次分数 Brown 运动一个积分泛函的中心极限定理及其应用

孙西超¹, 闫理坦^{2*}

1. 蚌埠学院理学院数学系, 蚌埠 233010;

2. 东华大学理学院数学系, 上海 201620

E-mail: sunxichao626@126.com, litan-yan@hotmail.com

收稿日期: 2016-11-30; 接受日期: 2017-03-04; 网络出版日期: 2017-05-25; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11571071, 11626033 和 11426036)、安徽省自然科学基金重点项目 (批准号: KJ2016A453 和 KJ2017A568) 和安徽省优秀人才支持计划重点项目 (批准号: gxyqZD2016354) 资助项目

摘要 假设 S^H 是 Hurst 参数为 $0 < H < 1$ 的次分数 Brown 运动. 本文研究积分过程

$$\frac{1}{\eta(\varepsilon)} \int_0^T ((S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)^2 - \varepsilon^{2H}) ds, \quad \varepsilon > 0$$

的渐近分布, 其中 $T > 0$, $\eta(\varepsilon)$ 表示一个当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时的无穷小量. 当 $0 < H < \frac{3}{4}$ 和 $\eta(\varepsilon) = \varepsilon^{2H+\frac{1}{2}}$ 时, 本文证明了上述积分弱收敛于一个标准 Brown 运动 B 的常数倍; 当 $H = \frac{3}{4}$ 和 $\eta(\varepsilon) = \varepsilon^2 \sqrt{-\log \varepsilon}$ 时, 证明了存在另一标准 Brown 运动 W , 使得上述积分弱收敛于 $\frac{3}{4}W$. 作为应用, 本文利用广义二次变差建立了 Ornstein-Uhlenbeck (O-U) 过程

$$X_t^H = X_0^H + \sigma S_t^H - \beta \int_0^t X_s^H ds$$

中参数 $\sigma > 0$ 的估计量, 并给出其渐近正态性.

关键词 次分数 Brown 运动 中心极限定理 O-U 过程 广义二次变差

MSC (2010) 主题分类 60G15, 60J55, 60H05

1 引言

作为 Brown 运动的推广, 文献 [1] 建立并研究了一类特殊的自相似 Gauss 过程, 这类过程保留了分数 Brown 运动的许多性质, 它产生于具有 Poisson 初始条件的分支粒子的占位时, 被称为次分数 Brown 运动. 所谓 Hurst 指数是 $H \in (0, 1)$ 的次分数 Brown 运动 $S^H = \{S_t^H, t \geq 0\}$ 是初值为 0、协方差为

$$R_H(t, s) \equiv E[S_t^H S_s^H] = s^{2H} + t^{2H} - \frac{1}{2}[(s+t)^{2H} + |t-s|^{2H}], \quad s, t \geq 0 \quad (1.1)$$

英文引用格式: Sun X C, Yan L T. A central limit theorem associated with sub-fractional Brownian motion and an application (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1055–1076, doi: 10.1360/SCM-2016-0748

的中心化 Gauss 过程. 当 $H = 1/2$ 时, S^H 为一个标准 Brown 运动 B . 次分数 Brown 运动 S^H 既不是半鞅也不是 Markov 过程除非 $H = 1/2$, 因此, 许多经典的 Itô 随机分析的技巧不能够用来直接处理次分数 Brown 运动, 但是作为 Gauss 过程, 基于 Malliavin 分析, 我们能够构建次分数 Brown 运动 S^H 的随机积分 (参见文献 [2]). 次分数 Brown 运动具有类似分数 Brown 运动的许多性质, 包括自相似性、长程与短程相依性以及 Hölder 正则性, 然而它没有平稳增量, 但是它却拥有如下估计:

$$[(2 - 2^{2H-1}) \wedge 1](t - s)^{2H} \leq \mathbb{E}[(S_t^H - S_s^H)^2] \leq [(2 - 2^{2H-1}) \vee 1](t - s)^{2H}.$$

关于次分数 Brown 运动基本性质的研究参见文献 [3–8], 而关于其随机分析方面的研究参见文献 [9–12]. 另一方面, 相对于分数 Brown 运动的广泛研究, 有关其他自相似 Gauss 过程的研究却很少. 主要原因是它们具有复杂的相依结构, 这些 Gauss 过程没有平稳增量并且或者没有基于 Brown 运动的 Wiener 积分表现或者其表现非常复杂. 因此, 对这些自相似 Gauss 过程渐近行为的研究具有非常重要的意义.

最近, 文献 [11] 研究了如下定义的广义 (分数) 二次变差:

$$[f(S^H), S^H]_t^{(H)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{2H}} \int_0^t (f(S_{s+\varepsilon}^H) - f(S_s^H))(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H) ds, \quad t > 0,$$

这里的极限表示在依概率意义下的极限, 并且 $0 < H < 1$. 特别地, 文献 [11] 证明了

$$[S^H, S^H]_t^{(H)} = t, \quad t \geq 0.$$

这样一个自然的问题是研究随机序列

$$\int_0^T (S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)^2 dt, \quad \varepsilon > 0$$

收敛于 T 的速度. 本文中, 作为对文献 [11] 研究的继续以及对文献 [13] 的推广, 我们考虑与积分过程

$$\int_0^T ((S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)^2 - \varepsilon^{2H}) dt, \quad \varepsilon > 0 \quad (1.2)$$

相关的中心极限定理.

本文的主要结果叙述如下.

定理 1 假设 S^H 是 Hurst 指数为 H 的次分数 Brown 运动, 并且

$$\lambda_H = \int_0^1 \left([(1-x)^{2H} + (1+x)^{2H} - 2x^{2H}]^2 + [(1-x)^{2H} + (1+x)^{2H} - 2]^2 \frac{1}{x^{2+4H}} \right) dx,$$

其中 $0 < H < \frac{3}{4}$.

(1) 如果 $0 < H < \frac{3}{4}$, 则存在一个标准 Brown 运动 $B = \{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ 使得, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 过程列

$$\left\{ \frac{1}{\varepsilon^{2H+\frac{1}{2}}} \int_0^t ((S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)^2 - \varepsilon^{2H}) dt, 0 \leq t \leq T \right\}, \quad \varepsilon > 0$$

在空间 $C([0, T])$ 中弱收敛于 $\sqrt{\lambda_H} B$;

(2) 如果 $H = \frac{3}{4}$, 则存在一个标准 Brown 运动 $W = \{W_t, 0 \leq t \leq T\}$ 使得, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 过程列

$$\left\{ \frac{1}{\varepsilon^2 \sqrt{-\log \varepsilon}} \int_0^t ((S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)^2 - \varepsilon^{2H}) dt, 0 \leq t \leq T \right\}, \quad \varepsilon > 0$$

在空间 $C([0, T])$ 中弱收敛于 $\frac{3}{4}W$.

