $\Gamma_\pm$ 具有分片常数的结构, 此时可以由散射波数据得到周期的信息和光栅高度的信息吗? 是否只需要有限组 (甚至一组) 的平面入射波的激发数据? 这些问题有必要开展进一步的研究.

对给定的一个频率的入射波, 逆散射问题的本质是希望由对应的散射波的信息来提取未知的散射介质的特征 (散射体的几何形状和可穿透介质不均匀性的分布等). 前面利用所有方向的入射波来保持重建的唯一性, 意味着可以提取出未知量的一切细节. 但实际应用问题所能给定的入射波的方向一定是有限的和离散的, 此时我们只能得到未知介质的某种近似. 这种情形下如何来提高重建结果的精度? 对给定的入射频率, Heisenberg 测不准原理断言存在所谓的分辨极限. 例如, 在光学成像中所能观测到的目标的尺度不会超过入射波波长的一半 (称为衍射极限)[73]. 这意味着对给定频率的入射波, 如果需要看清更多的细节, 就需要利用短波长 (从而高频率) 的入射波. 换言之, 对给定频率作为激发波源的入射波, 它的分辨率一定是有限的 (参见文献 [74]). 在这个方向的努力就导致了逆散射问题求解中多频散射的研究. 大体上有两类工作, 一类是利用连续的多频率来弥补给定信息的不足 (例如, 有限个方向入射波或者散射场的无相位信息 (phaseless data))[75–77]; 另一类是使用多频率的入射波对应的散射波信息, 从低频到高频逐次提取未知散射体的频率分量[78–82], 从而得到未知散射体的逐次逼近. 为了克服提取未知散射体高频分量的困难, 对非线性逆散射问题的一个有效的算法就是逐次线性化的方法 (recursive linearization method, RLM), 每一次求解未知散射体更高频的分量时都用前一步已求出的散射体的高频表示作为背景介质. 该方向的一个综述工作参见文献 [83], 其中给出了重建 $\mathbb{R}^2$ 中具有紧支集 $B = \{\boldsymbol{r} = (x, y) : \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^2, |\boldsymbol{r}| < R\}$ 的 Helmholtz 方程

$$\Delta\phi + k^2(1 + q(\boldsymbol{r}))\phi = 0, \quad \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^2$$

中的势函数 $q(\boldsymbol{r})$ 的数值实验. 对给定的模型函数 $q(x, y)$, 利用 ∂B 上给出的不同频率的近场数据, 对不同的入射频率从低到高作线性化逼近, 重建 $q(0, y)$ 的效果见图 2, 逼近过程是非常有效的.

逆散射问题的数值算法对于各种实际应用来说至关重要, 因此, 已经有这方面的大量的研究工作出现, 包括迭代方法和快速有效的定性方法 (如采样方法、分解法、探测法和直接成像法等), 可参见专著 [9,16] 和综述 [83–87] 及其参考文献.

利用远场数据对散射物体进行成像时, 如果散射物体的尺寸小于波长的一半, 那么物体很难被清晰地成像出来, 称为绕射极限或分辨率极限. 解决这一问题的一个有效途径是利用近场数据进行成像 (或称为近场光学成像), 相关工作参见文献 [62,73,88–92].

另一方面, 在许多应用问题中, 远场数据的相位很难甚至无法得到, 一般只能得到远场测量数据的强度或模, 也就是无相位远场数据. 对于此类逆散射问题, 由于散射体任意平移前后所对应的无相位远场数据相同 (称为无相位远场数据的平移不变性), 利用无相位远场数据只能重构散射体的形状而无法重构其位置. 此外, 即使利用多个入射方向或波数, 这一问题仍然无法解决. 为了解决这一问题, 不同于以往只用一个平面波作为入射场, 文献 [75] 考虑了两个平面波的叠加作为入射场的情形, 证明了

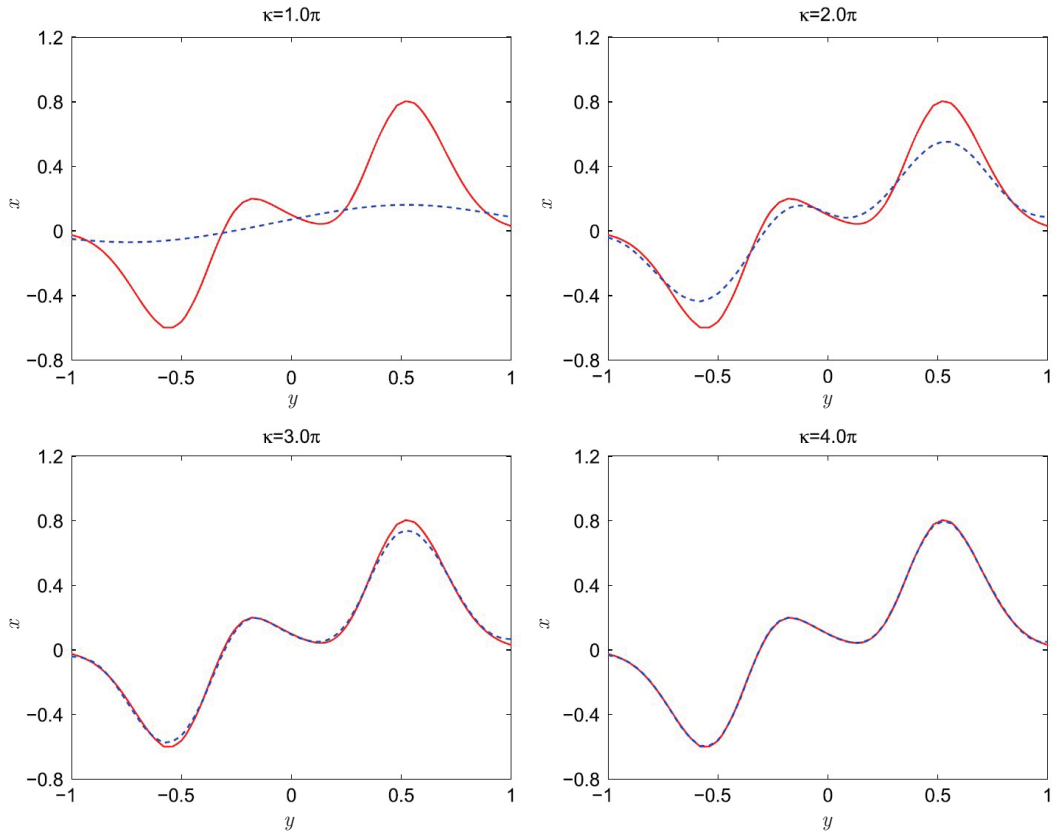

图 2　多频线性化逼近求解非线性逆散射问题 (本图取自文献 [83]), 其中实线代表真实值, 虚线代表计算值

在多个波数情形下由两个平面波的叠加作为入射场产生的无相位远场数据不满足平移不变性, 并利用此结果, 提出了一种基于多波数无相位远场数据的逐次 Newton 迭代算法, 可以同时重构散射体的位置和形状. 最近, 在假设散射体的性质已知的情形下, 文献 [93] 证明了利用无穷多组两个平面波的叠加产生的单频无相位远场数据可以唯一重构散射物体.

