不可压 MHD 系统的零耗散极限中的边界层

献给李大潜教授 80 华诞

王术¹, 辛周平^{2*}

1. 北京工业大学应用数理学院, 北京 100124;

2. 香港中文大学数学科学研究所, 香港

E-mail: wangshu@bjut.edu.cn, zpxin@ims.cuhk.edu.hk

收稿日期: 2016-11-15; 接受日期: 2016-12-03; 网络出版日期: 2017-03-27; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371042)、郑格如基金、香港 RGC Earmarked 研究基金 (批准号: CUHK-14305315 和 CUHK 4048/13P)、NSFC/RGC 联合研究计划 (批准号: N-CUHK443-13) 和香港中文大学聚焦区域基金资助项目

摘要 本文研究通常的 Dirichlet 物理边界条件下带有小而变化的黏性和磁扩散系数的不可压磁流体 (MHD) 方程组的初边值的极限问题; 发现了一类非平凡的初值, 对于这类初值能建立其 Prandtl 型边界层的一致稳定性, 并且严格证明了理想的 MHD 方程组的解和 Prandtl 型边界层修正子的叠加是黏性扩散不可压 MHD 方程的解的一致逼近. 这里的主要困难是处理和控制由耗散的 MHD 系统和理想 MHD 系统边界条件差异产生的 Prandtl 型的奇异边界层. 关键的观察是对于本文研究的初值, 其解的速度场和磁场的边界层的主要奇异项存在有抵消现象. 这使得我们能基于精细的能量方法来使用这个特殊结构带来的好处, 从而克服在研究这类问题中通常不能解决的困难. 此外, 在黏性系数为固定的正常数情形, 对于一般初值, 也能建立磁场的扩散边界层的稳定性以及零磁扩散极限中解的一致收敛性.

关键词 不可压的黏性扩散 MHD 方程 理想的不可压 MHD 方程 Dirichlet 边界条件下的边界层问题

MSC (2010) 主题分类 35Q30, 35Q35, 35Q40, 35Q53, 35Q55, 76D05, 76Y07

1 引言

本文研究下面的二维或三维不可压的黏性扩散 MHD 方程组 Dirichlet 初边值问题:

$$\partial_t u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon - \varepsilon_1 \Delta u^\varepsilon = b^\varepsilon \cdot \nabla b^\varepsilon, \quad \text{在 } \Omega \times (0, T) \text{ 上}, \quad (1.1)$$

$$\partial_t b^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla b^\varepsilon - \varepsilon_2 \Delta b^\varepsilon = b^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon, \quad \text{在 } \Omega \times (0, T) \text{ 上}, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} u^\varepsilon = 0, \quad \operatorname{div} b^\varepsilon = 0, \quad \text{在 } \Omega \times (0, T) \text{ 上}, \quad (1.3)$$

$$u^\varepsilon = 0, \quad b^\varepsilon = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \times (0, T) \text{ 上}, \quad (1.4)$$

$$u^\varepsilon(t=0) = u_0^\varepsilon, \quad b^\varepsilon(t=0) = b_0^\varepsilon, \quad \text{满足 } \operatorname{div} u_0^\varepsilon = \operatorname{div} b_0^\varepsilon = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 上} \quad (1.5)$$

英文引用格式: Wang S, Xin Z P. Boundary layer problems in the vanishing viscosity-diffusion limits for the incompressible MHD system (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1303–1326, doi: 10.1360/N012016-00211

的零耗散极限、零磁扩散消失极限和边界层问题, 其中 $\Omega = \omega \times [0, h]$ 或 $\Omega = \omega \times (0, \infty)$. 在三维情形, $\omega = \mathbb{T}^2$ 或 $\omega = \mathbb{R}^2$, 在二维情形 $\omega = \mathbb{T}^1$ 或 $\omega = \mathbb{R}^1$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 或 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 是三维或二维 Laplace 算子, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0$ 是黏性系数, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon) > 0$ 是磁扩散系数, 未知函数 u^ε 、 p^ε 和 b^ε 分别是 MHD 系统的速度、压力和磁场.

关于不可压黏性扩散 MHD 系统 (1.1)–(1.3) 初值问题或带滑移或无滑移边界条件的初边值问题的适定性、正则性和渐近极限问题已经有很多结果, 参见文献 [1–7]. 当 $\varepsilon_1 > 0$ 和 $\varepsilon_2 > 0$ 时, MHD 系统的初值问题或带着速度场的滑移边界条件及磁场的无滑移边界条件的初边值问题在二维情形存在唯一的整体光滑解而在三维情形存在整体的 Leray-Hopf 弱解, 参见文献 [2, 4]. 一些正则性准则在文献 [8–12] 及其参考文献中获得. 特别地, Cao 和 Wu [8] 获得了带混合速度耗散和磁扩散的二维不可压 MHD 系统整体解的存在唯一性. Wu [11] 考虑不可压黏性无磁扩散 MHD 系统初值问题的黏性消失极限. Xiao 等 [6] 研究了带着滑移无摩擦边界情形的不可压黏性 MHD 系统的可解性、正则性和黏性消失极限问题.

应该指出正像 Navier-Stokes 方程 Dirichlet 初边值问题的黏性消失极限问题一样 (参见文献 [8, 13–19]), Prandtl 型边界层的出现和分析极为困难, 带有 Dirichlet 边界条件的黏性扩散不可压 MHD 系统的零耗散极限也是一个极具挑战的问题 (也可参见文献 [20–26] 及所引文献). 最近, 文献 [27] 考虑了这个问题在 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ 情形以及水平、垂直黏性和磁扩散系数不同情形下的零黏性扩散消失极限问题, L^2 收敛性也被解决. 本文研究 $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ 情形以及 L^∞ 收敛性问题, 也考虑黏性固定时一般初值的黏性扩散 MHD 系统 Dirichlet 初边值问题的零磁扩散极限问题. 首先, 让我们形式地看一下 MHD 系统的渐近极限问题.

在系统 (1.1)–(1.5), 令 $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ 和 $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, 就可得不可压的理想 MHD 系统

$$\partial_t u^0 + u^0 \cdot \nabla u^0 + \nabla p^0 = b^0 \cdot \nabla b^0, \quad (x, y, z, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (1.6)$$

$$\partial_t b^0 + u^0 \cdot \nabla b^0 = b^0 \cdot \nabla u^0, \quad (x, y, z, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (1.7)$$

$$\operatorname{div} u^0 = 0, \quad \operatorname{div} b^0 = 0, \quad (x, y, z, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (1.8)$$

$$u^0 \cdot n = \pm u_3^0 = 0, \quad b^0 \cdot n = \pm b_3^0 = 0, \quad (x, y, z, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (1.9)$$

$$u^0(t=0) = u_0^0, \quad b^0(t=0) = b_0^0, \quad \operatorname{div} u_0^0 = \operatorname{div} b_0^0 = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega. \quad (1.10)$$

另外, 对于系统 (1.1)–(1.5), 令零磁扩散系数 $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, 可得黏性 MHD 系统

$$\partial_t u^{\varepsilon_1, 0} + u^{\varepsilon_1, 0} \cdot \nabla u^{\varepsilon_1, 0} - \varepsilon_1 \Delta u^{\varepsilon_1, 0} + \nabla p^{\varepsilon_1, 0} = b^{\varepsilon_1, 0} \cdot \nabla b^{\varepsilon_1, 0}, \quad (x, y, z, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (1.11)$$

$$\partial_t b^{\varepsilon_1, 0} + u^{\varepsilon_1, 0} \cdot \nabla b^{\varepsilon_1, 0} = b^{\varepsilon_1, 0} \cdot \nabla u^{\varepsilon_1, 0}, \quad (x, y, z, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (1.12)$$

$$\operatorname{div} u^{\varepsilon_1, 0} = 0, \quad \operatorname{div} b^{\varepsilon_1, 0} = 0, \quad (x, y, z, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (1.13)$$

$$u^{\varepsilon_1, 0} = 0, \quad b_3^{\varepsilon_1, 0} = 0, \quad (x, y, z, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (1.14)$$

$$u^{\varepsilon_1, 0}(t=0) = u_0^{\varepsilon_1, 0}, \quad b^{\varepsilon_1, 0}(t=0) = b_0^{\varepsilon_1, 0}, \quad \operatorname{div} u_0^{\varepsilon_1, 0} = \operatorname{div} b_0^{\varepsilon_1, 0} = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega. \quad (1.15)$$

本文的主要目的是在黏性和扩散系数的适当假设下严格地证明上面的形式极限. 由于不可压 MHD 系统 (1.1)–(1.5) 包含了不可压的 Navier-Stokes 方程, 因此, 不可压 NS (Navier-Stokes) 方程 Dirichlet 初边值问题的零黏性消失极限和边界层问题处理中遇到的困难如 Prandtl 边界层的适定性问题、边界层的厚度问题和非局部压力问题等这里都仍然存在. 这里关键的贡献是我们可以找到含有非零磁场的一类非平凡初值, 使得其解的速度场和磁场都含有 Prandtl 型边界层, 但它们的抵消可以通过速度场

和磁场的组合而实现, 从而使边界层的稳定性和一致收敛性成为可能. 因此, 这里的方法不能被直接用来处理不可压 NS 方程 Dirichlet 边值问题的边界层问题. 更进一步, 由于速度场和磁场的非线性耦合的困难, 因此, 不可压黏性扩散 MHD 方程 Dirichlet 初边值问题的零磁扩散消失极限问题也是困难的, 例如, 不可压磁扩散无黏 MHD 系统 Dirichlet 初边值问题一般初值情形下的磁扩散边界层问题也不能使用本文的方法获得, 见注 2.4.

本文余下的内容结构如下: 第 2 节陈述本文的主要结果; 第 3 节给出本文主要结果的证明, 包括近似边界层函数的构造.

2 主要结果

本节陈述本文的主要结果. 在陈述之前, 我们先回顾关于三维理想的不可压 MHD 模型古典解的局部存在性结果, 参见文献 [2, 4].

命题 2.1 令 (u_0^0, b_0^0) 满足 $u_0^0, b_0^0 \in H^s(\Omega)$, $s > \frac{3}{2} + 1$, $\operatorname{div} u_0^0 = \operatorname{div} b_0^0 = 0$ 和 $u_0^0 \cdot n|_{\partial\Omega} = b_0^0 \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$, 则存在 $0 < T_* \leq \infty$ 、解的最大存在时间和不可压理想 MHD 系统 (1.6)–(1.10) 定义在区间 $[0, T_*)$ 上的唯一光滑解 (u^0, p^0, b^0) , 在下面也记为 $(u^{0,0}, p^{0,0}, b^{0,0})$, 满足性质: 对于 $T < T_*$, 有

$$\sup_{0 \leq t \leq T} (\| (u^0, b^0) \|_{H^s} + \| (\partial_t u^0, \partial_t b^0) \|_{H^{s-1}(\Omega)}) \leq C(T).$$

而且, 如果 (u_0^0, b_0^0) 满足 $u_0^0 = \pm b_0^0$, 那么理想不可压 MHD 系统存在唯一的光滑解 (u^0, p^0, b^0) 满足 $u^0(x, y, z, t) = \pm b^0(x, y, z, t)$ ($= u_0^0(x, y, z) = \pm b_0^0(x, y, z)$), $p^0(x, y, z, t) = 0$. 另外, 对于不属于 H^s 的三维或二维理想不可压 MHD 系统的初边值问题的局部光滑解也是存在的, 如剪流解.

类似地, 对于黏性不可压 MHD 系统 (1.11)–(1.15), 我们也能得到类似的充分正则解的存在性结果.

命题 2.2 假设 $\varepsilon_1 > 0$ 固定, 令 $(u_0^{\varepsilon_1,0}, b_0^{\varepsilon_1,0})$ 满足 $u_0^{\varepsilon_1,0}, b_0^{\varepsilon_1,0} \in H^s(\Omega)$, $s > \frac{3}{2} + 2$, $\operatorname{div} u_0^{\varepsilon_1,0} = \operatorname{div} b_0^{\varepsilon_1,0} = 0$, 则存在一个时间 $0 < T_* \leq \infty$ 、解的最大存在时间和不可压 MHD 系统 (1.11)–(1.15) 在 $[0, T_*)$ 上的唯一光滑解 $(u^{\varepsilon_1,0}, p^{\varepsilon_1,0}, b^{\varepsilon_1,0})$, 且满足: 对于 $T < T_*$, 有

$$\sup_{0 \leq t \leq T} (\| (u^{\varepsilon_1,0}, b^{\varepsilon_1,0}) \|_{H^s(\Omega)} + \| (\partial_t u^{\varepsilon_1,0}, \partial_t b^{\varepsilon_1,0}) \|_{H^{s-2}(\Omega)}) + \varepsilon_1 \int_0^T \|\nabla u^{\varepsilon_1,0}(x, y, z, t)\|_{H^s(\Omega)}^2 dt \leq C(T)$$

对于某个独立于 ε_2 的常数 $C(T)$ 成立. 更进一步, 如果 $b_0^{\varepsilon_1,0}|_{\partial\Omega} = 0$, 那么 $b^{\varepsilon_1,0}(x, y, z, t)|_{\partial\Omega} = 0$. 另外, 对于不属于 H^s 的三维或二维黏性不可压 MHD 系统的初边值问题的局部光滑解也是存在的.

现在陈述本文的主要结果如下:

对于不可压的耗散 MHD 系统 (1.1)–(1.5), 我们有下面的对一类特殊初值的 Prandtl 型边界层的稳定性.