值得注意的是, 当 $\frac{3}{4} < H < 1$ 时, 相应的随机积分没有渐近正态性, 即不存在权 $\eta(\varepsilon)$ 使得

$$\frac{1}{\eta(\varepsilon)} \int_0^T ((S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)^2 - \varepsilon^{2H}) dt$$

依分布收敛于正态随机变量, 此问题我们将在另外一篇文章中研究.

另一方面, 众所周知, 有关随机微分方程参数估计问题的研究也是概率论及其应用的一个重要研究方向. 当噪声是 Brown 运动、Lévy 过程或分数 Brown 运动时, 这类问题已经得到了广泛研究, 相关参数估计的研究参见文献 [14–19], 包含更一般统计推断与数值分析问题的研究参见文献 [20–26]. 然而对于更一般的随机过程, 特别是没有平稳增量的非半鞅型 Gauss 过程驱动的随机微分方程的参数估计的研究非常少, 主要原因是这类方程一般是非遍历的, 并且其估计量一般没有渐近正态性. 最近, 文献 [27] 研究了如下次分数 Ornstein-Uhlenbeck (O-U) 过程的参数估计:

$$X_t^H = X_0^H + \sigma S_t^H - \beta \int_0^t X_s^H ds, \quad t \in [0, T]. \quad (1.3)$$

当 $\sigma > 0$ 和 $0 < H < 1$ 均已知时, 该文献作者给出了 β 的最小二乘估计并讨论了其估计量的渐近分布. 为定理 1 的应用, 本文也将考虑当参数 β 和 Hurst 参数已知时, 参数 $\sigma > 0$ 的估计问题. 为了构造 $\sigma > 0$ 的估计量, 定义如下广义 (分数) 二次变差:

$$[X^H, X^H]_t^{(H)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{2H}} \int_0^t (X_{s+\varepsilon}^H - X_s^H)^2 ds, \quad t \in [0, T],$$

这个极限是在 $L^1(\Omega)$ 意义下的. 作为一个直接的结果, 对每个 $T > 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 如果过程 X^H 在 $[0, T + \varepsilon]$ 中能被连续观测, 则我们可以自然地构造如下估计量:

$$\widehat{\sigma}_T^2(\varepsilon) := \frac{1}{\varepsilon^{2H} T} \int_0^T (X_{t+\varepsilon}^H - X_t^H)^2 dt. \quad (1.4)$$

我们的第二个主要结果如下:

对所有的 $0 < H < 1$, $\widehat{\sigma}_T^2(\varepsilon)$ 是 σ^2 的无偏估计量. 更进一步地, 当 $0 < H < \frac{3}{4}$ 时,

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\widehat{\sigma}_T^2(\varepsilon) - \sigma^2) \rightarrow N\left(0, \frac{\lambda_H}{T} \sigma^4\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0; \quad (1.5)$$

而当 $H = \frac{3}{4}$ 时,

$$\frac{1}{\sqrt{-\varepsilon \log \varepsilon}} (\widehat{\sigma}_T^2(\varepsilon) - \sigma^2) \rightarrow N\left(0, \frac{9}{16T} \sigma^4\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.6)$$

本文内容组织如下. 第 2 节给出次分数 Brown 运动的一些准备; 第 3 节给出次分数 Brown 运动一些矩的基础估计, 这些估计能从一个侧面反映出次分数 Brown 运动的某些本质; 第 4 节证明中心极限定理 1; 第 5 节研究并证明我们的第二个结论.

2 次分数 Brown 运动

本节主要回顾次分数 Brown 运动的基本定义及其相关的随机积分. 我们将用 $S^H = \{S_t^H, 0 \leq t \leq T\}$ 表示定义在 $(\Omega, \mathcal{F}^H, P)$ 上的 Hurst 指数为 H ($0 < H < 1$) 的次分数 Brown 运动. 作为一个

Gauss 过程, 人们能利用 Malliavin 变分构造出关于 S^H 的随机积分, 有关 Gauss 过程 Malliavin 变分的相关基础理论参见文献 [2, 9, 10, 28].

如前所述, Hurst 指数为 $H \in (0, 1)$ 的次分数 Brown 运动 $S^H = \{S_t^H, t \geq 0\}$ 是一个中心 Gauss 过程, 其协方差函数为

$$R_H(t, s) \equiv E[S_t^H S_s^H] = s^{2H} + t^{2H} - \frac{1}{2}[(s+t)^{2H} + |t-s|^{2H}], \quad s, t \geq 0. \quad (2.1)$$

考虑如下定义的核:

$$Q_H(t, s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{H-\frac{1}{2}}} I_{T-, 2, \frac{3-2H}{4}}^{\frac{1}{2}-H} (u^{H-\frac{1}{2}} 1_{[0,t)})(s),$$

其中 $I_{T-, 2, \frac{3-2H}{4}}^{H-\frac{1}{2}}$ 表示 Erdély-Kober 型分数积分算子, 其定义如下:

$$(I_{T-, \sigma, \eta}^\alpha f)(s) = \frac{\sigma s^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_s^T \frac{t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(t)}{(t^\sigma - s^\sigma)^{1-\alpha}} dt, \quad s \in [0, T], \quad \alpha > 0, \quad (2.2)$$

$$(I_{T-, \sigma, \eta}^\alpha f)(s) = s^{\sigma\eta} \left(\frac{-d}{\sigma s^{\sigma-1} ds} \right)^n s^{\sigma(n-\eta)} (I_{T-, \sigma, \eta-n}^{\alpha+n} f)(s), \quad s \in [0, T], \quad \alpha > -n, \quad (2.3)$$

这里 $f: [0, T] \mapsto \mathbb{R}$ 为可测函数, $\sigma, \eta \in \mathbb{R}$. 有关分数积分和微分的基本理论参见文献 [29]. 利用这个核 K_H , 我们能获得次分数 Brown 运动 S^H 的如下 Wiener 积分表现:

$$S_t^H = \kappa_H \int_0^t Q_H(t, s) dB_s, \quad (2.4)$$

其中 B 为标准 Brown 运动,

$$\kappa_H = \frac{1}{\pi} \Gamma(2H) \sin H.$$

假设 $\mathcal{E}$ 表示由如下简单函数构成的类:

$$f = \sum_{j=1}^n a_j 1_{[t_{j-1}, t_j)}, \quad 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