2.3　介质热成像问题

另一类重要的偏微分方程反问题是抛物型方程的反问题. 与稳态方程不同, 发展方程的解是动态的, 因此, 作为反问题附加信息的解的部分信息既依赖于时间变量, 又依赖于空间变量, 从而可能包含了更多的信息, 对反演抛物型控制系统中的未知成分更为有效. 从应用角度来看, 凡是基于扩散过程的物理现象 (如热传导和浓度扩散) 对应的系统辨识问题都可以看成是抛物型方程的反问题. 近年来, 关于反常扩散过程的反问题的大量研究也可以归属于抛物型方程的反问题, 只不过此时扩散方程中关于时间的一阶导数用关于时间的 $\alpha \in (0,1)$ 阶 (分数阶) 导数来代替 (参见文献 [94]). 与通常的整数阶导数不同, 分数阶导数是非局部的, 某一时刻 t_0 的分数阶导数与 t_0 以前所有时刻的状态有关, 因此更适合于描述带有记忆效应的扩散过程, 对应的反问题在现代科学技术中具有重要的应用.

对 $D \subset \mathbb{R}^n$, 引进散度型椭圆算子

$$\mathcal{A}[\diamond] := -\nabla \cdot (a(x)\nabla \diamond) + c(x)\diamond,$$

其中 $a(x) \geqslant a_0 > 0$, $c(x) \geqslant 0$. 下述抛物型系统:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u = f(x,t), & x \in D, \quad t > 0, \\ \mathcal{B}[u](x,t) = \varphi(x,t), & x \in \partial D, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in D \end{cases} \tag{2.19}$$

描述了 D 上的线性扩散过程, 其中边界算子是下述三种形式之一:

$$\mathcal{B} = \mathcal{I}, \quad \mathcal{B} = \frac{\partial}{\partial \nu}, \quad \mathcal{B} = \frac{\partial}{\partial \nu} + \gamma(x,t)\mathcal{I}. \tag{2.20}$$

正问题是由给定的算子 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 和激发源 $(f(x,t), \varphi(x,t), u_0(x))$ 确定系统 (2.19) 和 (2.20) 的解 $u(x,t)$. 而反问题则是算子 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 中的某些部分是未知的, 或者激发源数据 $(f(x,t), \varphi(x,t), u_0(x))$ 中的某些部分是未知的, 要求由解 $u(x,t)$ 的某些间接测量信息

$$\mathcal{F}[u](x,t) = h(x,t), \quad (x,t) \in \mathcal{O} \subset \overline{D} \times [0,T] \tag{2.21}$$

求解系统的未知量, 其中 $\mathcal{F}[\cdot]$ 是 u 的某个已知泛函, 它表示了反演输入数据的采集方式, 而 $\mathcal{O}$ 则是反演输入数据的测量位置. 从工程应用的角度而言, 确定 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 中的未知成分称为系统参数辨识, 确定激发源数据的未知成分称为控制问题.

上述抛物型方程的反问题大体分为三大类: 系统参数 (算子 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$) 重建、方程源项 $f(x,t)$ 重建和初始温度 $u_0(x)$ 重建 (逆时问题). 与一般的反问题一样, 由 (2.19)–(2.21) 组成的扩散过程的反问题必须考虑下述几个关键的问题:

(1) 由 (2.21) 给定的反演输入数据是否可以唯一确定 (2.19) 和 (2.20) 中的未知成分? 如果不能, 输入数据 (2.21) 可以在什么意义下给出未知成分的特征?

(2) 如果给定数据不是 h, 而是 h 的某种近似 h^δ, 如何由噪声数据 h^δ 构造待反演未知量的某种近似? 这种近似是在什么意义下? 近似解的定量的误差估计是多少?

(3) 如何构造近似解的有效的数值实现方法?

众所周知, 一般反问题研究特别困难的一个重要原因是问题的非线性性和不适定性耦合在一起. 对反问题系统 (2.19)–(2.21), 只要输入反演数据的算子 $\mathcal{F}$ 是非线性的, 则反问题 (2.19)–(2.21) 一定是非线性的. 在 $\mathcal{F}$ 是线性的情形, 重建源项 (f, φ, u_0) 的问题是线性的, 但重建 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的问题仍然是非线性的.

关于抛物系统反问题研究历史最长的课题是所谓的逆时问题 (backward problems), 此时附加数据 (2.21) 的给定方式是给定 $t = T$ 时刻的数据

$$u(x,T) = G(x), \quad x \in D, \tag{2.22}$$

任务是要由已知数据 $G(x)$ 确定系统 (2.19) 和 (2.20) 中的未知成分, 进而确定 $0 \leqslant t < T$ 上的场分布 $u(x,t)$. 这个问题的应用背景可以追溯到 1935 年 Tikhonov 对地球物理勘探中利用当前的温度数据来解释历史上地球内部温度 $u(x,t)$ 分布的工作. 显然, 如果我们能由 $G(x)$ 首先恢复出系统 (2.19) 和 (2.20) 中的未知参数, 则可以通过求解一个适定的正问题 (2.19) 和 (2.20) 来得到问题的解 $u(x,t)$.

考虑 $\mathcal{B} = \mathcal{I}$, $\varphi(x,t)$ 已知, 而 $a(x)$、$c(x)$、$f(x,t)$ 和 $u_0(x)$ 中仅有一个未知函数的情形. 由 (2.19) 和 (2.22) 组成的反问题包含两类: 确定 $f(x,t)$ (或 $u_0(x)$) 的线性反问题与确定 $a(x)$ (或 $c(x)$) 的非线性反问题.

由 $u(x,T)$ 确定初始分布 $u_0(x)$ 可以看成是最简单的逆时问题. 该反问题的唯一性是显然的. 但是从数值稳定性的角度而言, 由 $u(x,T)$ 计算 $u(x,t):0\leqslant t<T$ 只能得到某种条件稳定性. 事实上, 对 $\phi(t):=\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(D)}$ 有下面的估计 [13]:

$$\phi(t)\leqslant\phi(0)^{1-\frac{t}{T}}\phi(T)^{\frac{t}{T}},\quad t\in[0,T]. \tag{2.23}$$

该估计表明, 由 $u(x,T)$ 重建 $u(x,t):0\leqslant t<T$, 只有在先验假定 $u(\cdot,0)$ 有界的情形下, 才能得到 Hölder 稳定性, 时刻 t 越小, 对 $u(\cdot,T)$ 依赖的 Hölder 指数 $\frac{t}{T}$ 也越小, 说明稳定性变差. 特别是要想得到 $u(x,0)$ 的稳定的重建结果, 需要 $u(\cdot,0)$ 在更强模下有界的先验假定 (参见文献 [95]).

利用终端时刻 $t=T$ 时的测量信息 $u(x,T)$ 重建 $u(x,0)$ 的逆时问题在考古学和图像处理中有重要的应用. 从抛物型方程解沿时间方向的光滑化效应来讲, 把 $u(x,0)$ 解释成图像的不连续的灰度函数, 则 $u^\delta(x,T)$ 可以解释成带有噪声的原图像的模糊图像. 逆时问题就是从这个模糊的图像去重建原来的不光滑的精确图像 $u(x,0)$. 这类问题的难点是, 在去除随机噪声引起的图像的不光滑性的同时, 必须保证原来精确图像的某种不光滑性. 近年来, 这种想法已经被推广到更广泛的时间分数阶导数的扩散方程的逆时问题, 并将其用于二维图像处理, 参见文献 [94,96].