定理 2.1 (Prandtl 边界层的稳定性) 令 (u^0, p^0, b^0) 是不可压的理想 MHD 系统 (1.6)–(1.10) 的一个光滑解, 假设 (u_0^0, b_0^0) 在 $L^2(\Omega)$ 中强收敛于 (u_0^0, b_0^0) , 其中 $u_0^0, b_0^0 \in H^s(\Omega)$, $s > \frac{3}{2} + 1$ 满足 $\operatorname{div} u_0^0 = \operatorname{div} b_0^0 = 0$ 和 $u_0^0 \cdot n|_{\partial\Omega} = b_0^0 \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$, 也假设 $u_0^0(x, y, z) = b_0^0(x, y, z)$ 或 $u_0^0(x, y, z) = -b_0^0(x, y, z)$. 更进一步, 假设 $\varepsilon, \varepsilon_1$ 和 ε_2 满足下面的收敛性条件: 存在某个独立于 $\varepsilon, \varepsilon_1$ 和 ε_2 的正常数 C 使得, 当 $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow 0, \quad \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \rightarrow 0, \quad \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \leq C \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}, \quad (2.1)$$

那么系统 (1.1)–(1.5) 存在一个整体的 Leray-Hopf 弱解 $(u^\varepsilon, p^\varepsilon, b^\varepsilon)$ 使得对于 $T \in (0, \infty)$, 当黏性系数 $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ 以及扩散系数 $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ 时, 有

$$(u^\varepsilon - u^0, b^\varepsilon - b^0) \rightarrow (0, 0), \quad \text{在空间范数 } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ 意义下成立.} \quad (2.2)$$

如果

$$\|(u_0^\varepsilon - u_0^0, b_0^\varepsilon - b_0^0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\varepsilon^\kappa, \quad \kappa > 1, \quad (2.3)$$

那么存在独立于 ε 的常数 $C(T)$ 使得, 对于 $0 \leq t \leq T < \infty$, 有

$$\|(u^\varepsilon - u^0, b^\varepsilon - b^0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(T) \left(\varepsilon^{\kappa-1} + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \right). \quad (2.4)$$

更进一步, 对于二维耗散不可压 MHD 系统, 我们有下面更强的 L^∞ 收敛性: 假设 $\omega = \mathbb{T}^1$, $u_1^0(x, z=0) = b_1^0(x, z=0) = \text{const}$ (如二维剪流) 和 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ 或 ε , ε_1 和 ε_2 满足适当的关系 (后面给出陈述). 也假设对于适当的常数 $\kappa > 2$, 有

$$\|(u_0^\varepsilon - u_0^0 - u_B^\varepsilon(t=0), b_0^\varepsilon - b_0^0 - b_B^\varepsilon(t=0))\|_{H^s(\Omega)}^2 \leq C\varepsilon^\kappa, \quad s > 3, \quad (2.5)$$

那么存在独立于 ε 的常数 $C(T)$ 使得, 对于 $0 \leq t \leq T < \infty$, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 有

$$\|(u^\varepsilon - u^0 - u_B^\varepsilon, b^\varepsilon - b^0 - b_B^\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} \leq C(T)\sqrt{\varepsilon}, \quad \text{若 } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & \|(u^\varepsilon - u^0 - u_B^\varepsilon, b^\varepsilon - b^0 - b_B^\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} \\ & \leq C(T) \left(\left(\frac{\beta_1(\varepsilon)}{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \right)^{\frac{1}{4}} (\beta_2(\varepsilon))^{\frac{1}{4}} + (\beta_0(\varepsilon))^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\beta_4(\varepsilon)}{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中 $u_B^\varepsilon(t=0)$ 、 $b_B^\varepsilon(t=0)$ 、 $\beta_0(\varepsilon)$ 、 $\beta_1(\varepsilon)$ 、 $\beta_2(\varepsilon)$ 和 $\beta_4(\varepsilon)$ 的具体形式将在后面给出.

注 2.1 如果 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ 或 $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \varepsilon + \varepsilon^{\alpha+1}$, 其中 $\alpha > \frac{1}{2}$, 那么假设 (2.1) 成立. 定理中的速度场和磁场允许有边界层, 而且它们是通常的 Prandtl 型边界层, 这将在下一节具体给出. 这里成功建立 Prandtl 型边界层稳定性强烈地依赖于理想 MHD 系统解 (u^0, p^0, b^0) 的特殊结构, 即 $u^0 = \pm b^0$. 在这种情形, 速度场的边界层与磁场的边界层之间存在一种相互抵消现象, Prandtl 边界层函数方程变为线性方程. 另外, 定理 2.1 的证明相对于 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ 的特殊情形要复杂很多, 需要一些新的技巧. 当然, 如果在定理 2.1 中有 $u_0^0|_{\partial\Omega} = \pm b_0^0|_{\partial\Omega} = 0$, 称之为合适初值情形, 那么没有强边界层.

注 2.2 使用定理 2.1 易知, 对于不可压理想 MHD 系统的剪流

$$(u^0, p^0, b^0)(z, t) = (u_1^0(z), u_2^0(z), 0, 0, b_1^0(z), b_2^0(z), 0),$$

如果 $u^0 = \pm b^0$, 那么耗散不可压 MHD 系统的 Prandtl 边界层是稳定的.

对于不可压 MHD 系统 (1.1)–(1.5) 的一般初值情形, 当黏性系数 $\varepsilon_1 > 0$ 固定时, 我们有下面的零磁扩散消失极限和边界层稳定性结果.

定理 2.2 (零磁扩散消失极限) 令 $\varepsilon_1 > 0$ 固定, $\varepsilon = \varepsilon_2 \rightarrow 0$. 假设 $(u_0^\varepsilon, b_0^\varepsilon)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中强收敛于 $(u_0^{\varepsilon_1, 0}, b_0^{\varepsilon_1, 0})$, 其中 $(u_0^{\varepsilon_1, 0}, b_0^{\varepsilon_1, 0}) \in H^s(\Omega)$, $s > \frac{3}{2} + 2$, 也假设 $(u^{\varepsilon_1, 0}, p^{\varepsilon_1, 0}, b^{\varepsilon_1, 0})$ 是系统 (1.11)–(1.15) 定义在 $[0, T^*)$ ($0 < T^* \leq \infty$) 上由命题 2.2 给出的解, 那么系统 (1.1)–(1.5) 存在整体的 Leray-Hopf 弱解 $(u^\varepsilon, p^\varepsilon, b^\varepsilon)$ 满足, 当 $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ 时, 有

$$((u^\varepsilon, b^\varepsilon) - (u^{\varepsilon_1, 0}, b^{\varepsilon_1, 0})) \rightarrow (0, 0), \quad \text{在空间范数 } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ 强收敛意义下} \quad (2.8)$$

对 $T: 0 < T < T^*$ 成立.

而且, 如果

$$\|(u_0^\varepsilon - u_0^{\varepsilon_1,0}, b_0^\varepsilon - b_0^{\varepsilon_1,0})\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\sqrt{\varepsilon_2})^{1-\tau} \quad (2.9)$$

对某个给定 $0 \leq \tau < 1$ 成立, 那么存在独立于 ε_2 的常数 $C(T)$, 有

$$\|(u^\varepsilon, b^\varepsilon) - (u^{\varepsilon_1,0}, b^{\varepsilon_1,0})\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(T)(\sqrt{\varepsilon_2})^{1-\tau}. \quad (2.10)$$

注 2.3 这里零磁扩散消失极限问题也含有边界层, 这被隐藏在定理 2.2 的陈述中. 事实上, 如果 $b_0^{\varepsilon_1,0}|_{\partial\Omega} \neq 0$ 成立, 那么由解 b^ε 和 $b^{\varepsilon_1,0}$ 在边界 $\partial\Omega$ 上的条件的差异可知, 磁场存在一个强边界层.

注 2.4 若在系统 (1.1)–(1.5) 中用 $\varepsilon_1 \partial_z^2 u^\varepsilon$ 代替黏性项 $\varepsilon_1 \Delta u^\varepsilon$, 当 $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ 时, 定理 2.2 中类似的零磁扩散消失极限结果也成立. 注意, 这里边界法向的非蜕化黏性起了关键的作用. 事实上, 对于下面的 MHD 系统:

$$\begin{aligned} \partial_t u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon &= b^\varepsilon \cdot \nabla b^\varepsilon, \quad (x, y, z, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \partial_t b^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla b^\varepsilon - \varepsilon_2 \Delta b^\varepsilon &= b^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon, \quad (x, y, z, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} u^\varepsilon &= 0, \quad \operatorname{div} b^\varepsilon = 0, \quad (x, y, z, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u_3^\varepsilon &= 0, \quad b^\varepsilon = 0, \quad (x, y, z, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u^\varepsilon(t=0) &= u_0^\varepsilon, \quad b^\varepsilon(t=0) = b_0^\varepsilon, \quad \operatorname{div} u_0^\varepsilon = \operatorname{div} b_0^\varepsilon = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \partial_t u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon - \varepsilon_1 \Delta_{x,y} u^\varepsilon &= b^\varepsilon \cdot \nabla b^\varepsilon, \quad (x, y, z, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \partial_t b^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla b^\varepsilon - \varepsilon_2 \Delta b^\varepsilon &= b^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon, \quad (x, y, z, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} u^\varepsilon &= 0, \quad \operatorname{div} b^\varepsilon = 0, \quad (x, y, z, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u_3^\varepsilon &= 0, \quad b^\varepsilon = 0, \quad (x, y, z, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u^\varepsilon(t=0) &= u_0^\varepsilon, \quad b^\varepsilon(t=0) = b_0^\varepsilon, \quad \operatorname{div} u_0^\varepsilon = \operatorname{div} b_0^\varepsilon = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega \end{aligned}$$

在 $b_0^\varepsilon|_{\partial\Omega} \neq 0$ 或 $b_0^{\varepsilon_1,0}|_{\partial\Omega} \neq 0$ 时的零磁扩散消失极限和边界层问题还不能使用本文的方法来解决, 被留下来是未解决的问题, 其中 $\Delta_{x,y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$.

注 2.5 处理零黏性和磁扩散极限的主要困难之一是处理误差方程中与边界层函数相关的项. 当然, 如果没有强边界层出现, 收敛性证明是基本的. 例如, 容易证明存在 $T > 0$ (不依赖于 ε), 使得当 $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ 和 $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ 时, 系统

$$\partial_t u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon - \varepsilon_1 \Delta u^\varepsilon = b^\varepsilon \cdot \nabla b^\varepsilon, \quad \text{在 } \Omega \times (0, T) \text{ 内}, \quad (2.11)$$

$$\partial_t b^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla b^\varepsilon - \varepsilon_2 \Delta b^\varepsilon = b^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon, \quad \text{在 } \Omega \times (0, T) \text{ 内}, \quad (2.12)$$

$$\operatorname{div} u^\varepsilon = 0, \quad \operatorname{div} b^\varepsilon = 0, \quad \text{在 } \Omega \times (0, T) \text{ 内}, \quad (2.13)$$

$$u^\varepsilon = u^0, \quad b^\varepsilon = b^0, \quad \text{在 } \partial\Omega \times (0, T) \text{ 内}, \quad (2.14)$$

$$u^\varepsilon(t=0) = u_0^\varepsilon, \quad b^\varepsilon(t=0) = b_0^\varepsilon, \quad \operatorname{div} u_0^\varepsilon = \operatorname{div} b_0^\varepsilon = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 上} \quad (2.15)$$

的解 $(u^\varepsilon, p^\varepsilon, b^\varepsilon)$ 在某种范数 (如 $L^2(\Omega)$ 范数) 意义下强收敛到理想不可压 MHD 系统 (1.6)–(1.10) 定义在 $[0, T]$ 的解 (u^0, p^0, b^0) . 这里系统 (2.11)–(2.15) 中边界条件 (2.14) 中给定的函数 (u^0, b^0) 由理想不可压 MHD 系统 (1.6)–(1.10) 的解给定.

3 定理 2.1 和 2.2 的证明

本节将证明 $\Omega = \omega \times [0, h]$, $0 < h < \infty$ 和 $\omega = \mathbb{T}^2$ 情形时的定理 2.1 和 2.2. 其他情形是类似的. 我们的分析基于多尺度渐近分析方法和经典的能量方法. 我们将证明分为两种情形: 合适初值情形, 即 $b^0|_{\partial\Omega} = b_0^0|_{\partial\Omega} = 0$ 或 $b_0^{\varepsilon_1, 0}|_{z=0} = 0$, 此时没有强边界层; 一般初值情形, 即 $b_0^0|_{\partial\Omega} = u_0^0|_{\partial\Omega} \neq 0$ 或 $b_0^{\varepsilon_1, 0}|_{z=0} \neq 0$, 此时当我们使用能量方法来估计误差函数 $(u^\varepsilon - u^0, b^\varepsilon - b^0)$ 或 $(u^\varepsilon - u^{\varepsilon_1, 0}, b^\varepsilon - b^{\varepsilon_1, 0})$ 时, 由于 $u^\varepsilon - u^0$ 、 $b^\varepsilon - b^0$ 和 $b^\varepsilon - b^{\varepsilon_1, 0}$ 在边界上并不消失, 因为边界层的奇异性结构, 所以, 分部积分将出现一些难以控制的项. 在一般初值情形, 我们将构造边界层校正子以便我们恢复到 Dirichlet 零边界条件. 当 $0 < h < \infty$ 时, 我们将构造左右边界层; 当 $h = \infty$ 时, 我们将只构造左边界层而取右边界层函数为零. 注意在定理 2.2 中, 速度场没有强边界层.

3.1 边界层的构造

我们只给出 $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ 和 $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ 情形时边界层函数 $(u_B^\varepsilon, b_B^\varepsilon)$ 的构造. 关于 $\varepsilon_1 > 0$ 为固定常数情形, 边界层函数是类似的, 只需将边界层函数 b_B^ε 中的 b^0 换为 $b^{\varepsilon_1, 0}$ 和 $\varepsilon = \varepsilon_2$, 且取 $\nu_2^* = (\theta\varepsilon_2)^{1+\tau}$, 这里 $0 \leq \tau < 1$ 和 $\theta > 0$ 充分小.

由于速度场 u^ε 和磁场 b^ε 在 $z = 0, h$ 分别满足零 Dirichlet 边界条件, 但 $u^0|_{z=0, h} \neq 0$, $b^0|_{z=0, h} \neq 0$, 我们需要分别构造边界层函数来矫正 u^0 和 b^0 使得其叠加满足零边界条件.