又设 $\mathcal{H}$ 表示 $\mathcal{E}$ 关于内积

$$\langle 1_{[0,s]}, 1_{[0,t]} \rangle_{\mathcal{H}} = R_H(t, s)$$

的完备化, 则 $\mathcal{H}$ 是一个 Hilbert 空间. 当 $\frac{1}{2} < H < 1$ 时, $\mathcal{H}$ 能被刻画成

$$\mathcal{H} = \left\{ \varphi \mid \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 := \int_0^T \int_0^T \varphi(t) \varphi(s) \phi(t, s) ds dt < \infty \right\},$$

其中 $\phi(t, s) = H(2H-1)(|t-s|^{2H-2} - |t+s|^{2H-2})$. 当 $0 < H < \frac{1}{2}$ 时,

$$\mathcal{H} = \left\{ f \mid \exists \varphi_f \in L^2([0, T]), I_{T-, 2, \frac{2H+1}{4}}^{\frac{1}{2}-H} \left(\frac{2^{H-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \varphi_f \right)(t) = t^{H-\frac{1}{2}} f(t) \right\},$$

并且 $\|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^T \varphi_f(t)^2 dt$, 以及

$$\varphi_f(t) = I_{T-, 2, \frac{3-2H}{4}}^{H-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2^{H-\frac{1}{2}}} u^{H-\frac{1}{2}} f \right)(t).$$

像通常那样, 我们能根据

$$1_{[0,t]} \mapsto S^H(1_{[0,t]}) = S_t^H \equiv \int_0^T 1_{[0,t]}(s) dS_s^H, \quad t \in [0, T]$$

来定义映射

$$\Psi: \mathcal{E} \rightarrow L^2(\Omega).$$

进一步地, 上述映射能够被连续延拓到 $\mathcal{H}$ 并且 $\|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 = \mathbb{E}[S^H(\varphi)]^2$, $\varphi \in \mathcal{H}$. 我们称这个映射为 φ 关于 S^H 的 Wiener 积分, 记成

$$S^H(\varphi) = \int_0^T \varphi(s) dS_s^H, \quad \varphi \in \mathcal{H}.$$

用 $\mathcal{S}$ 表示如下形式光滑函数的集合:

$$F = f(S^H(\varphi_1), S^H(\varphi_2), \dots, S^H(\varphi_n)), \quad (2.6)$$

其中 $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ (f 及其所有阶导数均有界) 和 $\varphi_i \in \mathcal{H}$. 用 D^H 和 δ^H 分别表示次分数 Brown 运动 S^H 的 Malliavin 导数及其散度, 则有

$$D^H F = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(S^H(\varphi_1), S^H(\varphi_2), \dots, S^H(\varphi_n)) \varphi_j.$$

清楚地, 导数算子 D^H 是一个从 $L^2(\Omega)$ 到 $L^2(\Omega; \mathcal{H})$ 的闭算子, 我们用 $\mathbb{D}^{1,2}$ 表示 $\mathcal{S}$ 关于范数

$$\|F\|_{1,2} := \sqrt{\mathbb{E}|F|^2 + \mathbb{E}\|D^H F\|_{\mathcal{H}}^2}$$

的闭包. 对 $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, 散度 δ^H 定义为导数算子 D^H 的对偶算子并且

$$\mathbb{E}[F\delta^H(u)] = \mathbb{E}[\langle D^H F, u \rangle_{\mathcal{H}}] = \mathbb{E}\left[\int_0^T (K_H^* u)_s (K_H^* D_s^H F) ds\right]. \quad (2.7)$$

我们用记号

$$\delta^H(u) = \int_0^T u_s dS_s^H$$

表示适应过程 u 的 Skorohod 积分, 不定 Skorohod 积分定义为 $\int_0^t u_s dS_s^H = \delta^H(u1_{[0,t]})$. 显然, 散度在 L^2 中是闭的. 类似地, 我们也能够定义有关 S^H 的重积分 $I_n(f_n)$ ($f_n \in \mathcal{H}^{\otimes n}$), 并且下面的中心极限定理在文献 [30, 31] 中给出.

定理 2 假设 $\{I_p(n), n \geq 1\}$ 为一列 $p \geq 2$ 阶重积分, 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[I_p(n)^2] = \sigma^2 > 0,$$

则下列两个断言等价:

- (1) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $I_p(n)$ 依分布收敛到 $N(0, \sigma^2)$;
- (2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\|DI_p(n)\|_{\mathcal{H}}^2$ 在 $L^2(\Omega)$ 收敛到常数.

最后, 由文献 [2] 可知, 对二次连续可微函数 f , 若满足增长条件

$$\max\{|f(x)|, |f'(x)|, |f''(x)|\} \leq C_T e^{\lambda|x|^2}, \quad (2.8)$$

其中 c 为正常数使得 $\lambda < \frac{1}{4(2-2^{2H-1})} T^{-2H}$, 则有如下的 Itô 公式:

$$f(S_t^H) = f(0) + \int_0^t f'(S_s^H) dS_s^H + H\theta_H \int_0^t f''(S_s^H) s^{2H-1} ds,$$

其中 $\theta_H = 2 - 2^{2H-1}$.

3 一些基础估计

为了证明中心极限定理, 我们需要有关次分数 Brown 运动矩的一些基础估计, 这些估计能够揭示次分数 Brown 运动的内在性质. 对 $\varepsilon > 0$, $T > 0$ 和 $0 < H < 1$, 记

$$\Xi_\varepsilon(H, T) := \int_0^T ((S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)^2 - \varepsilon^{2H}) dt.$$

引理 1 对所有的 $0 < H < \frac{3}{4}$ 和 $T > 0$, 有

$$\frac{1}{\varepsilon^{2H+\frac{1}{2}}} \mathbb{E} \Xi_\varepsilon(H, T) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

证明 当 $0 < t < \varepsilon$ 时, 作变量替换 $x = \frac{t}{\varepsilon}$, 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)^2 - \varepsilon^{2H} &= (2t + \varepsilon)^{2H} - 2^{2H-1}(t + \varepsilon)^{2H} - 2^{2H-1}t^{2H} \\ &= \varepsilon^{2H}((2x + 1)^{2H} - 2^{2H-1}(x + 1)^{2H} - 2^{2H-1}x^{2H}); \end{aligned}$$

当 $0 < \varepsilon < t$ 时, 作变量替换 $x = \frac{\varepsilon}{t}$, 可得

$$\mathbb{E}(S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)^2 - \varepsilon^{2H} = t^{2H}((2 + x)^{2H} - 2^{2H-1}(x + 1)^{2H} - 2^{2H-1}).$$