由 $u(x,T)$ 确定 (2.19) 中的源函数 $f(x,t)$ 的问题虽然也是线性的, 但要比重建初始温度场 $u_0(x)$ 困难得多. 一个直观的理解是, 一般的未知源 $f(x,t)$ 是随着 t 变化的, 但 $u(\cdot,T)$ 只包含了空间变量的附加信息. 但是提取 $f(x,t)$ 中空间依赖的信息在一定条件下仍然是可能的. 基于文献 [97–99] 的系列工作, 文献 [95] 给出了下面的结果.

记 $Q:=D\times(0,T)$, $|\cdot|_{\eta_1,\eta_2}(Q)$ 和 $|\cdot|_{\eta_1}(D)$ 表示 Q 和 D 上的 Hölder 连续函数空间的模, $\lambda\in(0,1)$.

定理 2.10 设 $f(x,t)=\alpha(x,t)F(x)$ 且 $F\in C^\lambda(\overline{D})$, 其中 $\alpha(x,t)$ 是满足 $\alpha,\partial_t\alpha\in C^{\lambda,\lambda/2}$,

$$\alpha,\partial_t\alpha\geqslant 0,\quad 在\ Q\ 上,\quad \alpha(x,T)\geqslant\epsilon>0 \tag{2.24}$$

的已知权函数, 则 $\mathcal{B}=\mathcal{I}$ 时由 (2.19) 和 (2.22) 构成的反问题的解 $(u(x,t),F(x))$ 满足

$$|u|_{\lambda+2,\lambda/2+1}(Q)+|F|_\lambda(D)\leqslant C(|u_0|_{\lambda+2}(D)+|u(\cdot,T)|_{\lambda+2}(D)+|\varphi|_{\lambda+2,\lambda/2+1}(\partial D\times(0,T))). \tag{2.25}$$

该定理表明, 在系统的其他参数已知的情形下, 由末始时刻 $t=T$ 的数据求解未知源项 $F(x)$ 是唯一的, 且关于输入数据是 Lipschitz 连续的. 同时求解 $0\leqslant t<T$ 上的 $u(x,t)$ 对所有的 $t\in[0,T]$ 也是一致 Lipschitz 连续依赖于 $u(x,T)$ 的. 与 (2.23) 的稳定性结果相比, 可以知道, 求解 $F(x)$ 的问题比求解 $u_0(x)$ 的问题的不适定性要弱. 已经有反例表明, 如果条件 (2.24) 去掉, 重建 $F(x)$ 是不具有唯一性的.

继续考虑在 $\mathcal{B}=\mathcal{I}$ 和 $\varphi(x,t)$ 已知的情形下由 (2.22) 重建 $\mathcal{A}$ 的逆时问题. 在 $a(x)$ 已知的情形下, 重建 $c(x)$ 的非线性反问题仍然是有唯一性和 Lipschitz 稳定性的 (参见文献 [95]).

定理 2.11 假定 $(a(x),f(x,t),u_0(x))\equiv(1,0,0)$, 边界源函数 $\varphi(x,t)\in C^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\partial D\times(0,T))$ 满足

$$0\leqslant\varphi\not\equiv 0,\quad 0\leqslant\partial_t\varphi\not\equiv 0,\quad (x,t)\in\partial D\times(0,T). \tag{2.26}$$

(1) 如果 $c(x)\in C^\lambda(\overline{D})$, 则由 (2.19) 和 (2.22) 构成的反问题有唯一解 $(u(x,t),c(x))$.

(2) 记 $u_i(x,t)$ 是 (2.19) 对应于 $c_i(x)\in C^\lambda(\overline{D})$ $(i=1,2)$ 的解. 如果边界源函数 $\varphi(x,t)$ 满足 (2.26) 和 $\varphi(x,T)>\epsilon>0$, $x\in\overline{D}$, 则该反问题还有稳定性估计

$$|c_2-c_1|_\lambda(D)+|u_2-u_1|_{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q)\leqslant C|u_2(\cdot,T)-u_1(\cdot,T)|_{2+\lambda}(D). \tag{2.27}$$

由于这里建立的稳定性估计是在较强的 Hölder 空间上的逐点估计, 使用的基本工具是抛物型方程的极值原理, 所以, 上面两个定理中对已知函数 $\alpha(x,t)$ 和 $\varphi(x,t)$ 都有逐点的非负要求和关于 t 的单调性要求. 这样的结果关于实际应用是太强了. 在更广义的范数意义下建立反问题的稳定性估计是一类更具有应用价值的课题.

与上述重建 $c(x)$ 的非线性反问题相比, 高维空间情形重建 $a(x)$ 是一类更为困难的非线性反问题, 其原因在于, 位于散度项下的 $a(x)$ 可以看成是 (2.19) 中微分方程中主部的系数, 但这个系数本质上是与 $\partial_t u$ 的系数 $\frac{1}{a(x)}$ 和 ∇u 的系数 $\nabla \ln a(x)$ 联系在一起的. 时空导数的本质差别使得重建 $a(x)$ 更加困难.

上述关于热传导方程的逆时反问题是在 $\mathcal{B}=\mathcal{I}$ 的情形下的几个线性 (非线性) 反问题. 考虑到热传导介质和周边介质的热交换, 一个更为实际的模型是考虑第三类的边界条件:

$$\mathcal{B}[u](x,t)=\frac{\partial u}{\partial \nu}+\gamma(x,t)u=\varphi(x,t), \quad (x,t)\in \partial D\times(0,T). \tag{2.28}$$

此时在 ∂D 上的热交换系数 $\gamma(x,t)$ 也有可能是未知的, 并且 $u(x,t)$ 是非线性依赖于 γ 的. 此时由末端时刻输入数据 (2.22) 可以同时提取出初始分布 $u_0(x)$ 和 $\gamma(x,t)$ 的相关信息吗? 这实际是一个多参数的反演问题. 在 $\gamma(x,t)$ 与 t 无关, $a(x)$ 为常数, $c(x)\equiv f(x,t)\equiv 0$ 的情形, 这方面研究在二维区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 的一个最新进展参见文献 [100].

定义未知量 $(\gamma(x),u_0(x))$ 的允许集

$$\mathbb{A}:=\{(\gamma,u_0):(\gamma,u_0)\in C(\partial D)\times C(\overline{D}),0<\sigma_-\leqslant\gamma(x)\leqslant\sigma_+,0<f_-\leqslant u_0(x)\leqslant f_+\}.$$

定理 2.12 假定边界源函数 $\varphi(x,t)$ 满足 $0\not\equiv\varphi(x,t)\geqslant 0$. 记 $u^i(x,t)$ 为 (2.19) 和 (2.28) 对应于 $(\gamma,u_0)=(\gamma_i,u_0^i)\in\mathbb{A}$ $(i=1,2)$ 的解. 如果 $u^1(x,T)=u^2(x,T)$ 在 $\overline{D}$ 上成立, 则 $(\gamma_1(x),u_0^1(x))=(\gamma_2(x),u_0^2(x))$ 在 $C(\partial D)\times C(\overline{D})$ 上成立.

证明该定理的主要工具是极值原理、能量估计和未知量的先验正则性. 与波场逆散射的情形类似, T 时刻的温度场 $u(x,T)$ 包含了充分多的信息, 不仅有初始温场信息, 还有边界阻尼系数的信息.