现在引入速度场 u^0 的边界层函数如下:

$$u_B^\varepsilon = u_{B+}^\varepsilon + u_{B-}^\varepsilon, \quad (3.1)$$

$$u_{B+}^\varepsilon = \begin{pmatrix} U_{B+}^\varepsilon \\ \underline{u}_3^\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{u}_1^\varepsilon \\ \underline{u}_2^\varepsilon \\ \underline{u}_3^\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1^0(x, y, 0, t)e^{-\frac{z}{\sqrt{\nu_1^*}}}(\rho_1(z) - \rho_1'(z)\sqrt{\nu_1^*}) - u_1^0(x, y, 0, t)\rho_1'(z)\sqrt{\nu_1^*} \\ -u_2^0(x, y, 0, t)e^{-\frac{z}{\sqrt{\nu_1^*}}}(\rho_1(z) - \rho_1'(z)\sqrt{\nu_1^*}) - u_2^0(x, y, 0, t)\rho_1'(z)\sqrt{\nu_1^*} \\ \sqrt{\nu_1^*}\partial_z u_3^0(x, y, 0, t)\rho_1(z)(e^{-\frac{z}{\sqrt{\nu_1^*}}} - 1) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

和

$$u_{B-}^\varepsilon = \begin{pmatrix} U_{B-}^\varepsilon \\ \bar{u}_3^\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1^\varepsilon \\ \bar{u}_2^\varepsilon \\ \bar{u}_3^\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1^0(x, y, h, t)e^{-\frac{h-z}{\sqrt{\nu_1^*}}}(\rho_2(z) + \rho_2'(z)\sqrt{\nu_1^*}) + u_1^0(x, y, h, t)\rho_2'(z)\sqrt{\nu_1^*} \\ -u_2^0(x, y, h, t)e^{-\frac{h-z}{\sqrt{\nu_1^*}}}(\rho_2(z) + \rho_2'(z)\sqrt{\nu_1^*}) + u_2^0(x, y, h, t)\rho_2'(z)\sqrt{\nu_1^*} \\ -\sqrt{\nu_1^*}\partial_z u_3^0(x, y, h, t)\rho_2(z)(e^{-\frac{h-z}{\sqrt{\nu_1^*}}} - 1) \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

其中 $\rho_1(z)$ 和 $\rho_2(z)$ 满足

$$\rho_1(0) = 1, \quad \rho_1'(0) = \rho_1''(0) = 0; \quad \rho_1(z) \equiv 0, \quad \text{当 } z \geq \frac{h}{4}; \quad 0 \leq \rho_1(z) \leq 1, \quad \text{当 } z \in [0, h] \quad (3.4)$$

和

$$\rho_2(h) = 1, \quad \rho_2'(h) = \rho_2''(h) = 0; \quad \rho_2(z) \equiv 0, \quad \text{当 } z \leq \frac{3}{4}h; \quad 0 \leq \rho_2(z) \leq 1, \quad \text{当 } z \in [0, h], \quad (3.5)$$

这里 u_{B+}^ε 和 u_{B-}^ε 分别是 $z = 0$ 处的左边界层函数和 $z = h$ 时的右边界层函数, ν_1^* 依赖于 ε 是速度边界层的厚度. 当 $h = \infty$ 时, 我们取 $u_{B-}^\varepsilon = 0$. 类似地, 磁场 b^0 的边界层函数能构造如下:

$$b_B^\varepsilon = b_{B+}^\varepsilon + b_{B-}^\varepsilon, \quad (3.6)$$

$$b_{B+}^\varepsilon = \begin{pmatrix} B_{B+}^\varepsilon \\ \underline{b}_3^\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1^\varepsilon \\ \underline{b}_2^\varepsilon \\ \underline{b}_3^\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1^0(x, y, 0, t) e^{-\frac{z}{\sqrt{\nu_2^*}}} (\rho_1(z) - \rho_1'(z) \sqrt{\nu_2^*}) - b_1^0(x, y, 0, t) \rho_1'(z) \sqrt{\nu_2^*} \\ -b_2^0(x, y, 0, t) e^{-\frac{z}{\sqrt{\nu_2^*}}} (\rho_1(z) - \rho_1'(z) \sqrt{\nu_2^*}) - b_2^0(x, y, 0, t) \rho_1'(z) \sqrt{\nu_2^*} \\ \sqrt{\nu_2^*} \partial_z b_3^0(x, y, 0, t) \rho_1(z) (e^{-\frac{z}{\sqrt{\nu_2^*}}} - 1) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

和

$$b_{B-}^\varepsilon = \begin{pmatrix} B_{B-}^\varepsilon \\ \bar{b}_3^\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1^\varepsilon \\ \bar{b}_2^\varepsilon \\ \bar{b}_3^\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1^0(x, y, h, t) e^{-\frac{h-z}{\sqrt{\nu_2^*}}} (\rho_2(z) + \rho_2'(z) \sqrt{\nu_2^*}) + b_1^0(x, y, h, t) \rho_2'(z) \sqrt{\nu_2^*} \\ -b_2^0(x, y, h, t) e^{-\frac{h-z}{\sqrt{\nu_2^*}}} (\rho_2(z) + \rho_2'(z) \sqrt{\nu_2^*}) + b_2^0(x, y, h, t) \rho_2'(z) \sqrt{\nu_2^*} \\ -\sqrt{\nu_2^*} \partial_z b_3^0(x, y, h, t) \rho_2(z) (e^{-\frac{h-z}{\sqrt{\nu_2^*}}} - 1) \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

这里 b_{B+}^ε 和 b_{B-}^ε 分别是 $z = 0$ 处的左边界层函数和 $z = h$ 时的右边界层函数, ν_2^* 依赖于 ε 是磁场边界层的厚度. 当 $h = \infty$ 时, 我们取 $b_{B-}^\varepsilon = 0$. 对于合适准备的初值, 我们取 $b_{B+}^\varepsilon = b_{B-}^\varepsilon = 0$.

容易验证下面的性质.

引理 3.1 存在独立于 ε 、 ε_1 和 ε_2 , 只依赖于 $\|(u^0, b^0)\|_{H^s(\Omega)}$ 和 $s > \frac{3}{2} + 1$ 的正常数, 使得

$$\begin{aligned} \|(u_B^\varepsilon, b_B^\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C, \quad \|(\partial_z u_{B3}^\varepsilon, \partial_z b_{B3}^\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \\ \|(U_B^\varepsilon, \nabla_{x,y} U_B^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C\sqrt{\nu_1^*}, \quad \|(B_B^\varepsilon, \nabla_{x,y} B_B^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\nu_2^*}, \\ \|u_{B3}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\leq C\sqrt{\nu_1^*}, \quad \|b_{B3}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\nu_2^*}, \\ \|\partial_z U_B^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{C}{\sqrt{\nu_1^*}}, \quad \|\partial_z B_B^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\sqrt{\nu_2^*}}, \\ \|\partial_z u_{B3}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\leq C\sqrt{\nu_1^*}, \quad \|\partial_z b_{B3}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\nu_2^*}, \\ \|(z\partial_z U_{B+}^\varepsilon, (h-z)\partial_z U_{B-}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C\sqrt{\nu_1^*}, \quad \|(z\partial_z B_{B+}^\varepsilon, (h-z)\partial_z B_{B-}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\nu_2^*}, \\ \|(z^2\partial_z U_{B+}^\varepsilon, (h-z)^2\partial_z U_{B-}^\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C\sqrt{\nu_1^*}, \quad \|(z^2\partial_z B_{B+}^\varepsilon, z^2\partial_z B_{B-}^\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\sqrt{\nu_2^*}. \end{aligned}$$

ν_1^* 和 ν_2^* 的具体形式将在后面证明中给出. 这里和下面我们使用 $U, B, U_B, B_B, U_R, \dots$ 或 $u_{1,2}, b_{1,2}, \{u_B\}_{1,2}, \{b_B\}_{1,2}, \{u_R\}_{1,2}, \dots$ 表示 $u, b, u_B, b_B, u_R, \dots$ 的第一和第二个分量, 使用 $u_3, b_3, u_{B3}, b_{B3}, \dots$ 表示 $u, b, u_B, b_B, \dots$ 的第三个分量.

3.2 定理 2.1 的证明

定理 2.1 的证明 关于耗散 MHD 方程组的 Dirichlet 初边值问题 Leray-Hopf 弱解的存在性以及二维情形整体光滑解的存在性可以完全类似于文献 [2, 4, 6] 的方法通过 Galerkin 方法获得, 也同于 NS 方程相应结果的证明, 限于篇幅, 我们略去细节.

令 $(u^\varepsilon, b^\varepsilon)$ 是耗散 MHD 系统 (1.1)–(1.5) 的 Leray-Hopf 解, 并将解分解为

$$(u^\varepsilon, b^\varepsilon) = (u^0 + u_B^\varepsilon + u_R^\varepsilon, b^0 + b_B^\varepsilon + b_R^\varepsilon).$$

在第 3.1 小节中取 $\nu_1^* = \nu_2^* = \varepsilon$, 并利用系统 (1.6)–(1.10) 可得

$$\partial_t u_B^\varepsilon + \partial_t u_R^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u_R^\varepsilon + u^0 \cdot \nabla u_B^\varepsilon + u_B^\varepsilon \cdot \nabla u_B^\varepsilon + u_R^\varepsilon \cdot \nabla u_B^\varepsilon + u_B^\varepsilon \cdot \nabla u^0$$

$$\begin{aligned}
& + u_R^\varepsilon \cdot \nabla u^0 - \varepsilon_1 \partial_z^2 u_R^\varepsilon - \varepsilon_1 \partial_z^2 u^0 - \varepsilon_1 \partial_z^2 u_B^\varepsilon - \varepsilon_1 \Delta_{x,y} u_R^\varepsilon - \varepsilon_1 \Delta_{x,y} u^0 - \varepsilon_1 \Delta_{x,y} u_B^\varepsilon \\
& = -\nabla(p^\varepsilon - p^0) + b^\varepsilon \cdot \nabla b_R^\varepsilon + b^0 \cdot \nabla b_B^\varepsilon + b_B^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon + b_R^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon \\
& \quad + b_B^\varepsilon \cdot \nabla b^0 + b_R^\varepsilon \cdot \nabla b^0, \quad (x, y, z, t) \in \Omega \times (0, T),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_t b_B^\varepsilon + \partial_t b_R^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla b_R^\varepsilon + u^0 \cdot \nabla b_B^\varepsilon + u_B^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon + u_R^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon + u_B^\varepsilon \cdot \nabla b^0 \\
& \quad + u_R^\varepsilon \cdot \nabla b^0 - \varepsilon_2 \partial_z^2 b_R^\varepsilon - \varepsilon_2 \partial_z^2 b^0 - \varepsilon_2 \partial_z^2 b_B^\varepsilon - \varepsilon_2 \Delta_{x,y} b_R^\varepsilon - \varepsilon_2 \Delta_{x,y} b^0 - \varepsilon_2 \Delta_{x,y} b_B^\varepsilon \\
& = b^\varepsilon \cdot \nabla u_R^\varepsilon + b^0 \cdot \nabla u_B^\varepsilon + b_B^\varepsilon \cdot \nabla u_B^\varepsilon + b_R^\varepsilon \cdot \nabla u_B^\varepsilon + b_B^\varepsilon \cdot \nabla u^0 \\
& \quad + b_R^\varepsilon \cdot \nabla u^0, \quad (x, y, z, t) \in \Omega \times (0, T),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\operatorname{div} u^\varepsilon = \operatorname{div} b^\varepsilon = \operatorname{div} u_R^\varepsilon = \operatorname{div} b_R^\varepsilon = 0, \quad (x, y, z, t) \in \Omega \times (0, T), \tag{3.11}$$

$$u_R^\varepsilon = b_R^\varepsilon = 0, \quad (x, y) \in \omega, \quad z = 0, h, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
& u_R^\varepsilon(t=0) = u^\varepsilon(0) - u^0(0) - u_B^\varepsilon(t=0), \\
& b_R^\varepsilon(t=0) = b^\varepsilon(0) - b^0(0) - b_B^\varepsilon(t=0), \quad (x, y, z) \in \Omega.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

由于 $(u^0, p^0, b^0)(x, y, z, t) = (u_0^0, 0, b_0^0)$ 是不可压理想 MHD 系统的特殊解, 满足 $u_0^0 = \pm b_0^0$, 于是可得 $u_B^\varepsilon = \pm b_B^\varepsilon$, 这导致了 Prandtl 方程的速度边界层与磁场边界层之间存在抵消现象. 因此, 我们从 (3.9) 和 (3.10) 可得

$$\begin{aligned}
& \partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) + u^\varepsilon \cdot \nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \Delta(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \Delta(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon) \\
& = -\nabla(p^\varepsilon - p^0) - b^\varepsilon \cdot \nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \Delta(u_B^\varepsilon + b_B^\varepsilon) + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \Delta(u^0 + b^0)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

或

$$\begin{aligned}
& \partial_t(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon) + u^\varepsilon \cdot \nabla(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon) - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \Delta(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon) - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \Delta(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \\
& = -\nabla(p^\varepsilon - p^0) + b^\varepsilon \cdot \nabla(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon) + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \Delta(u_B^\varepsilon - b_B^\varepsilon) + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \Delta(u^0 - b^0),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

这里使用了解析关系

$$\varepsilon_1 \Delta u_R^\varepsilon - \varepsilon_2 \Delta b_R^\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \Delta(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \Delta(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)$$

或

$$\varepsilon_1 \Delta u_R^\varepsilon + \varepsilon_2 \Delta b_R^\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \Delta(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon) + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \Delta(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon).$$