因此, 对任意的 $0 < H < \frac{3}{4}$, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^{2H+\frac{1}{2}}} \Xi_\varepsilon(H, T) &= \frac{1}{\varepsilon^{2H+\frac{1}{2}}} \int_0^T ((S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)^2 - \varepsilon^{2H}) dt \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{2H+\frac{1}{2}}} \int_0^\varepsilon ((S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)^2 - \varepsilon^{2H}) dt + \frac{1}{\varepsilon^{2H+\frac{1}{2}}} \int_\varepsilon^T ((S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)^2 - \varepsilon^{2H}) dt \\ &= \sqrt{\varepsilon} \int_0^1 ((2x + 1)^{2H} - 2^{2H-1}(x + 1)^{2H} - 2^{2H-1}x^{2H}) dx \\ &\quad + \sqrt{\varepsilon} \int_{\varepsilon/T}^1 ((2 + x)^{2H} - 2^{2H-1}(x + 1)^{2H} - 2^{2H-1}) \frac{dx}{x^{2+2H}} \\ &= O(\sqrt{\varepsilon}) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}-2H}) \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

这是因为

$$(2 + x)^{2H} - 2^{2H-1}(x + 1)^{2H} - 2^{2H-1} \sim Cx^2, \quad x \rightarrow 0,$$

证毕. □

引理 2 假设 $H = \frac{3}{4}$ 并且 $T > 0$, 则有

$$\frac{1}{\varepsilon^2 \sqrt{-\log \varepsilon}} \mathbb{E} \Xi_\varepsilon\left(\frac{3}{4}, T\right) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

证明 此收敛性可由引理 1 得到. □

现在, 对所有的 $s, t, \varepsilon > 0$, 记

$$\mu_\varepsilon(t, s) := \mathbb{E}(S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H),$$

则当 $t > s > 0$ 时, 有

$$\mu_\varepsilon(t, s) = \frac{1}{2}(G_\varepsilon(1, t, s) + G_\varepsilon(2, t, s)), \quad (3.3)$$

其中

$$G_\varepsilon(1, t, s) := (t - s + \varepsilon)^{2H} + |t - s - \varepsilon|^{2H} - 2(t - s)^{2H},$$

并且

$$G_\varepsilon(2, t, s) := 2(t + s + \varepsilon)^{2H} - (t + s + 2\varepsilon)^{2H} - (t + s)^{2H}.$$

引理 3 对 $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 有

$$\frac{1}{\varepsilon^{4H+1}} \int_0^T dt \int_0^t (G_\varepsilon(1, t, s))^2 ds \rightarrow \frac{1}{4} \lambda_H T, \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^{4H+1}} \int_0^T dt \int_0^t (G_\varepsilon(2, t, s))^2 ds \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

证明 假设 $H \neq \frac{1}{2}$, 对所有的 $t > s > 0$, 作变量代换 $x = \frac{t-s}{\varepsilon}$, 可以得到

$$\begin{aligned} |G_\varepsilon(1, t, s)| &= |(\varepsilon - (t - s))^{2H} + (\varepsilon + t - s)^{2H} - 2(t - s)^{2H}| \\ &= \varepsilon^{2H} |(1 - x)^{2H} + (1 + x)^{2H} - 2x^{2H}| \leq C \varepsilon^{2H-2} (t - s)^2. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} A_\varepsilon(1, H) &:= \int_0^\varepsilon dt \int_0^t (G_\varepsilon(1, t, s))^2 ds \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\varepsilon dt \int_0^t |(\varepsilon - (t - s))^{2H} + (\varepsilon + t - s)^{2H} - 2(t - s)^{2H}|^2 ds \\ &= \frac{1}{4} \varepsilon^{4H+1} \int_0^\varepsilon dt \int_0^{t/\varepsilon} |(1 - x)^{2H} + (1 + x)^{2H} - 2x^{2H}|^2 dx \\ &\leq C \varepsilon^{4H+2}, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} A_\varepsilon(2, H) &:= \int_\varepsilon^T dt \int_{t-\varepsilon}^t (G_\varepsilon(1, t, s))^2 ds \\ &= \frac{1}{4} \varepsilon^{4H+1} \int_\varepsilon^T dt \int_0^1 ((1 - x)^{2H} + (1 + x)^{2H} - 2x^{2H})^2 dx \\ &= \frac{1}{4} (T - \varepsilon) \varepsilon^{4H+1} \int_0^1 ((1 - x)^{2H} + (1 + x)^{2H} - 2x^{2H})^2 dx, \end{aligned}$$

其中 $0 < \varepsilon < T$ 和 $T > 0$. 进一步, 作变量代换 $x = \frac{\varepsilon}{t-s}$, 我们也有

$$\begin{aligned} A_\varepsilon(3, H) &:= \int_\varepsilon^T dt \int_0^{t-\varepsilon} (G_\varepsilon(1, t, s))^2 ds \\ &= \frac{1}{4} \int_\varepsilon^T dt \int_0^{t-\varepsilon} ((t - s - \varepsilon)^{2H} + (t - s + \varepsilon)^{2H} - 2(t - s)^{2H})^2 ds \\ &= \frac{1}{4} \varepsilon^{4H+1} \int_\varepsilon^T dt \int_{\varepsilon/t}^1 \frac{((1 - x)^{2H} + (1 + x)^{2H} - 2)^2}{x^{2+4H}} dx, \end{aligned}$$

其中 $0 < \varepsilon < T$ 和 $T > 0$. 因此, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^{4H+1}} \int_0^T dt \int_0^t (G_\varepsilon(1, t, s))^2 ds &= \frac{1}{\varepsilon^{4H+1}} [A_\varepsilon(1, H) + A_\varepsilon(2, H) + A_\varepsilon(3, H)] \\ &\rightarrow \frac{1}{4} T \int_0^1 \left[((1-x)^{2H} + (1+x)^{2H} - 2x^{2H})^2 \right. \\ &\quad \left. + ((1-x)^{2H} + (1+x)^{2H} - 2)^2 \frac{1}{x^{2+4H}} \right] dx. \end{aligned}$$

这样 (3.4) 得证.