很显然, 一个热传导系统反问题的性质, 除了与待定的未知量有关系外, 还与反演输入数据的形式和多少有关. 前面几个理论结果都是把反演输入条件 (2.21) 取为终止时刻 T 在全空间上的测量数据 (2.22), 由此来确定系统的未知成分. 从应用问题的角度而言, 这种给定反演输入数据的要求太强了. 首先, 由附加数据确定介质内部参数的问题本身就是由于介质内部可能是难以直接接触的, 因此给定 u 在全体内部点上的值是不现实的, 很多情形下的测量数据只能在边界上给定, 或者内部的某些区域上给定; 其次, 即使内部点能全部测量, 由于不可避免的噪声误差, 逐点的测量数据从计算角度看意义是不大的, 很多时候是考虑各点测量的 (带权) 平均值. 基于上述考虑, 反演输入数据还有下面两种特殊形式:

$$\mathcal{F}[u](x,t)=h(x,t), \quad (x,t)\in\mathcal{O}:=\partial D\times(0,T), \tag{2.29}$$

或者积分型的测量数据 [101]

$$\int_D \omega(x)u(x,t)dx=h(t), \quad t\in(0,T), \tag{2.30}$$

其中 $\omega(x)\geqslant 0$ 是点 x 处数据的权重. 上述两种反演输入数据的形式构成了另外两类重要的反问题: 基于边界测量数据的反问题和基于非局部测量数据的反问题. 很显然, (2.29) (或者 (2.30)) 给定的附加数据的信息量要少得多, 由它们反演介质内部未知信息的问题更为困难.

由 (2.29) 给定的边界附加数据的一个典型例子就是给定 ∂D 上的 Neumann 数据

$$a(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(x,t), \quad (x,t) \in \partial D \times (0,T). \tag{2.31}$$

对 $\mathcal{B} = \mathcal{I}$, 给定边界上一组 Cauchy 数据

$$\left(u(x,t), a(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) = (\varphi(x,t), h(x,t))$$

重建算子 $\mathcal{A}$ 中未知成分的结果较少, 一般没有唯一性. 一个已知的结果参见文献 [95, 第 9.2 小节], 在 $a(x) \equiv 1$ 和 $f(x,t) \equiv 0$ 的特殊情形下, 如果已知 $u_0(x)$ 和 $\varphi(x,t)$ 充分光滑, 并且 $u_0(x) \geqslant \epsilon_0 > 0$, $x \in \overline{D}$, 则一组 Cauchy 数据 (2.31) 可以唯一确定 $c(x) \in L^\infty(D)$.

为了能提供充分多的输入信息, 在使用 (2.31) 作为反演输入数据时, 通常要求使用许多不同的边界 Dirichlet 数据 $\varphi(x,t)$ 对应的 Neumann 数据 $h(x,t)$. 与波场逆散射的情形一样, 此时, 我们把 Dirichlet-to-Neumann 映射

$$\Lambda_{\mathcal{A}} : u\,|_{\partial D \times (0,T)} \mapsto a(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial D \times (0,T)}$$

作为已知的反演输入.

对这样的无穷组边界输入数据, 它可以提供 $\mathcal{A}$ 的非常充分的信息. 文献 [95] 给出了下述标准结果.

定理 2.13 假定 $f(x,t) \equiv u_0(x) \equiv 0$, 则 Dirichlet-to-Neumann 映射 $\Lambda_{\mathcal{A}}$ 唯一决定 $(a(x), c(x))$.

给定 Dirichlet-to-Neumann 映射 $\Lambda_{\mathcal{A}}$, 除了确定方程中的未知的光滑系数外, 另一类非常重要的问题就是要确定不光滑的系数 $(a(x), c(x))$, 特别是它们为分片常数的情形 (对应于整个介质 D 是由分片均匀的不同介质组成). 这种情形在物理上具有特别重要的意义, 特别是重建 $(a(x), c(x))$ 的间断面的位置, 一个典型的结果参见文献 [102]. 在假定 $a(x)$ 和 $c(x)$ 在 D 的内部一部分是非零正常数, 一部分恒为零的情形, 这种不间断系数的重建问题对应于介质内部有一个空腔 (cavity) 的情形. 此时一个重要的问题是利用介质外边界测量的信息来重建空腔的性质, 这对应于 (2.31) 中的 Dirichlet-to-Neumann 映射只定义在介质的外边界上. 对于这类问题, 在空腔的边界带有阻尼边界的情形, 利用介质外边界上的多组 Cauchy 数据或者 Dirichlet-to-Neumann 映射重建空腔边界和阻尼系数的唯一性和稳定性结果可参见文献 [103,104], 数值实现算法参见文献 [105].

关于由 (2.30) 给定的附加数据, 在文献 [101] 中有比较系统的研究. 由于给定的信息相对较少, 因此需要对抛物系统中待求的未知成分加一些先验的限制. 一个比较直观的结果仍然是对 (2.19) 中右端源项 $f(x,t)$ 的反演. 此时假定 $f(x,t) = G(t)g(x,t)$. 考虑 $\mathcal{B} = \mathcal{I}$, $a(x) \equiv 1$, $c(x) \equiv \varphi(x,t) \equiv u_0(x) \equiv 0$, 对已知的 $g(x,t)$ 和 $h(t)$, 由 (2.19) 和 (2.30) 组成的反演 $G(t)$ 进而求解 $u(x,t)$ 的反问题.

对给定的 $G(t)$, 正问题 (2.19) 定义了线性依赖于 $G(t)$ 的函数 $u(x,t)$. 对已知权函数 $\omega(x) \in C_0^\infty(D)$, 定义

$$g_1(t) := \int_D g(x,t)\omega(x)dx,$$

并假定 $|g_1(t)| \geqslant g^* > 0$. 由此定义 $G \in L^2(0,T)$ 到 $L^2(0,T)$ 的线性算子

$$\mathbb{A}[G](t) := \frac{1}{g_1(t)}\int_D u(x,t)\Delta\omega(x)dx.$$

利用 (2.30) 和 (2.19) 中的微分方程, 容易得到关于 $G(t)$ 的一个第二类 Volterra 线性积分方程:

$$G(t) = \mathbb{A}[G](t) + \frac{h'(t)}{g_1(t)}, \quad t \in (0,T). \tag{2.32}$$

通过证明由 (2.19) 和 (2.30) 构成的原反问题与积分方程 (2.32) 在适当的函数空间的解的等价性, 文献 [101] 给出了下面的结果.

定理 2.14 假定 $|g_1(t)| \geqslant g^* > 0$, $h(0) = 0$, 则下列断言成立:

(1) 由 (2.19) 和 (2.30) 构成的原反问题存在唯一解 $(u(x,t), G(t))$, 并且 $G(t)$ 有估计式

$$\|G\|_{L^2(0,T)} \leqslant C(T, g, \omega, g^*) \left\| \frac{h'}{g_1} \right\|_{L^2(0,T)}.$$

(2) 对任意的初值 $G_0 \in L^2(0,T)$, 迭代序列

$$G_{n+1}(t) := \mathbb{A}[G_n](t) + \frac{h'(t)}{g_1(t)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

产生的序列在 $L^2(0,T)$ 中收敛于 $G(t)$.

关于带有积分型的非局部边界的附加条件的反问题, 由于其重要性, 已经有了大量的研究, 可参见文献 [106, 107].

3 偏微分方程反问题的数值求解

一般的反问题的不适定性使得其在数值计算上具有特别的困难, 是一个需要专门研究的领域, 已经受到了国内外学者的高度关注 (参见文献 [108–111]). 由于 (时间) 空间的导数的存在以及 (可能的) 高维空间的大计算量, 因此, 由偏微分方程系统描述的反问题是一类极其复杂的不适定的科学计算问题. 在借助于对所求解的重新定义保证了解的唯一性以后, 偏微分方程反问题数值求解的核心问题是恢复解的稳定性, 正则化解的有效数值方法, 以及所得到的数值解在合适的近似意义下对原系统的反问题的误差估计.