注意系统 (3.14) 中 $-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \Delta(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)$ 的出现是由于 $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ 而产生的, 是不可能采用文献 [27] 中的技巧来处理的, 我们需要用新的方法. 使用系统 (3.11) 和 (3.12), 取方程 (3.14) (或 (3.15)) 与 $u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon$ (或 $u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon$) 的 L^2 内积, 在情形 $u^0 = b^0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int |u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon|^2 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \int |\nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 \\
& = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \int \nabla((u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon) + (u_B^\varepsilon + b_B^\varepsilon) + (u^0 + b^0)) \cdot \nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon);
\end{aligned} \tag{3.16}$$

在情形 $u^0 = -b^0$ 时, 有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int |u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon|^2 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \int |\nabla(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)|^2$$

$$= -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \int \nabla((u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) + (u_B^\varepsilon - b_B^\varepsilon) + (u^0 - b^0)) \cdot \nabla(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon). \quad (3.17)$$

这里和下面积分号 $\int$ 表示关于空间变量积分; 而积分号 $\int_0^t$ 表示关于时间变量 t 积分. 使用方程 (3.13)、边界层函数的性质、Young 不等式以及初值的假设 (2.3), 我们有, 对于 $0 \leq t \leq T < \infty$,

$$\begin{aligned} & \int |(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)(t)|^2 + (1 - \delta)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \int_0^t \int |\nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 \\ & \leq \int |(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)(t=0)|^2 + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \left[\int_0^t \int (|\nabla u_R^\varepsilon|^2 + |\nabla b_R^\varepsilon|^2) + Ct + \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}t \right] \\ & \leq C\varepsilon^\kappa + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \int_0^t \int (|\nabla u_R^\varepsilon|^2 + |\nabla b_R^\varepsilon|^2) + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\delta\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

或

$$\begin{aligned} & \int |(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)(t)|^2 + (1 - \delta)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \int_0^t \int |\nabla(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)|^2 \\ & \leq C\varepsilon^\kappa + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \int_0^t \int (|\nabla u_R^\varepsilon|^2 + |\nabla b_R^\varepsilon|^2) + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\delta\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

对独立于 ε 、 ε_1 和 ε_2 的某个常数 $C > 0$ 和 $\delta > 0$ 成立, 这里 $\kappa > 1$. 现在取方程 (3.14) 与 u_R^ε 的 L^2 内积以及方程 (3.15) 与 b_R^ε 的 L^2 内积可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int (|u_R^\varepsilon|^2 + |b_R^\varepsilon|^2) + \varepsilon_1 \int |\nabla u_R^\varepsilon|^2 + \varepsilon_2 \int |\nabla b_R^\varepsilon|^2 = \sum_{i=1}^{13} J_i, \quad (3.20)$$

其中 J_i ($i = 1, \dots, 13$) 分别为

$$\begin{aligned} J_1 &= - \int \nabla(p^\varepsilon - p^0)u_R^\varepsilon, \\ J_2 &= - \int \partial_t u_B^\varepsilon u_R^\varepsilon - \int \partial_t b_B^\varepsilon b_R^\varepsilon, \\ J_3 &= - \int u^\varepsilon \cdot \nabla u_R^\varepsilon u_R^\varepsilon - \int u^\varepsilon \cdot \nabla b_R^\varepsilon b_R^\varepsilon, \\ J_4 &= - \int u^0 \cdot \nabla u_B^\varepsilon u_R^\varepsilon - \int u^0 \cdot \nabla b_B^\varepsilon b_R^\varepsilon + \int b^0 \cdot \nabla b_B^\varepsilon u_R^\varepsilon + \int b^0 \cdot \nabla u_B^\varepsilon b_R^\varepsilon, \\ J_5 &= - \int u_B^\varepsilon \cdot \nabla u_B^\varepsilon u_R^\varepsilon - \int u_B^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon b_R^\varepsilon + \int b_B^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon u_R^\varepsilon + \int b_B^\varepsilon \cdot \nabla u_B^\varepsilon b_R^\varepsilon, \\ J_6 &= - \int u_R^\varepsilon \cdot \nabla u_B^\varepsilon u_R^\varepsilon - \int u_R^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon b_R^\varepsilon + \int b_R^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon u_R^\varepsilon + \int b_R^\varepsilon \cdot \nabla u_B^\varepsilon b_R^\varepsilon, \\ J_7 &= - \int u_B^\varepsilon \cdot \nabla u^0 u_R^\varepsilon - \int u_B^\varepsilon \cdot \nabla b^0 b_R^\varepsilon + \int b_B^\varepsilon \cdot \nabla b^0 u_R^\varepsilon + \int b_B^\varepsilon \cdot \nabla u^0 b_R^\varepsilon, \\ J_8 &= - \int u_R^\varepsilon \cdot \nabla u^0 u_R^\varepsilon - \int u_R^\varepsilon \cdot \nabla b^0 b_R^\varepsilon + \int b_R^\varepsilon \cdot \nabla b^0 u_R^\varepsilon + \int b_R^\varepsilon \cdot \nabla u^0 b_R^\varepsilon, \\ J_9 &= \int b^\varepsilon \cdot \nabla b_R^\varepsilon u_R^\varepsilon + \int b^\varepsilon \cdot \nabla u_R^\varepsilon b_R^\varepsilon, \\ J_{10} &= \varepsilon_1 \int \partial_z^2 u_B^\varepsilon u_R^\varepsilon + \varepsilon_2 \int \partial_z^2 b_B^\varepsilon b_R^\varepsilon, \\ J_{11} &= \varepsilon_1 \int \partial_z^2 u^0 u_R^\varepsilon + \varepsilon_2 \int \partial_z^2 b^0 b_R^\varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{12} &= \varepsilon_1 \int \Delta_{x,y} u_B^\varepsilon u_R^\varepsilon + \varepsilon_2 \int \Delta_{x,y} b_B^\varepsilon b_R^\varepsilon, \\ J_{13} &= \varepsilon_1 \int \Delta_{x,y} u^0 u_R^\varepsilon + \varepsilon_2 \int \Delta_{x,y} b^0 b_R^\varepsilon. \end{aligned}$$

下面分别给出 J_i ($i = 1, \dots, 13$) 的估计. 在下面 C 表示不依赖于 ε 的常数, 每行的 C 取值可以不同. 我们也只考虑定理 2.1 中 $u^0 = b^0$ 的情形, 而情形 $u^0 = -b^0$ 的证明是类似的 (只需要使用方程 (3.19)).

(1) 首先, 使用事实 $u^0 = b^0$ 以及它们不依赖于时间, 因此 $u_B^\varepsilon = b_B^\varepsilon$. 这样, 我们有

$$J_2 = J_4 = J_5 = J_7 = 0.$$

(2) 其次, 我们计算

$$J_1 = - \int \nabla(p^\varepsilon - p^0) u_R^\varepsilon = \int (p^\varepsilon - p^0) \operatorname{div} u_R^\varepsilon = 0, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} J_3 &= - \int u^\varepsilon \cdot \nabla u_R^\varepsilon u_R^\varepsilon - \int u^\varepsilon \cdot \nabla b_R^\varepsilon b_R^\varepsilon \\ &= \frac{1}{2} \int u^\varepsilon \cdot \nabla (|u_R^\varepsilon|^2) + \frac{1}{2} \int u^\varepsilon \cdot \nabla (|b_R^\varepsilon|^2) = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

为了估计 J_6 , 注意到 $u_B^\varepsilon = b_B^\varepsilon$, 使用估计 (3.18), 可得到

$$\begin{aligned} J_6 &= - \int (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \cdot \nabla u_B^\varepsilon (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon) \\ &= - \int (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)_{1,2} \cdot \nabla_{x,y} (u_B^\varepsilon)_{1,2} (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)_{1,2} - \int (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)_{1,2} \cdot \nabla_{x,y} (u_B^\varepsilon)_3 (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)_3 \\ &\quad - \int (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)_3 \cdot \nabla_z (u_B^\varepsilon)_{1,2} (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)_{1,2} - \int (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)_3 \cdot \nabla_z (u_B^\varepsilon)_3 (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)_3 \\ &\leq C \int (|u_R^\varepsilon|^2 + |b_R^\varepsilon|^2) + C \int \frac{|(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)_3|^2}{\varepsilon} \\ &\leq C \int (|u_R^\varepsilon|^2 + |b_R^\varepsilon|^2) + C \varepsilon^{\kappa-1} + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\delta\varepsilon(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \int_0^t \int (|\nabla u_R^\varepsilon|^2 + |\nabla b_R^\varepsilon|^2) \\ &\quad + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\delta\varepsilon\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$J_8 \leq 2 \max\{\|\nabla u^0\|_{L^\infty}, \|\nabla b^0\|_{L^\infty}\} \int (|u_R^\varepsilon|^2 + |b_R^\varepsilon|^2), \quad (3.24)$$

$$J_9 = \int b^\varepsilon \cdot \nabla (u_R^\varepsilon \cdot b_R^\varepsilon) = \int \operatorname{div} b^\varepsilon (u_R^\varepsilon \cdot b_R^\varepsilon) = 0, \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} J_{10} &= -\varepsilon_1 \int \partial_z u_B^\varepsilon \partial_z u_R^\varepsilon - \varepsilon_2 \int \partial_z b_B^\varepsilon \partial_z b_R^\varepsilon \\ &\leq \delta\varepsilon_1 \int |\nabla u_R^\varepsilon|^2 + \delta\varepsilon_2 \int |\nabla b_R^\varepsilon|^2 + \frac{C(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\sqrt{\varepsilon}}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$J_{11} + J_{12} + J_{13} \leq C \int (|u_R^\varepsilon|^2 + |b_R^\varepsilon|^2) + C(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2). \quad (3.27)$$

结合 (3.20) 和 (3.21)–(3.27), 使用定理 2.1 中的假设 (2.1), 可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int (|u_R^\varepsilon|^2 + |b_R^\varepsilon|^2) + (1 - \delta)\varepsilon_1 \int |\nabla u_R^\varepsilon|^2 + (1 - \delta)\varepsilon_2 \int |\nabla b_R^\varepsilon|^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int (|u_R^\varepsilon|^2 + |b_R^\varepsilon|^2) + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\delta\varepsilon(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \int_0^t \int (|\nabla u_R^\varepsilon|^2 + |\nabla b_R^\varepsilon|^2) \\
&\quad + C \left(\varepsilon^{\kappa-1} + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon}} \right) + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\delta\varepsilon\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \\
&\leq C \left[\int (|u_R^\varepsilon|^2 + |b_R^\varepsilon|^2) + \varepsilon_1 \int_0^t \int |\nabla u_R^\varepsilon|^2 + \varepsilon_2 \int_0^t \int |\nabla b_R^\varepsilon|^2 \right] \\
&\quad + C \left(\varepsilon^{\kappa-1} + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon}} \right) + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\delta\varepsilon\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \tag{3.28}
\end{aligned}$$

应用 Gronwall 不等式到 (3.28) 可得

$$\int (|u_R^\varepsilon|^2 + |b_R^\varepsilon|^2) \leq C \left(\varepsilon^{\kappa-1} + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \right). \tag{3.29}$$

这样使用估计 (3.18) 和 (3.29), 我们获得了定理 2.1 中希望证明的估计 (2.4).

对于 L^∞ 收敛性估计, 我们只考虑二维 MHD 方程情形. 对于三维问题, 需要涉及解的正则性问题, 这是公开的没有解决的问题. 为了完成证明, 我们需要做高阶能量估计. 当然, 高阶能量估计的想法与 L^2 估计的基本想法是一样的, 但写起来复杂. 下面只考虑情形 $u^0 = b^0$ 和 $0 < z < \infty$, 其他情形类似. 首先, 为了获得高阶导数估计, 我们需要使用 Prandtl 边界层方程的精确解代替前面 L^2 估计情形的近似边界层函数, 这样可以获得误差函数 L^2 估计的更好的衰减速率. 其次, 为了避免复杂和文章的长度, 在高阶能量估计中, 我们只给出一些关键项的计算, 即由于求高阶导数而出现的结构和处理技巧不同于 L^2 估计中处理过的项的这些项的估计, 而结构类似于前面步骤中已经估计过的项的哪些项我们将直接给出计算结果放入估计中去.

令 $u_B^\varepsilon(x, z, t) = (u_{1B}^\varepsilon, u_{3B}^\varepsilon)$ 和 $b_B^\varepsilon(x, z, t) = (b_{1B}^\varepsilon, b_{3B}^\varepsilon)$ 分别满足线性 Prandtl 方程

$$\begin{aligned}
&\partial_t u_{1B}^\varepsilon = \varepsilon \partial_z^2 u_{1B}^\varepsilon, \\
&\partial_1 u_{1B}^\varepsilon + \partial_3 u_{3B}^\varepsilon = 0, \\
&u_{1B}^\varepsilon(x, z = 0, t) = -u_1^0(x, z = 0), \quad u_{1B}^\varepsilon(x, z = \infty, t) = 0
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
&\partial_t b_{1B}^\varepsilon = \varepsilon \partial_z^2 b_{1B}^\varepsilon, \\
&\partial_1 b_{1B}^\varepsilon + \partial_3 b_{3B}^\varepsilon = 0, \\
&b_{1B}^\varepsilon(x, z = 0, t) = -b_1^0(x, z = 0), \quad b_{1B}^\varepsilon(x, z = \infty, t) = 0,
\end{aligned}$$

其解表示为

$$\begin{aligned}
u_{1B}^\varepsilon(x, z, t) &= -u_1^0(x, z = 0) \int_{\frac{z}{\sqrt{\varepsilon(t+s)}}}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2/4}}{\sqrt{\pi}} d\xi, \\
b_{1B}^\varepsilon(x, z, t) &= -b_1^0(x, z = 0) \int_{\frac{z}{\sqrt{\varepsilon(t+s)}}}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2/4}}{\sqrt{\pi}} d\xi,
\end{aligned}$$

其中 $s > 0$ 为给定的不依赖于 ε 的正数, 这可以避免处理边界层函数在 $t = 0$ 时的可积性奇性. 由于假设 $u_1^0(x, z = 0) = b_1^0(x, z = 0) = \text{const}$, 那么容易验证

$$\partial_t u_{3B}^\varepsilon - \varepsilon \partial_z^2 u_{3B}^\varepsilon = 0, \quad \partial_t b_{3B}^\varepsilon - \varepsilon \partial_z^2 b_{3B}^\varepsilon = 0,$$

且边界层函数 u_B^ε 和 b_B^ε 具有完全类似于引理 3.1 中边界层函数的性质. 而且当 $u^0 = b^0$ 时, 我们有 $u_B^\varepsilon = b_B^\varepsilon$.