另一方面, 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1+x)^{2H} - (1+2x)^{2H} - 1}{x^2} = -2H(2H-1).$$

从而, 由连续性可得

$$\begin{aligned} |G_\varepsilon(2, t, s)| &= |2(t+s+\varepsilon)^{2H} - (t+s+2\varepsilon)^{2H} - (t+s)^{2H}| \\ &= (t+s)^{2H} |2(1+x)^{2H} - (1+2x)^{2H} - 1| \\ &\leq C(t+s)^{2H} x^2 = C \frac{\varepsilon^2}{(t+s)^{2-2H}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中 $x = \frac{\varepsilon}{t+s}$, 这意味着当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{1}{\varepsilon^{4H+1}} \int_0^T dt \int_0^t (G_\varepsilon(2, t, s))^2 ds \leq C \varepsilon^{3-4H} \int_0^T \int_0^t \frac{ds dt}{(t+s)^{4-4H}} \rightarrow 0.$$

于是, (3.5) 得证. □

引理 4 假设 $H = \frac{3}{4}$ 和 $T > 0$, 则有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{-\varepsilon^4 \log \varepsilon} \int_0^T dt \int_0^t (G_\varepsilon(1, t, s))^2 ds = \frac{9}{64} T, \quad (3.7)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{-\varepsilon^4 \log \varepsilon} \int_0^T dt \int_0^t (G_\varepsilon(2, t, s))^2 ds = 0. \quad (3.8)$$

证明 由引理 3 的证明可知, 当 $T > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{-\varepsilon^4 \log \varepsilon} \int_0^T dt \int_0^t (G_\varepsilon(1, t, s))^2 ds &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{-\varepsilon^4 \log \varepsilon} \left(A_\varepsilon\left(1, \frac{3}{4}\right) + A_\varepsilon\left(2, \frac{3}{4}\right) + A_\varepsilon\left(3, \frac{3}{4}\right) \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{-\varepsilon^4 \log \varepsilon} A_\varepsilon\left(3, \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{-\log \varepsilon} \int_\varepsilon^T dt \int_{\varepsilon/t}^1 \frac{((1-x)^{3/2} + (1+x)^{3/2} - 2)^2}{x^5} dx \\ &= \frac{9}{64} T, \end{aligned}$$

并且

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{-\varepsilon^4 \log \varepsilon} \int_0^T dt \int_0^t (G_\varepsilon(2, t, s))^2 ds \leq C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{-\log \varepsilon} \int_0^T \int_0^t \frac{ds dt}{t+s} = 0.$$

证毕. □

由引理 3 和 4, 我们可以立即得到, 当 $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ 时,

$$\frac{1}{\varepsilon^{4H+1}} \int_0^T dt \int_0^t (E(S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H))^2 ds \rightarrow \frac{1}{4} \lambda_H T, \quad \varepsilon \rightarrow 0; \quad (3.9)$$

并且当 $H = \frac{3}{4}$ 时,

$$\frac{1}{-\varepsilon^4 \log \varepsilon} \int_0^T dt \int_0^t (E(S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H))^2 ds \rightarrow \frac{9}{64} T, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

引理 5 对 $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, 有

$$\frac{1}{\varepsilon^{4H+1}} E|\Xi_\varepsilon(H, T)|^2 \rightarrow \lambda_H T, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.11)$$

证明 对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $s, t > 0$, 有

$$\begin{aligned} & E(S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)^2 (S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)^2 \\ &= E(S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)^2 E(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)^2 + 2(E(S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H))^2 \\ &= \left[\varepsilon^{2H} + \frac{1}{2} G_\varepsilon(2, t, t) \right] \left[\varepsilon^{2H} + \frac{1}{2} G_\varepsilon(2, s, s) \right] + 2(E(S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H))^2 \\ &= \varepsilon^{4H} + \frac{1}{2} \varepsilon^{2H} [G_\varepsilon(2, t, t) + G_\varepsilon(2, s, s)] + \frac{1}{4} G_\varepsilon(2, t, t) G_\varepsilon(2, s, s) + 2\mu_\varepsilon(t, s)^2. \end{aligned}$$

从而当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 由引理 3 可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^{4H+1}} E|\Xi_\varepsilon(H, T)|^2 \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{4H+1}} \int_0^T \int_0^T E((S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)^2 - \varepsilon^{2H})((S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)^2 - \varepsilon^{2H}) ds dt \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{4H+1}} \int_0^T \int_0^T \left(E(S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)^2 (S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)^2 - \varepsilon^{4H} - \frac{1}{2} \varepsilon^{2H} [G_\varepsilon(2, t, t) + G_\varepsilon(2, s, s)] \right) ds dt \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{4H+1}} \int_0^T \int_0^T \left(\frac{1}{4} G_\varepsilon(2, t, t) G_\varepsilon(2, s, s) + 2\mu_\varepsilon(t, s)^2 \right) ds dt \\ &= \frac{4}{\varepsilon^{4H+1}} \int_0^T \int_0^t (\mu_\varepsilon(t, s))^2 ds dt + \frac{1}{2\varepsilon^{4H+1}} \int_0^T \int_0^t G_\varepsilon(2, t, t) G_\varepsilon(2, s, s) ds dt \\ &\rightarrow \lambda_H T. \end{aligned}$$

证毕. □

引理 6 对 $H = \frac{3}{4}$, 有

$$\frac{1}{-\varepsilon^4 \log \varepsilon} E \left| \Xi_\varepsilon \left(\frac{3}{4}, T \right) \right|^2 \rightarrow \frac{9}{16} T, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.12)$$

证明 对 $H = \frac{3}{4}$, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 由引理 5 和 4 得

$$\frac{1}{-\varepsilon^4 \log \varepsilon} E \left| \Xi_\varepsilon \left(\frac{3}{4}, T \right) \right|^2 = \frac{-1}{\varepsilon^4 \log \varepsilon} \int_0^T \int_0^T E((S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)^2 - \varepsilon^{2H})((S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)^2 - \varepsilon^{2H}) ds dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-1}{\varepsilon^4 \log \varepsilon} \int_0^T \int_0^T \left(\mathbb{E}(S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)^2 (S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)^2 - \varepsilon^{4H} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \varepsilon^{2H} [G_\varepsilon(2, t, t) + G_\varepsilon(2, s, s)] \right) ds dt \\
 &= \frac{-1}{\varepsilon^4 \log \varepsilon} \int_0^T \int_0^T \left(\frac{1}{4} G_\varepsilon(2, t, t) G_\varepsilon(2, s, s) + 2\mu_\varepsilon(t, s)^2 \right) ds dt \\
 &= \frac{-4}{\varepsilon^4 \log \varepsilon} \int_0^T \int_0^t (\mu_\varepsilon(t, s))^2 ds dt + \frac{1}{-2\varepsilon^4 \log \varepsilon} \int_0^T \int_0^t G_\varepsilon(2, t, t) G_\varepsilon(2, s, s) ds dt \\
 &\rightarrow \frac{9}{16} T.
 \end{aligned}$$