3.1 数值求解误差的组成

偏微分方程系统描述的反问题一般都是无限维的, 包括待确定的未知成分、控制系统本身和反演输入的数据, 都是无限维的. 因此, 与一般的给定的数学模型求解过程一样, 数值求解偏微分方程反问题的数值误差首先包含了数据误差 (给定的反演输入数据有误差)、截断误差 (把无限维的模型用有限维来逼近) 和舍入误差 (数据在计算机中的有限位表示) 三个部分, 这是一般的数值求解过程都需要进行的误差分析 (参见文献 [112]).

但是偏微分方程反问题求解的误差估计有自身的另外特点. 首先, 对给定的噪声输入数据, 原来对应的偏微分方程反问题系统未必有解; 其次, 对于给定的输入数据 (即使是精确的), 原来对应的偏微分方程的反问题系统的解未必是唯一的. 因此, 我们真正进行数值求解的问题, 通常是原来所研究的偏微分方程的反问题的一个近似问题, 称为正则化问题. 这个正则化问题是适定的, 因而可以稳定求解. 因此, 我们对偏微分方程反问题的正则化求解过程, 实际上还包含了模型的近似. 这种模型的近似, 当然会反映在最终得到的数值解和原来所求问题解的偏差上. 最后, 即使一切可以控制的输入量都假定是准确的, 在数值计算的过程中, 数据的舍入误差总是难免的. 这种机器对数据的有限精度表示引起的误差由于问题的不适定性的特点, 有可能会无限放大.

一个典型的例子是抛物型方程的逆时问题. 考虑最简单的一维扩散过程

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0,\pi), \quad t \in (0,T), \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, & t \in [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{3.1}$$

该问题的逆时问题是, $u_0(x)$ 是未知的, 我们要通过给定的 $T > 0$ 时刻的数据

$$u(x,T) = g(x), \quad x \in (0,\pi) \tag{3.2}$$

来确定 $u_0(x)$ 进而通过求解适定的正问题 (3.1) 来确定 $u(x,t) : 0 < t < T$. 众所周知, 该逆时问题不是对一切的 $g \in L^2(0,\pi)$ 都有解 (物理上表示 $g(x)$ 不可能由任何的初始分布 $u_0 \in L^2(0,\pi)$ 产生), 因此, 我们不能直接求解模型

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0,\pi), \quad t \in (0,T), \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, & t \in [0,T], \\ u(x,T) = g(x), & x \in [0,\pi], \end{cases} \tag{3.3}$$

因为它可能无解 (即使有解也不稳定). 一个标准的正则化方法是对给定的常数 $\alpha > 0$, 求解适定问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0,\pi), \quad t \in (0,T), \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, & t \in [0,T], \\ \alpha u(x,0) + u(x,T) = g(x), & x \in [0,\pi], \end{cases} \tag{3.4}$$

得到 $u^\alpha(x,0)$. 模型 (3.4) 就是我们考虑的原问题 (3.1) 和 (3.2) 的一个近似模型. 这种模型误差是通过参数 $\alpha > 0$ 来刻画的. 因此, 对偏微分方程反问题数值求解的误差估计, 除了常规的对适定问题的误差分析应该考虑的因素以外, 还要考虑为了处理问题的不适定性而引进正则项导致的模型误差. 这个工作就构成了求解不适定问题的正则化理论的主要内容.

3.2 数值反演的有效实现

反问题研究的强大的生命力来源于其明确的工程应用驱动. 因此, 从偏微分方程反问题应用于实际工程问题的角度来讲, 反问题的数值算法必须是能够有效实现的. 有效实现包含两个方面的意思: 一是必须得到原问题解的满足工程要求的近似; 二是数值实现的过程要是在可接受的数据存储量和计算时间内获得. 前者是对算法设计的理论要求, 后者是要求在算法设计时还必须考虑到现代工程问题的超大规模数据和计算设备的有限存储能力和计算速度. 这两方面的要求很多时候难免是冲突的, 因此需要在反演算法的实现过程中引入现代的数学工具和方法来尽可能地平衡这种冲突, 而不是简单地对原来的问题直接离散再利用一些标准的软件进行计算.

对于偏微分方程的反问题, 在把问题投影到有限维空间以后, 我们仍然可以把它抽象为一般的 (非线性) 算子方程

$$\mathcal{G}(x) = y^\delta \tag{3.5}$$

的有效求解问题, 其中 $y^\delta \in \mathcal{C}^m$ 是原来问题给定的反演噪声输入数据, $x \in \mathcal{C}^n$ 是待确定未知量. 由于原来的问题在无限维空间上是不适定的, 因此, 这里的正演算子 $\mathcal{G}$ 一般而言也是病态的, 因此导致了问题数值求解的不稳定性.

求解反问题的一般框架之一是极小化一个带有罚项的目标泛函, 利用一些标准的迭代型算法去求解该泛函的 (局部) 极小元. 对不适定的方程 (3.5), 其任务是极小化

$$J_\alpha(x) := \|\mathcal{G}(x) - y^\delta\|^2 + \alpha\|x - x^*\|^2, \tag{3.6}$$

其中 $\alpha > 0$ 是给定的正则化参数, 保证极小元的稳定性, x^* 是原问题解的某种已知的先验信息.

对非线性的正向算子, 极小化 (3.6) 的一个经典方法是沿负梯度的方向 $-\nabla J_\alpha(x_k)$ 作迭代[111]. 这种迭代过程通常需要反复求解正问题 $\mathcal{G}(x_k)$ 以得到下一步的输出数据, 考虑到此时 $\mathcal{G}$ 是由偏微分方程系统来定义的, 包含了时间和高维空间的变量, 求解 $\mathcal{G}(x_k)$ 的计算量是很大的, 因此迫切需要使用求解正问题的高效算法, 而不是直接求解原来的控制系统. 这种要求在求解偏微分方程反问题中一个典型应用就是偏微分方程定解问题表达的位势理论 (potential theory). 该理论借助于偏微分方程基本解, 把带有边界条件的正问题的解表示为带有待定密度函数在边界上的一个积分, 再利用边界条件来确定该密度函数. 这种方法对抛物型方程和椭圆型方程同样有效, 在所研究的问题是一个无界区域的情形 (例如, 不可穿透的散射体的逆散射问题), 能大幅度减少计算量, 已经在反问题的数值求解中得到广泛的应用 (参见文献 [16,113]).

求解偏微分方程反问题上述优化方法的框架的一个优点是, 即使给定的反演输入数据 y^δ 不能保证原反问题解的存在性 (噪声数据) 和唯一性 (不完全数据), 也能得到原来反问题在某种广义意义下的一个近似解, 而且在很多情形下这种解是非常有效的. 这种优化求解方案能够有效实现的前提, 除了正问题的高效求解方案以外, 解的先验信息 x^* 和迭代初值 x_0 的合适选取对有效得到需要的近似解是关键的, 也是基于数据匹配的优化方法的核心.