现将二维不可压 MHD 方程 (1.1)–(1.5) 中的 $(u^\varepsilon, b^\varepsilon)$ 分解为 $(u^\varepsilon, b^\varepsilon) = (u^0 + u_B^\varepsilon + u_R^\varepsilon, b^0 + b_B^\varepsilon + b_R^\varepsilon)$, 则由 (1.6)–(1.10) 可得

$$\begin{aligned} & \partial_t u_R^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u_R^\varepsilon + u_R^\varepsilon \cdot \nabla u_B^\varepsilon + u_R^\varepsilon \cdot \nabla u^0 - \varepsilon_1 \Delta u_R^\varepsilon - \varepsilon_1 \Delta u^0 - (\varepsilon_1 - \varepsilon) \partial_z^2 u_B^\varepsilon \\ & = -\nabla(p^\varepsilon - p^0) + b^\varepsilon \cdot \nabla b_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon + b_R^\varepsilon \cdot \nabla b^0, \quad (x, z, t) \in \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t b_R^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla b_R^\varepsilon + u_R^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon + u_R^\varepsilon \cdot \nabla b^0 - \varepsilon_2 \Delta b_R^\varepsilon - \varepsilon_2 \Delta b^0 - (\varepsilon_2 - \varepsilon) \partial_z^2 b_B^\varepsilon \\ & = b^\varepsilon \cdot \nabla u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon \cdot \nabla u_B^\varepsilon + b_R^\varepsilon \cdot \nabla b^0, \quad (x, z, t) \in \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\operatorname{div} u^\varepsilon = \operatorname{div} b^\varepsilon = \operatorname{div} u_R^\varepsilon = \operatorname{div} b_R^\varepsilon = 0, \quad (x, z, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (3.32)$$

$$u_R^\varepsilon = b_R^\varepsilon = 0, \quad x \in \omega, \quad z = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} u_R^\varepsilon(t=0) &= u^\varepsilon(0) - u^0(0) - u_B^\varepsilon(t=0), \\ b_R^\varepsilon(t=0) &= b^\varepsilon(0) - b^0(0) - b_B^\varepsilon(t=0), \quad (x, z) \in \Omega. \end{aligned} \quad (3.34)$$

同于前面的 L^2 估计, 从 (3.30) 和 (3.31) 可得

$$\begin{aligned} & \partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) + u^\varepsilon \cdot \nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \Delta(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \Delta(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon) \\ & = -\nabla(p^\varepsilon - p^0) - b^\varepsilon \cdot \nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \Delta(u_B^\varepsilon + b_B^\varepsilon) + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \Delta(u^0 + b^0). \end{aligned} \quad (3.35)$$

使用方程 (3.32) 和 (3.33) 取方程 (3.35) 与 $u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon$ 的 L^2 内积, 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int |u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon|^2 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \int |\nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 \\ & = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \int \nabla((u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon) + (u_B^\varepsilon + b_B^\varepsilon) + (u^0 + b^0)) \cdot \nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.36)$$

使用 (3.34)、边界层函数的性质、Young 不等式和关于初值的假设 (2.5), 从 (3.35) 可得, 对于 $0 \leq t \leq T < \infty$, 有

$$\begin{aligned} & \int |(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)(t)|^2 + (1 - \delta)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \int_0^t \int |\nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 \\ & \leq \int |(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)(t=0)|^2 + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \left[\int_0^t \int (|\nabla u_R^\varepsilon|^2 + |\nabla b_R^\varepsilon|^2) + Ct + \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} t \right] \\ & \leq C\varepsilon^\kappa + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \int_0^t \int (|\nabla u_R^\varepsilon|^2 + |\nabla b_R^\varepsilon|^2) + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\delta\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \end{aligned} \quad (3.37)$$

对不依赖于 ε 的正常数 $C > 0$ 和 $\delta > 0$ 成立, 这里 $\kappa > 2$.

接着, 取方程 (3.30) 与 u_R^ε 的 L^2 内积, 取方程 (3.31) 与 b_R^ε 的 L^2 内积, 可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int (|u_R^\varepsilon|^2 + |b_R^\varepsilon|^2) + \varepsilon_1 \int |\nabla u_R^\varepsilon|^2 + \varepsilon_2 \int |\nabla b_R^\varepsilon|^2 = \sum_{i=1}^7 K_i, \quad (3.38)$$

其中 K_i ($i = 1, \dots, 7$) 分别取值如下:

$$K_1 = - \int \nabla(p^\varepsilon - p^0) u_R^\varepsilon,$$

$$\begin{aligned}
K_2 &= - \int u^\varepsilon \cdot \nabla u_R^\varepsilon u_R^\varepsilon - \int u^\varepsilon \cdot \nabla b_R^\varepsilon b_R^\varepsilon, \\
K_3 &= - \int u_R^\varepsilon \cdot \nabla u_B^\varepsilon u_R^\varepsilon - \int u_R^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon b_R^\varepsilon + \int b_R^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon u_R^\varepsilon + \int b_R^\varepsilon \cdot \nabla u_B^\varepsilon b_R^\varepsilon, \\
K_4 &= - \int u_R^\varepsilon \cdot \nabla u^0 u_R^\varepsilon - \int u_R^\varepsilon \cdot \nabla b^0 b_R^\varepsilon + \int b_R^\varepsilon \cdot \nabla b^0 u_R^\varepsilon + \int b_R^\varepsilon \cdot \nabla u^0 b_R^\varepsilon, \\
K_5 &= \int b^\varepsilon \cdot \nabla b_R^\varepsilon u_R^\varepsilon + \int b^\varepsilon \cdot \nabla u_R^\varepsilon b_R^\varepsilon, \\
K_6 &= \varepsilon_1 \int \partial_z^2 u^0 u_R^\varepsilon + \varepsilon_2 \int \partial_z^2 b^0 b_R^\varepsilon, \\
K_7 &= (\varepsilon_1 - \varepsilon) \int \partial_z^2 u_B^\varepsilon u_R^\varepsilon + (\varepsilon_2 - \varepsilon) \int \partial_z^2 b_B^\varepsilon b_R^\varepsilon.
\end{aligned}$$

我们分别估计 K_i ($i = 1, \dots, 7$).

(1) 首先, K_i ($i = 1, \dots, 6$) 能被像以前估计 J_1 、 J_3 、 J_6 、 J_8 和 J_9 的办法一样估计.

(2) 其次, 我们计算可得

$$\begin{aligned}
K_7 &= -(\varepsilon_1 - \varepsilon) \int \partial_z u_B^\varepsilon \partial_z u_R^\varepsilon - (\varepsilon_2 - \varepsilon) \int \partial_z b_B^\varepsilon \partial_z b_R^\varepsilon \\
&\leq \delta \varepsilon_1 \int |\nabla u_R^\varepsilon|^2 + \delta \varepsilon_2 \int |\nabla b_R^\varepsilon|^2 + C \left(\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon}} + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon)^2}{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon}} \right),
\end{aligned} \quad (3.39)$$

结合 (3.38) 和关于 K_i ($i = 1, \dots, 6$) 的估计以及 (3.39), 使用定理 2.1 中的假设 (2.5), 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int (|u_R^\varepsilon|^2 + |b_R^\varepsilon|^2) + (1 - \delta) \varepsilon_1 \int |\nabla u_R^\varepsilon|^2 + (1 - \delta) \varepsilon_2 \int |\nabla b_R^\varepsilon|^2 \\
&\leq C \int (|u_R^\varepsilon|^2 + |b_R^\varepsilon|^2) + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\delta\varepsilon(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \int_0^t \int (|\nabla u_R^\varepsilon|^2 + |\nabla b_R^\varepsilon|^2) \\
&\quad + C \left(\varepsilon^{\kappa-1} + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon}} + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon)^2}{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon}} \right) + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\delta\varepsilon\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \\
&\leq C \left[\int (|u_R^\varepsilon|^2 + |b_R^\varepsilon|^2) + \varepsilon_1 \int_0^t \int |\nabla u_R^\varepsilon|^2 + \varepsilon_2 \int_0^t \int |\nabla b_R^\varepsilon|^2 \right] \\
&\quad + C \left(\varepsilon^{\kappa-1} + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon}} + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon)^2}{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon}} \right) + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\delta\varepsilon\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.
\end{aligned} \quad (3.40)$$

通过使用估计 (3.40) 和 Gronwall 不等式可得

$$\int (|u_R^\varepsilon|^2 + |b_R^\varepsilon|^2) + \varepsilon_1 \int_0^t \int |\nabla u_R^\varepsilon|^2 + \varepsilon_2 \int_0^t \int |\nabla b_R^\varepsilon|^2 \leq C \beta_0(\varepsilon), \quad (3.41)$$

其中

$$\beta_0(\varepsilon) = \varepsilon^{\kappa-1} + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon}} + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon)^2}{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon}} + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \quad (3.42)$$

更进一步可得

$$\begin{aligned}
&\int |(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)(t)|^2 + (1 - \delta)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \int_0^t \int |\nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 \\
&\leq C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \beta_0(\varepsilon) + C \varepsilon^\kappa + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} = \bar{\beta}_0(\varepsilon).
\end{aligned} \quad (3.43)$$

对方程 (3.35) 关于时间微分一次, 对相应的方程同乘以 $\partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)$, 然后在 Ω 上积分. 注意事实

$$\begin{aligned}\partial_t u_R^\varepsilon|_{t=0} &= \varepsilon_1 \Delta u^0(t=0) + O\left(\varepsilon^\kappa + \varepsilon_1 \varepsilon^\kappa + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon}\right), \\ \partial_t b_R^\varepsilon|_{t=0} &= \varepsilon_2 \Delta b^0(t=0) + O\left(\varepsilon^\kappa + \varepsilon_2 \varepsilon^\kappa + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon}{\varepsilon}\right)\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}& \left| \int \partial_t(u^\varepsilon + b^\varepsilon) \cdot \nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \cdot \partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \right| \\& \leq \left| \int \partial_t(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon) \cdot \nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \cdot \partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \right| \\& \quad + \left| \int \partial_t(u^0 + b^0 + u_B^\varepsilon + b_B^\varepsilon) \cdot \nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \cdot \partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \right| \\& \leq \|\nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} \|\partial_t(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon) \partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} + C \|\nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} \|\partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} \\& \leq \|\nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} (\|\partial_t(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)\|_{L^4}^2 + \|\partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^4}^2) \\& \quad + C \|\nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} \|\partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} \\& \leq \|\nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} (\|\partial_t(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)\|_{L^2} \|\nabla \partial_t(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)\|_{L^2} + \|\partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} \|\nabla \partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}) \\& \quad + C \|\nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 + C \|\partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \\& \leq \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \|\nabla \partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 + \delta \varepsilon^2 \|\partial_t \nabla(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \\& \quad + C \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \|\nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \|\partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 + C \frac{1}{\varepsilon^2} \|\nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \|\partial_t(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \\& \quad + C \|\nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 + C \|\partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

因此, 有

$$\begin{aligned}& \frac{d}{dt} \int |\partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)(t)|^2 + (1 - \delta)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \int |\partial_t \nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 \\& \leq C \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \|\nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \|\partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \\& \quad + C \frac{1}{\varepsilon^2} \|\nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \|\partial_t(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \\& \quad + C \|\nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 + C \|\partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \\& \quad + C \left(\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} + \delta \varepsilon^2 \right) \int (|\partial_t \nabla u_R^\varepsilon|^2 + |\partial_t \nabla b_R^\varepsilon|^2) + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\delta\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\end{aligned} \quad (3.44)$$

或

$$\begin{aligned}& \int |\partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)(t)|^2 + (1 - \delta)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \int_0^t \int |\partial_t \nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 \\& \leq C \int_0^t \frac{\|\nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2}{\varepsilon^2} \|\partial_t(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \beta_0(\varepsilon) \\& \quad + C \frac{\varepsilon^\kappa}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} + C(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \\& \quad + \left(\frac{C(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} + \delta \varepsilon^2 \right) \int_0^t \int (|\partial_t \nabla u_R^\varepsilon|^2 + |\partial_t \nabla b_R^\varepsilon|^2) + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4\delta\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\end{aligned} \quad (3.45)$$

对于某个不依赖于 ε 的 $\delta > 0$ 成立, 这里需要

$$\frac{\beta_0(\varepsilon)}{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \leq C.$$