证毕. □

引理 7 对 $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{1}{\varepsilon^{8H+2}} \int_{[0,1]^4} dt ds dt' ds' \mu_\varepsilon(t, s) \mu_\varepsilon(t', s') \mu_\varepsilon(s, t') \mu_\varepsilon(t, s') \rightarrow 0, \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^{8H+2}} \int_{[0,1]^4} dt ds dt' ds' \mu_\varepsilon(t, s) \mu_\varepsilon(t', s') \mu_\varepsilon(t, t') \mu_\varepsilon(s, s') \rightarrow 0. \quad (3.14)$$

证明 为了证明这个引理, 利用对称性可以假设 $t > s, t' > s', t > t'$. 记

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \{0 < s < t < T, 0 < s' < t' < T, t > t'\}.$$

为了简便, 取 $T = 1$. (3.13) 与 (3.14) 的收敛性类似, 我们仅需要证明 (3.13). 我们分解 $\mathcal{D}_\varepsilon$ 为

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \mathcal{D}_{1,\varepsilon} \cup \mathcal{D}_{2,\varepsilon} \cup \mathcal{D}_{3,\varepsilon},$$

其中 $\mathcal{D}_{1,\varepsilon} = \{t > s > t' > s' > 0\}$, $\mathcal{D}_{2,\varepsilon} = \{t > t' > s > s' > 0\}$, $\mathcal{D}_{3,\varepsilon} = \{t > t' > s' > s > 0\}$. 因此, 我们仅需证明当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{1}{\varepsilon^{8H+2}} \int_{\mathcal{D}_{j,\varepsilon}} dt ds dt' ds' \mu_\varepsilon(t, s) \mu_\varepsilon(t', s') \mu_\varepsilon(s, t') \mu_\varepsilon(t, s') \rightarrow 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.15)$$

又因为 (3.15) 的证明对 $j = 1, 2, 3$ 类似, 所以仅证明 $j = 1$ 的情形.

考虑分解

$$\mathcal{D}_{1,\varepsilon} = \mathcal{D}_{1,\varepsilon}(1) \cup \mathcal{D}_{1,\varepsilon}(2) \cup \mathcal{D}_{1,\varepsilon}(3),$$

其中

$$\mathcal{D}_{1,\varepsilon}(1) := \{t - s > \varepsilon, s - t' > \varepsilon, t' - s' > \varepsilon, s' > \varepsilon\},$$

$$\mathcal{D}_{1,\varepsilon}(2) := \{t - s \leq \varepsilon, s - t' \leq \varepsilon, t' - s' \leq \varepsilon, s' \leq \varepsilon\},$$

$$\mathcal{D}_{1,\varepsilon}(3) := \mathcal{D}_{1,\varepsilon} - \mathcal{D}_{1,\varepsilon}(1) \cup \mathcal{D}_{1,\varepsilon}(2).$$

注意到对 $t > s > 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned}
 G_\varepsilon(1, t, s) &= \frac{1}{2} ((t - s + \varepsilon)^{2H} + |t - s - \varepsilon|^{2H} - 2(t - s)^{2H}), \\
 G_\varepsilon(2, t, s) &= \frac{1}{2} (2(t + s + \varepsilon)^{2H} - (t + s + 2\varepsilon)^{2H} - (t + s)^{2H}).
 \end{aligned}$$

对所有的 $(s, t, s', t') \in \mathcal{D}_{1,\varepsilon}(1)$, 利用变量替换

$$t - s = \frac{\varepsilon}{x_1}, \quad s - t' = \frac{\varepsilon}{x_2}, \quad t' - s' = \frac{\varepsilon}{x_3}, \quad s' = \frac{\varepsilon}{x_4}$$

和 (3.6), 我们得到 Jacobi 行列式 $J = \left| \frac{\partial(t, s, t', s')}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)} \right| = \varepsilon^4 (x_1 x_2 x_3 x_4)^{-2}$ 以及下面的估计:

$$\begin{aligned} |G_\varepsilon(1, t, s)| + |G_\varepsilon(2, t, s)| &\leq C\varepsilon^{2H} x_1^{2-2H}, \quad |G_\varepsilon(1, s, t')| + |G_\varepsilon(2, s, t')| \leq C\varepsilon^{2H} x_2^{2-2H}, \\ |G_\varepsilon(1, t', s')| + |G_\varepsilon(2, t', s')| &\leq C\varepsilon^{2H} x_3^{2-2H}, \quad |G_\varepsilon(2, t, s')| \leq C\varepsilon^{2H} x_4^{2-2H}, \\ |G_\varepsilon(1, t, s')| &= \frac{(t - s')^{2H}}{2} \left| \left(1 - \frac{\varepsilon}{t - s'}\right)^{2H} + \left(1 + \frac{\varepsilon}{t - s'}\right)^{2H} - 2 \right| \\ &\leq C\varepsilon^{2H} \left(\frac{x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3} \right)^{2-2H} \leq C\varepsilon^{2H} x_1^{2-2H}. \end{aligned}$$

因此, $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon^{8H+2}} \int_{\mathcal{D}_{1,\varepsilon}(1)} dt ds dt' ds' \mu_\varepsilon(t, s) \mu_\varepsilon(t', s') \mu_\varepsilon(s, t') \mu_\varepsilon(t, s') \\ &\leq \varepsilon^2 C \int_{[\varepsilon, 1]^4} \frac{dx_1 dx_2 dx_3 dx_4}{(x_1)^{4H-2} (x_2)^{2H} (x_3)^{2H} (x_4)^2} \leq C\varepsilon(\varepsilon^{1-2H} - 1)^2 \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

对 $(s, t, s', t') \in \mathcal{D}_{1,\varepsilon}(2)$, 利用变量替换

$$x_1 = \frac{t - s}{\varepsilon}, \quad x_2 = \frac{s - t'}{\varepsilon}, \quad x_3 = \frac{t' - s'}{\varepsilon}, \quad x_4 = \frac{s'}{\varepsilon}$$