实施这种有效选取的一个可行的途径是近 20 年来发展起来以波场逆散射问题的求解为代表的所谓定量重构方法[17,114,115]. 该方法的核心是利用反演输入数据构造偏微分方程控制系统中未知量 (如散射体边界 ∂D) 的带有检测点的某种标志函数, 再基于严格的数学分析, 建立标志函数中的检测点的位置与未知量之间的爆破关系, 利用这种定性的性质来重建未知成分. 这种方案本身就是一种独立的反问题的求解方案, 由于不需要求解正问题, 因此受到广泛的关注. 但是, 这种定性爆破性质的数值刻画 (如标志函数爆破的标准) 是难以客观给出的, 同时为了精确重建未知量, 检测点的选取也必须充分多, 这也会导致计算量的增大. 因此, 这种定性重建方法在计算量的限制下重建精度一般不高. 近年来已有学者提出 (参见文献 [83]), 把这种定性的重建方法与上述基于优化的重建方法相结合, 首先用定性重建方法得到优化重建方法的一个客观的初始猜测 x_0 或先验 x^*, 然后再用优化方法定量重建未知成分, 这是未来一段时间内一个比较重要的研究领域.

3.3 罚项选取对数值精度的影响

为了得到原来偏微分方程反问题在某种意义下的稳定的广义解, 引进了正则化罚项, 从而导致了我们实际求解的一个适定问题只是原来待求问题的一个近似. 如前所述, 这种模型上的近似必然导致数值结果上的近似.

正则化的罚项除了 (3.6) 中的 $\alpha\|x-x^*\|^2$ 以外, 可能不是一个模 (如半模), 也有可能是在原来的模型中直接添加起到正则化作用的罚项. 这种罚项对最终数值求解误差的影响本质上包含了两个部分: 一是罚项的权重的大小, 即正则化参数 $\alpha > 0$ 的选取; 二是罚项的性态本身, 不同性质的罚项对最终的数值误差显然是不同的.

正则化参数权重的选取有两类不同的基本准则: 先验选取和后验选取. 先验选取是借助于问题的精确解已有的先验的定性性质 (如光滑性程度) 来给出正则化参数的定量选取策略, 进而估计数值解

的近似误差. 但是, 要求事先知道精确解的某种正则性, 对具体的应用问题一般是很难验证的, 很多时候只具有理论上的价值. 正则化参数的后验选取试图避开这类难以验证的解的正则性条件, 而是完全基于输入数据给出正则化参数的选取方法. 比较重要的后验选取策略就是 (广义的) Morozov 相容性原理. 该原理基于计算得到的未知量产生的对应的数据应该与输入数据具有基本相同的精度的考虑, 要求 (3.6) 对给定 $\alpha > 0$ 的极小元 $x^{\alpha,\delta}$ 满足

$$\|\mathcal{G}(x^{\alpha,\delta}) - y^{\delta}\| = \tau\delta, \tag{3.7}$$

其中 $\tau > 1$ 是给定的常数. (3.7) 是关于 α 的一个一元非线性方程, 理论上可以用数值方法求解.

罚项的选取方式对所得到的解的误差有显著的影响, 这种影响是通过对正则化泛函的极小元满足的 (非线性) Euler 方程和由 (3.7) 确定的 α 两种方式来体现的. 对偏微分方程的反问题, 正则化泛函本质上是由模型中添加的不同的正则化项来表现的. 例如, 对反问题 (3.1) 和 (3.2), 既可以对输入条件添加正则化项 $\alpha u(x,0)$ 考虑系统 (3.4), 也可以保持终值输入数据 (3.2) 不变, 考虑下面的正则化问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - \alpha u_{xxxx}, & x \in (0,\pi), \quad t \in (0,T), \\ u(0,t) = u_x(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t \in [0,T], \\ u(x,T) = g(x), & x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{3.8}$$

因此, 为保持数值求解的稳定性而考虑的正则化解对原问题解的误差的影响, 本质上是由正则化项的选取方式决定的.

参考文献

1 Keller J B. Inverse problems. Amer Math Monthly, 1976, 83: 107–118

2 Hadamard J. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations. New Haven: Yale University Press, 1923

3 Tikhonov A N, Arsenin V Y. 不适定问题的解法. 王秉忱, 译. 北京: 地质出版社, 1979

4 Romanov V G. Inverse Problems of Mathematical Physics. Utrecht: VNU Science Press, 1987

5 Phillips D L. A Technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind. J ACM, 1962, 9: 84–97

6 Engl H W, Hanke M, Neubauer A. Regularizations of Inverse Problems. Mathematics and Its Applications, vol. 375. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996

7 Schuster T, Kaltenbacher B, Hofmann B, et al. Regularization Methods in Banach Spaces, Volume 10 of Radon Series on Computational and Applied Mathematics. Berlin-Boston: Walter de Gruyter, 2012

8 Colton D L, Ewing R, Rundell W. Inverse Problems in Partial Differential Equations. Philadelphia: SIAM, 1990

9 Kirsch A. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems, 2nd ed. Applied Mathematical Sciences, vol. 120. Berlin: Springer-Verlag, 2011

10 Mueller J L, Siltanen S. Linear and Nonlinear Inverse Problems with Practical Applications. Computational Science & Engineering. Philadelphia: SIAM, 2012

11 Poschel J, Trubowitz E. Inverse Spectral Theory. Pure and Applied Mathematics, vol. 130. Boston: Academic Press, 1987

12 黄光远, 刘小军. 数学物理反问题. 济南: 山东科学技术出版社, 1993

13 Payne L E. Improperly Posed Problems in Partial Differential Equations. Philadelphia: SIAM, 1975

14 Law K, Stuart A, Zygalakis K. Data Assimilation: A Mathematical Introduction. Berlin: Springer-Verlag, 2010

15 Nakamura G, Saitoh S, Seo J K, et al. Inverse Problems and Related Topics. New York: Chapman & Hall/CRC, 2000

16 Colton D L, Kress R. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, 3rd ed. Applied Mathematical Sciences, vol. 93. Berlin: Springer-Verlag, 2013

17 Cakoni F, Colton D L. A Qualitative Approach to Inverse Scattering Theory. New York: Springer-Verlag, 2014

18 Aubert G, Kornprobst P. Mathematical Problems in Image Processing, 2nd ed. Applied Mathematical Sciences, vol. 147. Berlin: Springer-Verlag, 2002

19 Roach G F. Inverse Problems and Imaging. Essex: Longman Group UK Limited, 1991

20 Anger G. Inverse Problems in Differential Equations. New York: Plenum Press, 1990

21 美国科学院国家研究理事会. 2025 年的数学科学. 刘小平, 李泽霞, 译. 北京: 科学出版社, 2014

22 刘继军. 不适定问题的正则化方法及应用. 信息与计算科学丛书, 第 36 卷. 北京: 科学出版社, 2005

23 Nachman A, Sylvester J, Uhlmann G. An n-dimensional Borg-Levinson theorem. Comm Math Phys, 1988, 115: 595–605

24 Sylvester J, Uhlmann G. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. Ann of Math (2), 1987, 125: 153–169

25 Alessandrini G. Stable determination of conductivity by boundary measurements. Appl Anal, 1988, 27: 153–172

26 Nachman A. Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem. Ann of Math (2), 1996, 143: 71–96

27 Cheng J, Yamamoto M. Determination of two convection coefficients from Dirichlet to Neumann map in the two-dimensional case. SIAM J Math Anal, 2004, 35: 1371–1393

28 Brown R M, Torres R H. Uniqueness in the inverse conductivity problem for conductivities with 3/2 derivatives in L^p, $p > 2n$. J Fourier Anal Appl, 2003, 9: 563–574