对方程 (3.30) 和 (3.31) 关于时间微分一次, 用相应的方程分别同乘以 $\partial_t u_R^\varepsilon$ 和 $\partial_t b_R^\varepsilon$, 并在 Ω 上积分. 注意

$$\begin{aligned} & \left| \int (-\partial_t u^\varepsilon \cdot \nabla u_R^\varepsilon \partial_t u_R^\varepsilon + \partial_t b^\varepsilon \cdot \nabla b_R^\varepsilon \partial_t u_R^\varepsilon - \partial_t u^\varepsilon \cdot \nabla b_R^\varepsilon \partial_t b_R^\varepsilon + \partial_t b^\varepsilon \cdot \nabla u_R^\varepsilon \partial_t b_R^\varepsilon) \right| \\ & \leq \left| \int (-\partial_t u_R^\varepsilon \cdot \nabla u_R^\varepsilon \partial_t u_R^\varepsilon + \partial_t b_R^\varepsilon \cdot \nabla b_R^\varepsilon \partial_t u_R^\varepsilon - \partial_t u_R^\varepsilon \cdot \nabla b_R^\varepsilon \partial_t b_R^\varepsilon + \partial_t b_R^\varepsilon \cdot \nabla u_R^\varepsilon \partial_t b_R^\varepsilon) \right| \\ & \quad + \left| \int (-\partial_t (u^0 + u_B^\varepsilon) \cdot \nabla u_R^\varepsilon \partial_t u_R^\varepsilon + \partial_t (b^0 + b_B^\varepsilon) \cdot \nabla b_R^\varepsilon \partial_t u_R^\varepsilon \right. \\ & \quad \left. - \partial_t (u^0 + u_B^\varepsilon) \cdot \nabla b_R^\varepsilon \partial_t b_R^\varepsilon + \partial_t (b^0 + b_B^\varepsilon) \cdot \nabla u_R^\varepsilon \partial_t b_R^\varepsilon) \right| \\ & \leq C \|\nabla u_R^\varepsilon\|_{L^2} (\|\partial_t u_R^\varepsilon\|_{L^4}^2 + \|\partial_t b_R^\varepsilon\|_{L^4}^2) + C \|\nabla b_R^\varepsilon\|_{L^2} \|\partial_t u_R^\varepsilon\|_{L^4}^2 + \|\partial_t b_R^\varepsilon\|_{L^4}^2 \\ & \quad + C (\|\nabla u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|\nabla b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2) + C \|\partial_t u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \|\partial_t b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 \\ & \leq C (\|\nabla u_R^\varepsilon\|_{L^2} + \|\nabla b_R^\varepsilon\|_{L^2}) (\|\partial_t u_R^\varepsilon\|_{L^2} \|\nabla \partial_t u_R^\varepsilon\|_{L^2} + \|\partial_t b_R^\varepsilon\|_{L^2} \|\nabla \partial_t b_R^\varepsilon\|_{L^2}) \\ & \quad + C (\|\nabla u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|\nabla b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2) + C \|\partial_t u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \|\partial_t b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 \\ & \leq \delta \varepsilon_1 \|\nabla \partial_t u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2}{\varepsilon_1} \|\partial_t u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \delta \varepsilon_2 \|\nabla \partial_t b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2}{\varepsilon_2} \|\partial_t b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 \\ & \quad + C \frac{\|\nabla b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2}{\varepsilon_2} \|\partial_t b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2}{\varepsilon_1} \|\partial_t u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 \\ & \quad + C (\|\nabla u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|\nabla b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|\partial_t u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|\partial_t b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2), \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} & \left| \int (-\partial_t u_R^\varepsilon \cdot \nabla u_B^\varepsilon \partial_t u_R^\varepsilon + \partial_t b_R^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon \partial_t u_R^\varepsilon - \partial_t u_R^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon \partial_t b_R^\varepsilon + \partial_t b_R^\varepsilon \cdot \nabla u_B^\varepsilon \partial_t b_R^\varepsilon) \right| \\ & = \left| - \int \partial_t (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \cdot \nabla u_B^\varepsilon \cdot \partial_t (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon) \right| \\ & \leq C \int (|\partial_t u_R^\varepsilon|^2 + |\partial_t u_R^\varepsilon|^2) + C \int \frac{|\partial_t (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} & \left| \int (-u_R^\varepsilon \cdot \partial_t \nabla u_B^\varepsilon \partial_t u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon \cdot \nabla \partial_t b_B^\varepsilon \partial_t u_R^\varepsilon - u_R^\varepsilon \cdot \nabla \partial_t b_B^\varepsilon \partial_t b_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon \cdot \nabla \partial_t u_B^\varepsilon \partial_t b_R^\varepsilon) \right| \\ & = \left| - \int (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \cdot \nabla \partial_t u_B^\varepsilon \cdot \partial_t (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon) \right| \\ & \leq C \int (|\partial_t u_R^\varepsilon|^2 + |\partial_t u_R^\varepsilon|^2) + C \int \frac{|u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon|^2}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

因此, 有

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int (|\partial_t u_R^\varepsilon|^2 + |\partial_t b_R^\varepsilon|^2) + \varepsilon_1 \int |\nabla \partial_t u_R^\varepsilon|^2 + \varepsilon_2 \int |\nabla \partial_t b_R^\varepsilon|^2 \\ & \leq C \frac{\|\nabla u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2}{\varepsilon_1} \int |\partial_t u_R^\varepsilon|^2 + C \frac{\|\nabla u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2}{\varepsilon_2} \int |\partial_t b_R^\varepsilon|^2 \\ & \quad + C \frac{\|\nabla b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2}{\varepsilon_2} \int |\partial_t b_R^\varepsilon|^2 + C \frac{\|\nabla b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2}{\varepsilon_1} \int |\partial_t u_R^\varepsilon|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C \int (|\nabla u_R^\varepsilon|^2 + |\nabla b_R^\varepsilon|^2) + C \int (|\partial_t u_R^\varepsilon|^2 + |\partial_t b_R^\varepsilon|^2) \\
& + C \int (|u_R^\varepsilon|^2 + |b_R^\varepsilon|^2) + C \int \frac{|\partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 + |(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2}{\varepsilon} \\
& + C \left(\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon}} + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon)^2}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon}} \right) \\
\leq & C \frac{\|\nabla u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2}{\varepsilon_1} \int |\partial_t u_R^\varepsilon|^2 + C \frac{\|\nabla u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2}{\varepsilon_2} \int |\partial_t b_R^\varepsilon|^2 \\
& + C \frac{\|\nabla b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2}{\varepsilon_2} \int |\partial_t b_R^\varepsilon|^2 + C \frac{\|\nabla b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2}{\varepsilon_1} \int |\partial_t u_R^\varepsilon|^2 \\
& + C \int (|\nabla u_R^\varepsilon|^2 + |\nabla b_R^\varepsilon|^2) + C \int (|\partial_t u_R^\varepsilon|^2 + |\partial_t b_R^\varepsilon|^2) \\
& + C \int (|u_R^\varepsilon|^2 + |b_R^\varepsilon|^2) + C \int_0^t \frac{\|\nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2}{\varepsilon^3} \int (|\partial_t u_R^\varepsilon|^2 + |\partial_t b_R^\varepsilon|^2) \\
& + C \left(\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} + \delta\varepsilon \right) \int_0^t \int (|\partial_t \nabla u_R^\varepsilon|^2 + |\partial_t \nabla b_R^\varepsilon|^2) + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon} + C\varepsilon^{\kappa-1} \\
& + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \beta_0(\varepsilon) + C \left(\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon}} + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon)^2}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon}} \right) \\
& + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \beta_0(\varepsilon) + C \frac{\varepsilon^{\kappa-1}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \\
& + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} + C(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2. \tag{3.49}
\end{aligned}$$

通过使用估计 (3.41) 和 (3.43), 应用 Gronwall 不等式到 (3.49), 可得

$$\int (|\partial_t u_R^\varepsilon|^2 + |\partial_t b_R^\varepsilon|^2) + \varepsilon_1 \int_0^t \int |\nabla \partial_t u_R^\varepsilon|^2 + \varepsilon_2 \int_0^t \int |\nabla \partial_t b_R^\varepsilon|^2 \leq C\beta_1(\varepsilon), \tag{3.50}$$

其中

$$\begin{aligned}
\beta_1(\varepsilon) = & \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \beta_0(\varepsilon) + \frac{\varepsilon^{\kappa-1}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \\
& + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} + \left(\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon}} + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon)^2}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon}} \right), \tag{3.51}
\end{aligned}$$

这里需要 $\frac{\beta_0(\varepsilon)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \varepsilon^3 \leq C$.

更进一步, 从 (3.44) 和 (3.50) 可得

$$\begin{aligned}
& \int |\partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)(t)|^2 + (1 - \delta)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \int_0^t \int |\partial_t \nabla(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 \leq C\bar{\beta}_1(\varepsilon), \\
\bar{\beta}_1(\varepsilon) = & (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \beta_1(\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \beta_1(\varepsilon) + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \tag{3.52}
\end{aligned}$$

类似地, 我们能获得下面的 x 方向的切向导数估计:

$$\int (|\partial_x u_R^\varepsilon|^2 + |\partial_x b_R^\varepsilon|^2) + \varepsilon_1 \int_0^t \int |\nabla \partial_x u_R^\varepsilon|^2 + \varepsilon_2 \int_0^t \int |\nabla \partial_x b_R^\varepsilon|^2 \leq C\beta_2(\varepsilon), \tag{3.53}$$

其中

$$\beta_2(\varepsilon) = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \beta_0(\varepsilon) + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \frac{\varepsilon^{\kappa-1}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} \tag{3.54}$$

和

$$\int |\partial_x(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)(t)|^2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \int_0^t \int |\nabla \partial_x(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 \leq C \bar{\beta}_2(\varepsilon), \quad (3.55)$$

$$\bar{\beta}_2(\varepsilon) = \varepsilon^\kappa + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \beta_2(\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \beta_2(\varepsilon) + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad (3.56)$$

这里 $\|\partial_x(u_R^\varepsilon(t=0), b_R^\varepsilon(t=0))\|_{L^2}^2 = O(\varepsilon^\kappa)$, $\partial_x u_B^\varepsilon = \partial_x b_B^\varepsilon = 0$.

最后, 我们应用 $\partial_t \partial_x$ 到方程 (3.30)–(3.33) 和 (3.35), 然后同乘以 $\partial_t \partial_x u_R^\varepsilon$ 、 $\partial_t \partial_x b_R^\varepsilon$ 和 $\partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)$, 并在 Ω 上积分. 注意 $\|\partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon(t=0), b_R^\varepsilon(t=0))\|_{L^2}^2 = O(\varepsilon^\kappa)$, $\varepsilon_1 \partial_t \partial_x \Delta u^0 = 0 = \varepsilon_2 \partial_t \partial_x \Delta b^0$ 和 $\partial_t \partial_x u_B^\varepsilon = \partial_t \partial_x b_B^\varepsilon = 0$, 以及

$$\begin{aligned} & \left| \int \partial_t \partial_x (u^\varepsilon + b^\varepsilon) \cdot \nabla (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \cdot \partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \right| \\ &= \left| \int \partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon) \cdot \nabla (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \cdot \partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \right| \\ &\leq \|\nabla (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} \|\partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon) \partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} \\ &\leq C \|\nabla (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} (\|\partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)\|_{L^4}^2 + \|\partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^4}^2) \\ &\leq C \|\nabla (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} (\|\partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \|\nabla \partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \|\partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \|\nabla \partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2) \\ &\leq \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \|\nabla \partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 + \delta \varepsilon^2 \|\nabla \partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \\ &\quad + C \frac{\|\nabla (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \|\partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2}{\varepsilon^2} \|\nabla \partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (3.57)$$

和

$$\begin{aligned} & \left| \int \partial_t (u^\varepsilon + b^\varepsilon) \cdot \nabla \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \cdot \partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \right| \\ &\leq \left| \int \partial_t (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon) \cdot \nabla \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \cdot \partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \right| \\ &\quad + \left| \int \partial_t (u^0 + b^0 + u_B^\varepsilon + b_B^\varepsilon) \cdot \nabla \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \cdot \partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \right| \\ &\leq \|\nabla \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} \|\partial_t (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon) \partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} + C \|\nabla \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} \|\partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} \\ &\leq C \|\nabla \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} (\|\partial_t (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)\|_{L^4}^2 + \|\partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^4}^2) \\ &\quad + C \|\nabla \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} \|\partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} \\ &\leq C \|\nabla \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} (\|\partial_t (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \|\nabla \partial_t (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 + \|\partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \|\nabla \partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2) \\ &\quad + C \|\nabla \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} \|\partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2} \\ &\leq \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \|\nabla \partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \|\partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \delta \varepsilon^2 \|\nabla \partial_t (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2}{\varepsilon^2} \|\partial_t (u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \\ &\quad + C \|\nabla \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 + C \|\partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (3.58)$$

同理, $\int \partial_x(u^\varepsilon + b^\varepsilon) \cdot \nabla \partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \cdot \partial_t \partial_x(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)$ 能被下面的界所估计:

$$\begin{aligned} & \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \|\nabla \partial_t \partial_x(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 + \delta \varepsilon^2 \|\nabla \partial_x(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla \partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \|\partial_t \partial_x(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 \\ & + C \frac{\|\nabla \partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2}{\varepsilon^2} \|\partial_x(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 + C \|\nabla \partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2 + C \|\partial_t \partial_x(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

这样, 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int |\partial_t \partial_x(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 + (1 - \delta)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \int |\nabla \partial_t \partial_x(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 \\ & \leq C \left(\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} + \delta \varepsilon^2 \right) \int (|\nabla \partial_t \partial_x u_R^\varepsilon|^2 + |\nabla \partial_t \partial_x b_R^\varepsilon|^2) \\ & + C \int |\nabla \partial_x(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 + C \int |\nabla \partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 + C \int |\partial_t \partial_x(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 \\ & + C \frac{\|\nabla \partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \int |\partial_t \partial_x(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 \\ & + C \frac{\|\nabla \partial_x(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \int |\partial_t \partial_x(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 \\ & + C \frac{\|\nabla \partial_x(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2}{\varepsilon^2} \int |\partial_t(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)|^2 \\ & + C \frac{\|\nabla \partial_t(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2}{\varepsilon^2} \int |\partial_x(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon)|^2 \end{aligned} \quad (3.59)$$

或

$$\begin{aligned} & \int |\partial_t \partial_x(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 + (1 - \delta)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \int_0^t \int |\nabla \partial_t \partial_x(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 \\ & \leq C \left(\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} + \delta \varepsilon^2 \right) \int_0^t \int (|\nabla \partial_t \partial_x u_R^\varepsilon|^2 + |\nabla \partial_t \partial_x b_R^\varepsilon|^2) + C \beta_3(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.60)$$