和 (3.6), 我们能得到 Jacobi 行列式 $J = \left| \frac{\partial(t, s, t', s')}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)} \right| = \varepsilon^4$ 以及如下的估计:

$$\begin{aligned} |G_\varepsilon(1, t, s)| &= \frac{1}{2} \varepsilon^{2H} ((1 + x_1)^{2H} + (1 - x_1)^{2H} - 2x_1^{2H}) \leq C\varepsilon^{2H}, \\ |G_\varepsilon(1, s, t')| &\leq C\varepsilon^{2H}, \quad |G_\varepsilon(1, t', s')| \leq C\varepsilon^{2H}, \\ |G_\varepsilon(1, t, s')| &= \frac{1}{2} \varepsilon^{2H} |(1 - (x_1 + x_2 + x_3))^{2H} + (1 + (x_1 + x_2 + x_3))^{2H} - 2(x_1 + x_2 + x_3)^{2H}| \leq C\varepsilon^{2H}, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} |G_\varepsilon(2, t, s)| &= \frac{1}{2} \varepsilon^{2H} |2(x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 1)^{2H} - (x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2)^{2H} \\ &\quad - (x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4)^{2H}| \\ &\leq C\varepsilon^{2H}, \\ |G_\varepsilon(2, s, t')| &= \frac{1}{2} \varepsilon^{2H} |2(x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 1)^{2H} - (x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2)^{2H} \\ &\quad - (x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4)^{2H}| \\ &\leq C\varepsilon^{2H}, \\ |G_\varepsilon(2, t', s')| &\leq C\varepsilon^{2H}, \\ |G_\varepsilon(2, t, s')| &= \frac{1}{2} \varepsilon^{2H} |2(x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 1)^{2H} - (x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2)^{2H} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - (x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4)^{2H} | \\ & \leq C\varepsilon^{2H} \end{aligned}$$

对任意的 $x_i \in (0, 1)$ 和 $x_1 + x_2 + x_3 \in (0, 1)$ 成立. 因此, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{1}{\varepsilon^{8H+2}} \int_{\mathcal{D}_{1,\varepsilon}(2)} dt ds dt' ds' \mu_\varepsilon(t, s) \mu_\varepsilon(t', s') \mu_\varepsilon(s, t') \mu_\varepsilon(t, s') \leq \varepsilon^2 C \int_{[0,1]^4} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \rightarrow 0.$$

类似地, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 有

$$\frac{1}{\varepsilon^{8H+2}} \int_{\mathcal{D}_{1,\varepsilon}(3)} dt ds dt' ds' \mu_\varepsilon(t, s) \mu_\varepsilon(t', s') \mu_\varepsilon(s, t') \mu_\varepsilon(t, s') \rightarrow 0,$$

因此 (3.15) 成立, 引理得证. $\square$

引理 8 对 $H = \frac{3}{4}$, 当 $\varepsilon > 0$ 时,

$$\frac{1}{\varepsilon^8 (\log \varepsilon)^2} \int_{[0,1]^4} dt ds dt' ds' \mu_\varepsilon(t, s) \mu_\varepsilon(t', s') \mu_\varepsilon(s, t') \mu_\varepsilon(t, s') \rightarrow 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^8 (\log \varepsilon)^2} \int_{[0,1]^4} dt ds dt' ds' \mu_\varepsilon(t, s) \mu_\varepsilon(t', s') \mu_\varepsilon(t, t') \mu_\varepsilon(s, s') \rightarrow 0. \quad (3.17)$$

证明 由引理 7 的证明, 我们可以建立这个引理. $\square$

引理 9 假设 $t > s > t' > s' > 0$ 和 $r > 0$. 当 $0 < H < \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\mathbb{E}[(S_t^H - S_s^H) S_r^H] \leq C(t - s)^{2H}, \quad (3.18)$$

$$\mathbb{E}[(S_t^H - S_s^H)(S_{t'}^H - S_{s'}^H)] \leq \frac{(t' - s')^{2H}(t - s)^{2H}}{(s - t')^{2H}}; \quad (3.19)$$

当 $\frac{1}{2} < H < 1$ 时, 有

$$\mathbb{E}[(S_t^H - S_s^H) S_r^H] \leq C(t - s), \quad (3.20)$$

$$\mathbb{E}[(S_t^H - S_s^H)(S_{t'}^H - S_{s'}^H)] \leq \frac{(t' - s')(t - s)}{(s - t')^{2-2H}}. \quad (3.21)$$

证明 $0 < H < \frac{1}{2}$ 的情形参见文献 [11], 类似地可以证明 $\frac{1}{2} < H < 1$ 的情形. $\square$

4 定理 1 的证明

本节给出中心极限定理 1 的证明. 回顾 $\Xi_\varepsilon(H) = \{\Xi_\varepsilon(H, t), 0 \leq t \leq T\}$, 其中 $\varepsilon > 0, 0 < H < 1, T > 0$,

$$\Xi_\varepsilon(H, t) = \int_0^t ((S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)^2 - \varepsilon^{2H}) ds.$$

为了证明定理成立, 我们需要验证如下的断言:

- (i) 若 $0 < H < \frac{3}{4}$, 则 $\{\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2H+\frac{1}{2}}}} \Xi_\varepsilon(H), \varepsilon \in (0, 1)\}$ 在空间 $C[0, T]$ 中是紧的.
- (ii) 若 $0 < H < \frac{3}{4}$, 则当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\{\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2H+\frac{1}{2}}}} \Xi_\varepsilon(H)\}$ 依分布收敛到 $\sqrt{\lambda_H} B$, 其中 B 为 Brown 运动.
- (iii) $\{\frac{1}{\varepsilon^2 \sqrt{-\log \varepsilon}} \Xi_\varepsilon(\frac{3}{4}), \varepsilon \in (0, 1)\}$ 在空间 $C[0, T]$ 中是紧的.

(iv) 若 $H = \frac{3}{4}$, 则当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\{\frac{1}{\varepsilon^2\sqrt{-\log \varepsilon}}\Xi_\varepsilon(\frac{3}{4})\}$ 依分布收敛到 $\frac{3}{4}W$, 其中 W 为 Brown 运动.

断言 (i) 和 (iii) 是显然的. 事实上, 由文献 [32, 定理 15.6], 我们仅需证明存在非减函数 F 与一个常数 $\kappa > 1$ 使得, 对任意的 $0 < r < s < t \leq T$ 和 $0 < H < \frac{3}{4}$, 估计

$$\frac{1}{\varepsilon^{4H+1}}\mathbb{E}[|\Xi_\varepsilon(H, t) - \Xi_\varepsilon(H, s)|^2] \leq C|F(t) - F(s)|^\kappa, \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^{4H+1}}\mathbb{E}[|\Xi_\varepsilon(H, s) - \Xi_\varepsilon(H, r)||\Xi_\varepsilon(H, t) - \Xi_\varepsilon(H, s)|] \leq C|F(t) - F(r)|^\kappa \quad (4.2)$$