29 Panchenko A, Uhlmann G, Päivärinta L. Complex geometrical optics solutions for Lipschitz conductivities. Rev Mat Iberoam, 2003, 19: 57–72

30 Haberman B, Tataru D. Uniqueness in Calderón's problem with Lipschitz conductivities. Duke Math J, 2013, 162: 496–516

31 Haberman B. Uniqueness in Calderón's problem for conductivities with unbounded gradient. Comm Math Phys, 2015, 340: 639–659

32 Caro P, Rogers K. Global uniqueness for the Calderón problem with Lipschitz conductivities. Forum Math, 2016, 4: 28pp

33 Astala K, Païvärinta L. Calderón's inverse conductivity problem in the plane. Ann of Math (2), 2006, 163: 265–299

34 Uhlmann G. Inverse problems: Seeing the unseen. Bull Math Sci, 2014, 4: 209–279

35 Greenleaf A, Kurylev Y, Lassas M, et al. Invisibility and inverse problems. Bull Amer Math Soc (NS), 2009, 46: 55–97

36 Uhlmann G. Electrical impedance tomography and Calderón's problem. Inverse Problems, 2009, 25: 123011

37 Kenig C, Salo M. Recent progress in the Calderón problem with partial data. Contemp Math, 2014, 615: 193–222

38 Sun Z. The inverse conductivity problem in two dimensions. J Differential Equations, 1990, 87: 227–255

39 Cristo M D, Rondi L. Examples of exponential instability for inverse inclusion and scattering problems. Inverse Problems, 2003, 19: 685–701

40 Mandache N. Exponential instability in an inverse problem for the Schrödinger equation. Inverse Problems, 2001, 17: 1435–1444

41 Alessandrini G, Vessella S. Lipschitz stability for the inverse conductivity problem. Adv in Appl Math, 2005, 35: 207–241

42 Rondi L. A remark on a paper by Alessandrini and Vessella. Adv in Appl Math, 2006, 36: 67–69

43 Bukhgeim A L, Uhlmann G. Recovering a potential from partial Cauchy data. Comm Partial Differential Equations, 2002, 27: 653–668

44 Imanuvilov O Y, Uhlmann G, Yamamoto M. The Calderon problem with partial data in two dimensions. J Amer Math Soc, 2010, 23: 655–691

45 Bourgeois L. A remark on Lipschitz stability for inverse problems. C R Math Acad Sci Paris, 2013, 351: 187–190

46 Liu J J, Seo J K, Sini M, et al. On the convergence of the harmonic B_z algorithm in magnetic resonance electrical impedance tomography. SIAM J Appl Math, 2007, 67: 1259–1282

47 Seo J K, Kim S W, Kim S, et al. Local harmonic $B(z)$ algorithm with domain decomposition in MREIT: Computer

simulation study. IEEE Trans Med Imaging, 2008, 27: 1754–1761
48 Liu J J, Seo J K, Woo E J. A posteriori error estimate and convergence analysis for conductivity image reconstruction in MREIT. SIAM J Appl Math, 2010, 70: 2883–2903
49 Seo J K, Woo E J. Magnetic resonance electrical impedance tomography (MREIT). SIAM Rev, 2011, 53: 40–68
50 Song Y Z, Kwon H, Jeon K W, et al. Analysis and blocking of error propagation by region-dependent noisy data in MREIT. SIAM J Sci Comput, 2013, 35: B912–B924
51 Song Y Z, Ammari H, Seo J K. Fast magnetic resonance electrical impedance tomography with highly undersampled data. SIAM J Imaging Sci, 2017, 10: 558–577
52 Lax P D, Phillips R S. Scattering Theory. New York: Academic Press, 1967
53 Liu J J, Cheng J, Nakamura G. Reconstruction and uniqueness of an inverse scattering problem with impedance boundary. Sci China Ser A, 2002, 45: 1408–1419
54 Wang H B, Liu J J. On the reconstruction of Dirichlet-to-Neumann map in inverse scattering problems with stability estimates. Sci China Math, 2010, 53: 2069–2084
55 Wang H B, Liu J J. Recovering the Dirichlet-to-Neumann map in inverse scattering problems using integral equation methods. Adv Comput Math, 2012, 36: 279–297
56 Liu J J, Nakamura G, Sini M. Reconstruction of the shape and surface impedance from acoustic scattering data for an arbitrary cylinder. SIAM J Appl Math, 2007, 67: 1124–1146
57 Bourgeois L, Chaulet N, Haddar H. On simultaneous identification of the shape and generalized impedance boundary condition in obstacle scattering. SIAM J Sci Comput, 2012, 34: A1824–A1848
58 Cheng J, Yamamoto M. Uniqueness in an inverse scattering problem within non-trapping polygonal obstacles with at most two incoming waves. Inverse Problems, 2003, 19: 1361–1384
59 Cheng J, Masahiro Y. Global uniqueness in the inverse acoustic scattering problem within polygonal obstacles. Chin Ann Math Ser B, 2004, 25: 1–6
60 Liu H, Zou J. Uniqueness in an inverse acoustic obstacle scattering problem for both sound-hard and sound-soft polyhedral scatterers. Inverse Problems, 2006, 22: 515–524
61 Liu H, Petrini M, Rondi L, et al. Stable determination of sound-hard polyhedral scatterers by a minimal number of scattering measurements. J Differential Equations, 2017, 262: 1631–1670
62 Hu G H, Yang J Q, Zhang B, et al. Near-field imaging of scattering obstacles with the factorization method. Inverse Problems, 2014, 30: 095005
63 Nachman A I. Reconstructions from boundary measurements. Ann of Math (2), 1988, 128: 531–576
64 Ramm A G. Multimensional Inverse Scattering Problems. New York: Longman-Wiley, 1992
65 Sun Z, Uhlmann G. Recovery of singularities for formally determined inverse problems. Comm Math Phys, 1993, 153: 431–445
66 Bukhgeim A L. Recovering a potential from Cauchy data in the two-dimensional case. J Inverse Ill-Posed Probl, 2008, 16: 19–33
67 Blasten E. The inverse problem of the Schrödinger equation in the plane. Licentiate Thesis. Helsinki: University of Helsinki, 2011
68 Hu G H, Salo M, Vesalainen E V. Shape identification in inverse medium scattering problems with a single far-field pattern. SIAM J Math Anal, 2016, 48: 152–165
69 Liu X D, Zhang B. Uniqueness results for inverse scattering problems. In: Computational Methods for Applied Inverse Problems. Beijing: Higher Education Press, 2012, 251–281
70 Strycharz B. Uniqueness in the inverse transmission scattering problem for periodic media. Math Methods Appl Sci, 1999, 22: 753–772
71 Yang J Q, Zhang B. An inverse transmission scattering problem for periodic media. Inverse Problems, 2011, 27: 125010
72 Yang J Q, Zhang B, Zhang R. Near-field imaging of periodic interfaces in multilayered media. Inverse Problems, 2016, 32: 035010
73 Courjon D, Bainier C. Near field microscopy and near field optics. Rep Progr Phys, 1994, 57: 989–1028
74 Hähner P, Hohage T. New stability estimates for the inverse acoustic inhomogeneous medium problem and applications. SIAM J Math Anal, 2001, 33: 670–685

75 Zhang B, Zhang H. Recovering scattering obstacles by multi-frequency phaseless far-field data. J Comput Phys, 2017, 345: 58–73