其中

$$\beta_3(\varepsilon) = \varepsilon^\kappa + \frac{\beta_1(\varepsilon) \bar{\beta}_2(\varepsilon) + \beta_2(\varepsilon) \bar{\beta}_1(\varepsilon)}{\varepsilon^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad (3.61)$$

这里需要

$$\frac{\bar{\beta}_1(\varepsilon)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} \leq C.$$

另外, 注意到

$$\begin{aligned} & \left| - \int (\partial_x(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \cdot \nabla \partial_t u_B^\varepsilon + \partial_t \partial_x(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon) \cdot \nabla u_B^\varepsilon) \cdot \partial_t \partial_x(u_R^\varepsilon + b_R^\varepsilon) \right| \\ & \leq C \int (|\partial_t \partial_x u_R^\varepsilon|^2 + |\partial_t \partial_x b_R^\varepsilon|^2) + C \int \frac{|\partial_x(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 + |\partial_t \partial_x(u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2}{\varepsilon} \\ & \leq C \int (|\partial_t \partial_x u_R^\varepsilon|^2 + |\partial_t \partial_x b_R^\varepsilon|^2) + C \left(\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} + \delta \varepsilon \right) \int_0^t \int (|\nabla \partial_t \partial_x u_R^\varepsilon|^2 + |\nabla \partial_t \partial_x b_R^\varepsilon|^2) \\ & + C \frac{\beta_3(\varepsilon)}{\varepsilon} + C \varepsilon^{\kappa-1} + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \beta_2(\varepsilon) + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

正像获得估计 (3.57) 和 (3.58) 一样, 我们能得到

$$\begin{aligned}
& \int [-(\partial_t \partial_x u^\varepsilon \cdot \nabla u_R^\varepsilon + \partial_t u^\varepsilon \cdot \nabla \partial_x u_R^\varepsilon + \partial_x u^\varepsilon \cdot \nabla \partial_t u_R^\varepsilon) \\
& + (\partial_t \partial_x b^\varepsilon \cdot \nabla b_R^\varepsilon + \partial_t b^\varepsilon \cdot \nabla \partial_x b_R^\varepsilon + \partial_x b^\varepsilon \cdot \nabla \partial_t b_R^\varepsilon)] \cdot \partial_t \partial_x u_R^\varepsilon \\
& \leq \delta \varepsilon_1 \|\nabla \partial_t \partial_x u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla u_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_1} \|\partial_t \partial_x u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla \partial_x u_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_1} \|\partial_t u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 \\
& + C \frac{\|\nabla \partial_t u_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_1} \|\partial_x u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \|\nabla \partial_t u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \|\nabla \partial_x u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla b_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_1} \|\partial_t \partial_x b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 \\
& + C \frac{\|\nabla \partial_x b_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_1} \|\partial_t b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla \partial_t b_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_1} \|\partial_x b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 \\
& + C \|\nabla \partial_t b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \|\nabla \partial_x b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \|\nabla u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \|\nabla b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2, \tag{3.63}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int [-(\partial_t \partial_x u^\varepsilon \cdot \nabla b_R^\varepsilon + \partial_t u^\varepsilon \cdot \nabla \partial_x b_R^\varepsilon + \partial_x u^\varepsilon \cdot \nabla \partial_t b_R^\varepsilon) \\
& + (\partial_t \partial_x b^\varepsilon \cdot \nabla u_R^\varepsilon + \partial_t b^\varepsilon \cdot \nabla \partial_x u_R^\varepsilon + \partial_x b^\varepsilon \cdot \nabla \partial_t u_R^\varepsilon)] \cdot \partial_t \partial_x b_R^\varepsilon \\
& \leq \delta \varepsilon_2 \|\nabla \partial_t \partial_x b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla b_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_2} \|\partial_t \partial_x u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla \partial_x b_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_2} \|\partial_t u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 \\
& + C \frac{\|\nabla \partial_t b_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_2} \|\partial_x b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \|\nabla \partial_t b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \|\nabla \partial_x b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla u_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_2} \|\partial_t \partial_x b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 \\
& + C \frac{\|\nabla \partial_x u_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_2} \|\partial_t b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla \partial_t u_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_2} \|\partial_x b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 \\
& + C \|\nabla \partial_t b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \|\nabla \partial_x b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \|\nabla u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \|\nabla b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2. \tag{3.64}
\end{aligned}$$

因此, 我们有

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int (|\partial_t \partial_x u_R^\varepsilon|^2 + |\partial_t \partial_x b_R^\varepsilon|^2) + (1 - \delta) \varepsilon_1 \int |\nabla \partial_t \partial_x u_R^\varepsilon|^2 + (1 - \delta) \varepsilon_2 \int |\nabla \partial_t \partial_x b_R^\varepsilon|^2 \\
& \leq C \int (|\partial_t \partial_x u_R^\varepsilon|^2 + |\partial_t \partial_x b_R^\varepsilon|^2) + C \left(\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} + \delta \varepsilon \right) \int_0^t \int (|\nabla \partial_t \partial_x u_R^\varepsilon|^2 + |\nabla \partial_t \partial_x b_R^\varepsilon|^2) \\
& + C \frac{\|\nabla u_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_1} \|\partial_t \partial_x u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla \partial_x u_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_1} \|\partial_t u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla \partial_t u_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_1} \|\partial_x u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 \\
& + C \frac{\|\nabla b_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_1} \|\partial_t \partial_x b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla \partial_x b_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_1} \|\partial_t b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla \partial_t b_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_1} \|\partial_x b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 \\
& + C \frac{\|\nabla b_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_2} \|\partial_t \partial_x u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla \partial_x b_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_2} \|\partial_t u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla \partial_t b_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_2} \|\partial_x b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 \\
& + C \frac{\|\nabla u_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_2} \|\partial_t \partial_x b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla \partial_x u_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_2} \|\partial_t b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla \partial_t u_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_2} \|\partial_x b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 \\
& + C \|\nabla \partial_t u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \|\nabla \partial_x u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \|\nabla \partial_t b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \|\nabla \partial_x b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 \\
& + C \|\nabla u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \|\nabla b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 \\
& + C \frac{\beta_3(\varepsilon)}{\varepsilon} + C \varepsilon^{\kappa-1} + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \beta_2(\varepsilon) + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \\
& \leq C \int (|\partial_t \partial_x u_R^\varepsilon|^2 + |\partial_t \partial_x b_R^\varepsilon|^2) + C \varepsilon_1 \int_0^t \int |\nabla \partial_t \partial_x u_R^\varepsilon|^2 + C \varepsilon_2 \int_0^t \int |\nabla \partial_t \partial_x b_R^\varepsilon|^2 \\
& + C \frac{\|\nabla u_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_1} \|\partial_t \partial_x u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla b_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_1} \|\partial_t \partial_x b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla b_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_2} \|\partial_t \partial_x u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \frac{\|\nabla u_R^\varepsilon\|^2}{\varepsilon_2} \|\partial_t \partial_x b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C(\|\nabla \partial_x u_R^\varepsilon\|^2 + \|\nabla \partial_x b_R^\varepsilon\|^2) \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \beta_1(\varepsilon) + C(\|\nabla \partial_t u_R^\varepsilon\|^2 + \|\nabla \partial_t b_R^\varepsilon\|^2) \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \beta_2(\varepsilon) \\
& + C\|\nabla \partial_t u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C\|\nabla \partial_x u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C\|\nabla \partial_t b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C\|\nabla \partial_x b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 \\
& + C\|\nabla u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C\|\nabla b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 \\
& + C \frac{\beta_3(\varepsilon)}{\varepsilon} + C\varepsilon^{\kappa-1} + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \beta_2(\varepsilon) + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \tag{3.65}
\end{aligned}$$

使用 Gronwall 不等式到 (3.65) 可得

$$\int (|\partial_t \partial_x u_R^\varepsilon|^2 + |\partial_t \partial_x b_R^\varepsilon|^2) + \varepsilon_1 \int_0^t \int |\nabla \partial_t \partial_x u_R^\varepsilon|^2 + \varepsilon_2 \int_0^t \int |\nabla \partial_t \partial_x b_R^\varepsilon|^2 \leq C\beta_4(\varepsilon), \tag{3.66}$$

其中

$$\begin{aligned}
\beta_4(\varepsilon) &= \varepsilon^\kappa + \frac{\beta_3(\varepsilon)}{\varepsilon} + \varepsilon^{\kappa-1} + C \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \beta_2(\varepsilon) + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \\
&+ \frac{1}{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \beta_1(\varepsilon) \beta_2(\varepsilon) + (\beta_1(\varepsilon) + \beta_2(\varepsilon)) \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) + \frac{\beta_0(\varepsilon)}{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}, \tag{3.67}
\end{aligned}$$

这里需要

$$\frac{\beta_0(\varepsilon) + \beta_1(\varepsilon) + \beta_2(\varepsilon)}{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \leq C.$$

然后可得

$$\begin{aligned}
& \int |\partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \int_0^t \int |\nabla \partial_t \partial_x (u_R^\varepsilon - b_R^\varepsilon)|^2 \\
& \leq C \left(\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} + \frac{\varepsilon^2}{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \right) \beta_4(\varepsilon) + \beta_3(\varepsilon). \tag{3.68}
\end{aligned}$$

最后应用各项异性的 Sobolev 不等式 (参见文献 [25]) 可得

$$\begin{aligned}
\|(u_R^\varepsilon, b_R^\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} & \leq C(\|(u_R^\varepsilon, b_R^\varepsilon)\|_{L^\infty(0, T; H)}^{\frac{1}{2}} \|\partial_x (u_R^\varepsilon, b_R^\varepsilon)\|_{L^\infty(0, T; L^2)}^{\frac{1}{2}} \\
& + \|(u_R^\varepsilon, b_R^\varepsilon)\|_{L^\infty(0, T; L^2)}^{\frac{1}{2}} \|\partial_x \partial_z (u_R^\varepsilon, b_R^\varepsilon)\|_{L^\infty(0, T; L^2)}^{\frac{1}{2}}) \\
& \leq C \left(\frac{\beta_1(\varepsilon)}{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \right)^{\frac{1}{4}} (\beta_2(\varepsilon))^{\frac{1}{4}} + C(\beta_0(\varepsilon))^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\beta_4(\varepsilon)}{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}} \right)^{\frac{1}{4}} \rightarrow 0, \quad \text{当 } \varepsilon \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

这完成了定理 2.1 中估计 (2.6) 和 (2.7) 的证明. $\square$

3.3 定理 2.2 的证明

定理 2.2 的证明 令 $(u^\varepsilon, b^\varepsilon)$ 是 MHD 方程 (1.1)–(1.5) 的 Leray-Hopf 解, 并将其分解为

$$(u^\varepsilon, b^\varepsilon) = (u^{\varepsilon_1, 0} + u_R^\varepsilon, b^{\varepsilon_1, 0} + b_B^\varepsilon + b_R^\varepsilon).$$

在第 3.1 小节中取 $\nu_2^* = (\theta\varepsilon_2)^{1+\tau}$, 其中 $\tau \in [0, 1)$, 并利用 (1.11)–(1.15) 可得

$$\begin{aligned}
& \partial_t u_R^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u_R^\varepsilon + u_R^\varepsilon \cdot \nabla u^{\varepsilon_1, 0} - \varepsilon_1 \Delta u_R^\varepsilon \\
& = -\nabla(p^\varepsilon - p^{\varepsilon_1, 0}) + b^\varepsilon \cdot \nabla b_R^\varepsilon + b^{\varepsilon_1, 0} \cdot \nabla b_B^\varepsilon + b_B^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon + b_R^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon
\end{aligned}$$

$$+ b_B^\varepsilon \cdot \nabla b^{\varepsilon_1,0} + b_R^\varepsilon \cdot \nabla b^{\varepsilon_1,0}, \quad (x, y, z, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t b_B^\varepsilon + \partial_t b_R^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla b_R^\varepsilon + u^{\varepsilon_1,0} \cdot \nabla b_B^\varepsilon + u_R^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon \\ & + u_R^\varepsilon \cdot \nabla b^{\varepsilon_1,0} - \varepsilon_2 \Delta b_R^\varepsilon - \varepsilon_2 \Delta b^{\varepsilon_1,0} - \varepsilon_2 \Delta b_B^\varepsilon \\ & = b^\varepsilon \cdot \nabla u_R^\varepsilon + b_B^\varepsilon \cdot \nabla u^{\varepsilon_1,0} + b_R^\varepsilon \cdot \nabla u^{\varepsilon_1,0}, \quad (x, y, z, t) \in \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\operatorname{div} u^\varepsilon = \operatorname{div} b^\varepsilon = \operatorname{div} u_R^\varepsilon = \operatorname{div} b_R^\varepsilon = 0, \quad (x, y, z, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (3.71)$$

$$u_R^\varepsilon = b_R^\varepsilon = 0, \quad (x, y) \in \omega, \quad z = 0, h, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} & u_R^\varepsilon(t=0) = u^\varepsilon(0) - u^{\varepsilon_1,0}(0), \\ & b_R^\varepsilon(t=0) = b^\varepsilon(0) - b^{\varepsilon_1,0}(0) - b_B^\varepsilon(t=0), \quad (x, y, z) \in \Omega. \end{aligned} \quad (3.73)$$

取 (3.69) 与 u_R^ε 的 L^2 内积, 取 (3.70) 与 b_R^ε 的 L^2 内积, 可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int (|u_R^\varepsilon|^2 + |b_R^\varepsilon|^2) + \varepsilon_1 \int |\nabla u_R^\varepsilon|^2 + \varepsilon_2 \int |\nabla b_R^\varepsilon|^2 = \sum_{i=1}^{11} I_i, \quad (3.74)$$

其中 I_i ($i = 1, \dots, 11$) 分别取为

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int \nabla(p^\varepsilon - p^{\varepsilon_1,0}) u_R^\varepsilon, \\ I_2 &= \int \partial_t b_B^\varepsilon b_R^\varepsilon, \\ I_3 &= - \int u^\varepsilon \cdot \nabla u_R^\varepsilon u_R^\varepsilon - \int u^\varepsilon \cdot \nabla b_R^\varepsilon b_R^\varepsilon, \\ I_4 &= \int b^{\varepsilon_1,0} \cdot \nabla b_B^\varepsilon u_R^\varepsilon - \int u^{\varepsilon_1,0} \cdot \nabla b_B^\varepsilon b_R^\varepsilon, \\ I_5 &= \int b_B^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon u_R^\varepsilon, \\ I_6 &= - \int u_R^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon b_R^\varepsilon + \int b_R^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon u_R^\varepsilon, \\ I_7 &= \int b_B^\varepsilon \cdot \nabla b^{\varepsilon_1,0} u_R^\varepsilon + \int b_B^\varepsilon \cdot \nabla u^{\varepsilon_1,0} b_R^\varepsilon, \\ I_8 &= - \int u_R^\varepsilon \cdot \nabla u^{\varepsilon_1,0} u_R^\varepsilon - \int u_R^\varepsilon \cdot \nabla b^{\varepsilon_1,0} b_R^\varepsilon \\ & \quad + \int b_R^\varepsilon \cdot \nabla b^{\varepsilon_1,0} u_R^\varepsilon + \int b_R^\varepsilon \cdot \nabla u^{\varepsilon_1,0} b_R^\varepsilon, \\ I_9 &= \int b^\varepsilon \cdot \nabla b_R^\varepsilon u_R^\varepsilon + \int b^\varepsilon \cdot \nabla u_R^\varepsilon b_R^\varepsilon, \\ I_{10} &= \varepsilon_2 \int \Delta b^{\varepsilon_1,0} b_R^\varepsilon, \\ I_{11} &= \varepsilon_2 \int \Delta b_B^\varepsilon b_R^\varepsilon. \end{aligned}$$

现在我们估计 I_i ($i = 1, \dots, 11$).