76 Wang H B, Liu J J. The two-dimensional direct and inverse scattering problems with generalized oblique derivative boundary condition. SIAM J Appl Math, 2015, 75: 313–334

77 Cheng J, Isakov V, Lu S. Increasing stability in the inverse source problem with many frequencies. J Differential Equations, 2016, 260: 4786–4804

78 Bao G, Lin J. Imaging of local surface displacement on an infinite ground plane: The multiple frequency case. SIAM J Appl Math, 2011, 71: 1733–1752

79 Bao G, Lin J, Mefire S. Numerical reconstruction of electromagnetic inclusions in three dimensions. SIAM J Imaging Sci, 2016, 7: 558–577

80 Bao G, Lu S, Rundell W, et al. A recursive algorithm for multi frequency acoustic inverse source problems. SIAM J Numer Anal, 2015, 53: 1608–1628

81 Coifman R, Goldberg M, Hrycak T, et al. An improved operator expansion algorithm for direct and inverse scattering computations. Waves Random Media, 1999, 9: 441–457

82 Sini M, Thanh N. Inverse acoustic obstacle scattering problems using multifrequencymeasurements. Inverse Problems Imaging, 2013, 6: 749–773

83 Bao G, Li P, Lin J, et al. Inverse scattering problems with multi-frequencies. Inverse Problems, 2015, 31: 093001

84 Kirsch A, Grinberg N. The Factorization Method for Inverse Problems. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 36. Oxford: Oxford University Press, 2008

85 Hanke M, Kirsch A. Sampling methods. In: Handbook of Mathematical Methods in Imaging. Berlin: Springer-Verlag, 2011, 501–550

86 Colton D L, Kress R. Inverse scattering. In: Handbook of Mathematical Methods in Imaging. Berlin: Springer-Verlag, 2011, 551–598

87 刘晓东, 张波. 分解法在声波反散射问题中的最新进展. 中国科学: 数学, 2015, 45: 873–890

88 Bao G, Li P. Inverse medium scattering problems for electromagnetic waves. SIAM J Appl Math, 2005, 65: 2049–2066

89 Bao G, Li P. Numerical solution of an inverse medium scattering problem for Maxwell's equations at fixed frequency. J Comput Phys, 2009, 228: 4638–4648

90 Bao G, Li P. Near-field imaging of infinite rough surfaces. SIAM J Appl Math, 2013, 73: 2162–2187

91 Bao G, Li P. Near-field imaging of infinite rough surfaces in dielectric media. SIAM J Imaging Sci, 2014, 7: 867–899

92 Liu X, Zhang B. A uniqueness result for the inverse electromagnetic scattering problem in a two-layered medium. Inverse Problems, 2010, 26: 105007

93 Xu X, Zhang B, Zhang H. Uniqueness in inverse scattering problems with phaseless far-field data at a fixed frequency. SIAM J Appl Math, 2018, 78: 1737–1753

94 Liu J J, Yamamoto M. A backward problem for the time-fractional diffusion equation. Appl Anal, 2010, 89: 1769–1788

95 Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations, 3rd ed. Applied Mathematical Sciences, vol. 127. Berlin: Springer-Verlag, 2017

96 Wang L Y, Liu J J. Total variation regularization for a backward time-fractional diffusion problem. Inverse Problems, 2013, 29: 115013

97 Isakov V. Inverse Source Problems. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 34. Providence: Amer Math Soc, 1990

98 Isakov V. Inverse parabolic problems with the final over determination. Comm Pure Appl Math, 1991, 44: 185–209

99 Bushuyev I. Global uniqueness for inverse parabolic problems with final observation. Inverse Problems, 1995, 11: L11–L16

100 Wang Y C, Liu J J. On the simultaneous recovery of boundary heat transfer coefficient and initial heat status. J Inver Ill-posed Probl, 2017, 25: 597–616

101 Prilepko A I, Orlovsky D G, Vasin I A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York: Marcel Dekker Inc, 1999

102 Elayyan A, Isakov V. On uniqueness of recovery of the discontinuous conductivity coefficient of a parabolic equation. SIAM J Math Anal, 1997, 28: 49–59

103 Isakov V. On uniqueness of obstacles and boundary conditions from restricted dynamical and scattering data. Inverse

Probl Imaging, 2008, 2: 151–165
104 Bacchelli V, Di Cristo M, Sincich E, et al. A parabolic inverse problem with mixed boundary data: Stability estimates for the unknown boundary and impedance. Trans Amer Math Soc, 2014, 366: 3965–3995
105 Nakamura G, Wang H B. Reconstruction of an unknown cavity with Robin boundary condition inside a heat conductor. Inverse Problems, 2015, 31: 125001
106 Liu J J, Wang Y C. On the reconstruction of boundary impedance of a heat conduction system from nonlocal measurement. Inverse Problems, 2016, 32: 075002
107 Liu J J, Yamamoto M, L Yan L. On the reconstruction of unknown time-dependent boundary sources for time fractional diffusion process by distributing measurement. Inverse Problems, 2016, 32: 015009
108 Wang Y F, Yagola A G, Yang C C. Computational Methods for Applied Inverse Problems. Beijing: Higher Education Press, 2012
109 肖庭延, 于慎根, 王彦飞. 反问题的数值解法. 北京: 科学出版社, 2003
110 王彦飞. 反演问题的计算方法及其应用. 北京: 高等教育出版社, 2007
111 Vogel C R. Computational Methods for Inverse Problems. Philadelphia: SIAM, 2002
112 刘继军. 现代数值方法. 信息与计算科学丛书, 第 47 卷. 北京: 科学出版社, 2010
113 Cheng J, Liu J J. A quasi Tikhonov regularization for a two-dimensional backward heat problem by a fundamental solution. Inverse Problems, 2008, 24: 065012
114 Cheng J, Liu J J, Nakamura G, et al. Recovery of multiple obstacles by probe method. Quart Appl Math, 2009, 67: 221–247
115 Cheng J, Liu J J, Nakamura G. The numerical realization of the probe method for the inverse scattering problems from the near-field data. Inverse Problems, 2005, 21: 839–855

Inverse problems for PDEs: Models, computations and applications

Jin Cheng, Jijun Liu & Bo Zhang

Abstract Inverse problems for partial differential equations (PDEs) are of great importance in the areas of applied mathematics, which cover different mathematical branches including PDEs, functional analysis, nonlinear analysis, optimizations, regularization and numerical analysis. These problems have found wide applications in many important engineering areas such as media imaging, remote sensing and image processing. Due to the nature of ill-posedness of such kinds of problems, the techniques of regularization should be applied for efficiently solving these problems. However, it is very hard to establish a unified framework for inverse problems of PDEs, due to the variety and complexity of the problems. This paper aims to give an overview on several important inverse problems of PDEs models. Based on the systematic recalls on the origins and specialities of inverse problems for PDEs, we focus on three kinds of PDEs models for inverse problems: electrical impedance tomograph, inverse wave scattering, thermal imaging. The crucial problems of fundamental interests, existing results and methods as well as further possible research directions are reviewed. Moreover, we also give a systematic analysis of numerical methods for solving inverse problems for PDEs.

Keywords **partial differential equations, inverse problems, ill-posedness, regularization, stability, numerics**

MSC(2010) **35Q60, 35Q93, 35R25, 35R30, 65N20, 65N21, 65R32**

doi: 10.1360/N012018-00076