首先, 类似于 $J_1, \dots, J_5, J_7, \dots, J_{13}$ 的估计, 我们可以估计 $I_1, \dots, I_5, I_7, \dots, I_{11}$ 得到

$$I_1 + \dots + I_5 + I_7 + \dots + I_{11} \leq C \int (|u_R^\varepsilon|^2 + |b_R^\varepsilon|^2) + C \left(\frac{(\sqrt{\varepsilon_2})^{1-\tau}}{\sqrt{\theta}} + (\sqrt{\theta \varepsilon_2})^{1+\tau} \right). \quad (3.75)$$

其次, I_6 能被估计如下:

$$I_6 =: I_{61} + I_{62},$$

其中

$$I_{61} = - \int u_R^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon b_R^\varepsilon, \quad I_{62} = \int b_R^\varepsilon \cdot \nabla b_B^\varepsilon u_R^\varepsilon.$$

接下来估计 I_{61} , 分为两部分估计:

$$\begin{aligned} I_{61} &= - \int U_R^\varepsilon \cdot \nabla_{x,y} B_B^\varepsilon B_R^\varepsilon - \int U_R^\varepsilon \cdot \nabla_{x,y} b_{B3}^\varepsilon b_{R3}^\varepsilon \\ &\quad - \int u_{R3}^\varepsilon \partial_z b_{B3}^\varepsilon b_{R3}^\varepsilon - \int u_{R3}^\varepsilon \partial_z B_B^\varepsilon B_R^\varepsilon \\ &=: K_1 + K_2 + K_3 + K_4. \end{aligned}$$

积分 K_1 、 K_2 和 K_3 容易估计为

$$K_1 + K_2 + K_3 \leq C \|(u^{\varepsilon_1,0}, b^{\varepsilon_1,0})\|_{H^s} \|(u_R^\varepsilon, b_R^\varepsilon)\|_{L^2}^2, \quad s > \frac{5}{2}.$$

对于 K_4 , 我们有

$$\begin{aligned} K_4 &= - \int_\omega \int_0^{\frac{h}{4}} u_{R3}^\varepsilon \cdot \partial_z B_{B+}^\varepsilon B_R^\varepsilon - \int_\omega \int_{\frac{3h}{4}}^h u_{R3}^\varepsilon \cdot \partial_z B_{B-}^\varepsilon B_R^\varepsilon \\ &= - \int_\omega \int_0^{\frac{h}{4}} \frac{u_{R3}^\varepsilon}{z} z^2 \partial_z B_{B+}^\varepsilon \frac{B_R^\varepsilon}{z} - \int_\omega \int_{\frac{3h}{4}}^h \frac{u_{R3}^\varepsilon}{h-z} (h-z)^2 \partial_z B_{B-}^\varepsilon \frac{B_R^\varepsilon}{h-z} \\ &\leq \left\| \frac{u_{R3}^\varepsilon}{z} \right\|_{L^2} \|z^2 \partial_z B_{B+}^\varepsilon\|_{L^\infty} \left\| \frac{B_R^\varepsilon}{z} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{u_{R3}^\varepsilon}{h-z} \right\|_{L^2} \|(h-z)^2 \partial_z B_{B-}^\varepsilon\|_{L^\infty} \left\| \frac{B_R^\varepsilon}{h-z} \right\|_{L^2} \\ &\leq C \|(u^{\varepsilon_1,0}, b^{\varepsilon_1,0})\|_{H^s} \sqrt{(\theta \varepsilon_2)^{1+\tau}} \|\partial_z u_{R3}^\varepsilon\|_{L^2} \|\partial_z B_R^\varepsilon\|_{L^2} \\ &\leq \theta^{1+\tau} (\varepsilon_2)^{1+\frac{\tau}{2}} \|\partial_z b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \theta^{1+\tau} (\varepsilon_2)^{\frac{\tau}{2}} \|(u^{\varepsilon_1,0}, b^{\varepsilon_1,0})\|_{H^s}^2 \|\partial_z u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 \\ &\leq \theta^{1+\tau} \varepsilon_2 \|\partial_z b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \theta^{1+\tau} \|\partial_z u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

对某个充分小的 $\theta > 0$ 成立, 这里 $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, 而且我们使用了 Hardy 不等式

$$\left\| \left(\frac{f(z)}{z}, \frac{f(z)}{h-z} \right) \right\|_{L^2(0,1)} \leq C \|\partial_z f(z)\|_{L^2(0,1)},$$

其中 $f(0) = 0$.

于是, 我们有

$$I_{61} \leq \theta^{1+\tau} \varepsilon_2 \|\partial_z b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \theta^{1+\tau} \|\partial_z u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C(\|u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2).$$

同理, I_{62} 能被估计为

$$I_{62} \leq \theta^{1+\tau} \varepsilon_2 \|\partial_z b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \theta^{1+\tau} \|\partial_z u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C(\|u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2).$$

因此, 我们有估计

$$I_6 \leq \theta^{1+\tau} \varepsilon_2 \|\partial_z b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \theta^{1+\tau} \|\partial_z u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + C(\|u_R^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|b_R^\varepsilon\|_{L^2}^2). \quad (3.76)$$

将估计式 (3.75)–(3.76) 代入 (3.74) 中, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int (|u_R^\varepsilon|^2 + |b_R^\varepsilon|^2) + (\varepsilon_1 - C\theta^{1+\tau}) \int |\nabla u_R^\varepsilon|^2 + \varepsilon_2(1 - \theta^{1+\tau}) \int |\nabla b_R^\varepsilon|^2 \\ & \leq C \int (|u_R^\varepsilon|^2 + |b_R^\varepsilon|^2) + C \left(\frac{(\sqrt{\varepsilon_2})^{1-\tau}}{\sqrt{\theta}} + (\sqrt{\theta\varepsilon_2})^{1+\tau} \right). \end{aligned} \quad (3.77)$$

取 $\theta > 0$ 充分小且不依赖于 ε_2 , 应用 Gronwall 不等式到 (3.77), 并使用关于初值的假设 (2.9), 可得定理 2.2 中的估计 (2.10). 这完成了定理 2.2 的证明. $\square$

参考文献

- 1 Biskamp D. Nonlinear Magnetohydrodynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1993
- 2 Duvant G, Lions J L. Inéquation en thermoélasticité et magnétohydrodynamique. Arch Ration Mech Anal, 1972, 46: 241–279
- 3 He L B, Xu L, Yu P. On global dynamics of three dimensional Magnetohydrodynamics: Nonlinear stability of Alfvén waves. ArXiv:1603.08205, 2016
- 4 Sermange M, Temam R. Some mathematical questions related to the MHD equations. Comm Pure Appl Math, 1983, 36: 635–664
- 5 Wu Z L, Wang S. Zero viscosity and diffusion vanishing limit of the incompressible magnetohydrodynamic system with perfectly conducting wall. Nonlinear Anal Real World Appl, 2015, 24: 50–60
- 6 Xiao Y L, Xin Z P, Wu J H. Vanishing viscosity limit for the 3D magnetohydrodynamic system with a slip boundary condition. J Funct Anal, 2009, 257: 3375–3394
- 7 Xin Z P. Viscous boundary layers and their stability, I. J Partial Differential Equations, 1998, 11: 97–124
- 8 Cao C S, Wu J H. Global regularity for the 2D MHD equations with mixed partial dissipation and magnetic diffusion. Adv Math, 2010, 226: 1803–1822
- 9 Chen Q L, Miao C X, Zhang Z F. The Beale-Kato-Majda criterion for the 3D magnetohydrodynamics equations. Comm Math Phys, 2007, 275: 861–872
- 10 He C, Xin Z P. Partial regularity of suitable weak solutions to the incompressible magnetohydrodynamic equations. J Funct Anal, 2005, 227: 113–152
- 11 Wu J H. Viscous and inviscid magneto-hydrodynamics equations. J Anal Math, 1997, 73: 251–265
- 12 Wu J H. Regularity criteria for the generalized MHD equations. Comm Partial Differential Equations, 2008, 33: 285–306
- 13 Alekseenko S N. Existence and asymptotic representation of weak solutions to the flowing problem under the condition of regular slippage on solid walls. Siberian Math J, 1994, 35: 209–230
- 14 E W. Boundary layer theory and the zero viscosity limit of the Navier-Stokes equations. Acta Math Sin Engl Ser, 2000, 16: 207–218
- 15 E W, Engquist B. Blowup of solutions of the unsteady Prandtl's equation. Comm Pure Appl Math, 1997, 50: 1287–1293
- 16 Grenier E, Masmoudi N. Ekman layers of rotating fluids, the case of well prepared initial data. Comm Partial Differential Equations, 1997, 22: 953–975
- 17 Kato T. Nonstationary flow of viscous and ideal fluids in $\mathbb{R}^3$. J Funct Anal, 1972, 9: 296–305
- 18 Ladyzhenskaya O A. The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows, 2nd ed. New York: Gordon and Breach, 1969
- 19 Lions J L. Méthodes de Résolution des Problèmes x Limites Non Liéaires. Paris: Dunod, 1969
- 20 Maekawa Y. On the inviscid limit problem of the vorticity equations for viscous incompressible flows in the half-plane. Comm Pure Appl Math, 2014, 67: 1045–1128
- 21 Masmoudi N. The Euler limit of the Navier-Stokes equations, and rotating fluids with boundary. Arch Ration Mech Anal, 1998, 142: 375–394
- 22 Masmoudi N. Ekman layers of rotating fluids: The case of general initial data. Comm Pure Appl Math, 2000, 53: 432–483
- 23 Sammartino M, Caffisch R E. Zero viscosity limit for analytic solutions of the Navier-Stokes equations on a half space, I: Existence for Euler and Prandtl equations. Comm Math Phys, 1998, 192: 433–461

- 24 Sammartino M, Caffisch R E. Zero viscosity limit for analytic solutions of the Navier-Stokes equations on a half space, II: Construction of Navier-Stokes solution. *Comm Math Phys*, 1998, 192: 463–491
- 25 Temam R, Wang X. Boundary layers associated with incompressible Navier-Stokes equations: The noncharacteristic boundary case. *J Differential Equations*, 2002, 179: 647–686
- 26 Xiao Y L, Xin Z P. On the vanishing viscosity limit for the 3D Navier-Stokes equations with a slip boundary condition. *Comm Pure Appl Math*, 2007, 60: 1027–1055
- 27 Wang S, Wang B Y, Liu C D, et al. Boundary layer problem and zero viscosity-diffusion vanishing limit of the incompressible magnetohydrodynamic system with no-slip boundary Conditions. *J Differential Equations*, in press, 2016

Boundary layer problems in the vanishing viscosity-diffusion limits for the incompressible MHD system

WANG Shu & XIN ZhouPing

Abstract In this paper, we study boundary layer problem for the incompressible magneto-hydrodynamical (MHD) system in the presence of physical boundaries with the standard Dirichlet boundary conditions with small generic viscosity and diffusion coefficients. We identify a non-trivial class of initial data for which we can establish the uniform stability of the Prandtl's type boundary layers and prove rigorously that the solutions to the viscous and diffusive incompressible MHD system converges strongly to the superposition of the solution to the ideal MHD system with a Prandtl's type boundary layer corrector. One of the main difficulties is to deal with the effect of the difference between viscosity and diffusion coefficients and to control the singular boundary layers resulting from the Dirichlet boundary conditions for both the viscosity and the magnetic fields. One key derivation here is that for the class of initial data we identify here, there exist cancelations between the boundary layers of the velocity field and that of the magnetic fields so that one can use an elaborate energy method to take advantage of this special structure. In addition, in the case of fixed positive viscosity, we also establish the stability of diffusive boundary layer for the magnetic field and convergence of solutions in the limit of zero magnetic diffusion for general initial data.

Keywords incompressible viscous and diffusive MHD system, ideal inviscid MHD system, boundary layer for Dirichlet boundary conditions

MSC(2010) 35Q30, 35Q35, 35Q40, 35Q53, 35Q55, 76D05, 76Y07

doi: 10.1360/N012016-00211