成立. 据此, 对任意的 $0 < r < s < t \leq T$ 和 $0 < H < \frac{3}{4}$, 从引理 3 的证明可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^{4H+1}}\mathbb{E}[|\Xi_\varepsilon(H, t) - \Xi_\varepsilon(H, s)|^2] \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{4H+1}} \int_s^t \int_s^t \mathbb{E}((S_{x+\varepsilon}^H - S_x^H)^2 - \varepsilon^{2H})((S_{y+\varepsilon}^H - S_y^H)^2 - \varepsilon^{2H})dxdy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{4H+1}} \int_s^t \int_s^t \left(\mathbb{E}(S_{x+\varepsilon}^H - S_x^H)^2(S_{y+\varepsilon}^H - S_y^H)^2 - \varepsilon^{4H} - \frac{1}{2}\varepsilon^{2H}[G_\varepsilon(2, x, x) + G_\varepsilon(2, y, y)] \right) dxdy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{4H+1}} \int_s^t \int_s^t \left(\frac{1}{4}G_\varepsilon(2, x, x)G_\varepsilon(2, y, y) + 2\mu_\varepsilon(x, y)^2 \right) dxdy \\ &= \frac{4}{\varepsilon^{4H+1}} \int_s^t \int_s^x (\mu_\varepsilon(x, y))^2 dxdy + \frac{1}{2\varepsilon^{4H+1}} \int_s^t \int_s^x G_\varepsilon(2, x, x)G_\varepsilon(2, y, y)dxdy. \end{aligned}$$

这样, 类似于引理 3 的证明, 我们能够获得

$$\frac{1}{\varepsilon^{4H+1}} \int_s^t \int_s^x [\mu_\varepsilon(x, y)]^2 dxdy \leq C(t-s)^{4(1-H)},$$

以及

$$\frac{1}{\varepsilon^{4H+1}} \int_s^t \int_s^x G_\varepsilon(2, x, x)G_\varepsilon(2, y, y)dxdy \leq C(t-s)^{4(1-H)}.$$

从而 (4.1) 成立, 这是因为当 $0 < H < \frac{3}{4}$ 时, $4(1-H) > 1$. 进一步地, 利用 Cauchy-Schwartz 不等式和 (4.1), 可得 (4.2) 成立, 这个证明断言 (i) 成立. 类似地, 我们可以证明断言 (iii).

现在, 我们将断言 (ii) 和 (iv) 的证明转化为下面两个引理.

引理 10 假设 S^H 为一个次分数 Brown 运动.

(1) 当 $0 < H < \frac{3}{4}$ 时, 对任意的 $t \in [0, T]$, 有

$$\frac{1}{\varepsilon^{2H+\frac{1}{2}}} \int_0^t ((S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)^2 - \varepsilon^{2H})ds \rightarrow N(0, \lambda_H t), \quad \varepsilon \rightarrow 0; \quad (4.3)$$

(2) 当 $H = \frac{3}{4}$ 时, 对任意的 $t \in [0, T]$, 有

$$\frac{1}{\varepsilon^2\sqrt{-\log \varepsilon}} \int_0^t ((S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)^2 - \varepsilon^{2H})ds \rightarrow N\left(0, \frac{9}{16}t\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.4)$$

证明 显然, 对任意的 $t \in [0, T]$ 和 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned} (S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)^2 - \varepsilon^{2H} &= \int_s^{s+\varepsilon} \int_s^{s+\varepsilon} dS_{r_1}^H dS_{r_2}^H + \frac{1}{2}G_\varepsilon(2, s, s) \\ &= \int_0^T \int_0^T 1_{[s, s+\varepsilon]}(r_1)1_{[s, s+\varepsilon]}(r_2)dS_{r_1}^H dS_{r_2}^H + \frac{1}{2}G_\varepsilon(2, s, s), \end{aligned}$$

以及

$$\Xi_\varepsilon(H, t) = \int_0^t ((S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)^2 - \varepsilon^{2H}) ds = I_2(f_\varepsilon(\cdot, t)) + \frac{1}{2} \int_0^t G_\varepsilon(2, s, s) ds,$$

其中, 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $t \in [0, T]$, 函数

$$f_\varepsilon(r, t) = f_\varepsilon(r_1, r_2, t) = \int_0^t 1_{[s, s+\varepsilon]}(r_1) 1_{[s, s+\varepsilon]}(r_2) ds, \quad r = (r_1, r_2) \in [0, T]^2$$

是对称的. 我们将分 4 步完成这个证明.

第 1 步 假设 $\frac{1}{2} < H < \frac{3}{4}$, 由引理 5 和定理 2, 我们仅需证明当 $\varepsilon > 0$ 时, $\|D^H \Xi_\varepsilon(H, t)\|_{\mathcal{H}}^2$ 在均方意义下收敛于一常数即可, 即当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 对所有的 $\frac{1}{2} < H < \frac{3}{4}$ 和 $t \in [0, T]$, 有

$$\frac{1}{\varepsilon^{8H+2}} \mathbb{E}(\|D^H \Xi_\varepsilon(H, t)\|_{\mathcal{H}}^2 - \mathbb{E}\|D^H \Xi_\varepsilon(H, t)\|_{\mathcal{H}}^2)^2 \rightarrow 0. \quad (4.5)$$

利用函数 $(r_1, r_2) \mapsto f_\varepsilon(r_1, r_2)$ 的对称性, 对所有的 $\varepsilon > 0$ 和 $0 \leq s \leq t \leq T$, 可得

$$\begin{aligned} D_s^H \Xi_\varepsilon(H, t) &= D_s^H I_2(f_\varepsilon) = 2D_s^H \int_0^t \int_0^{r_1} f_\varepsilon(r_1, r_2, t) dS_{r_2}^H dS_{r_1}^H \\ &= 2 \left(\int_0^s f_\varepsilon(s, r_2, t) dS_{r_2}^H + \int_s^t f_\varepsilon(r_1, s, t) dS_{r_1}^H \right) \\ &= 2 \int_0^t f_\varepsilon(s, u, t) dS_u^H = 2 \int_0^t \left(\int_0^t 1_{[r, r+\varepsilon]}(s) 1_{[r, r+\varepsilon]}(u) dr \right) dS_u^H \\ &= 2 \int_0^t 1_{[r, r+\varepsilon]}(s) \left(\int_0^t 1_{[r, r+\varepsilon]}(u) dS_u^H \right) dr \\ &= 2 \int_0^t 1_{[r, r+\varepsilon]}(s) (S_{r+\varepsilon}^H - S_r^H) dr. \end{aligned}$$

据此, 对所有的 $\varepsilon > 0$ 和 $0 \leq s \leq t \leq T$, 有

$$\begin{aligned} \|D^H \Xi_\varepsilon(H, t)\|_{\mathcal{H}}^2 &= 4 \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t (S_{r+\varepsilon}^H - S_r^H)(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H) 1_{[r, r+\varepsilon]}(x) 1_{[s, s+\varepsilon]}(y) \phi(x, y) dr ds dx dy \\ &= 4 \int_0^t \int_0^t (S_{r+\varepsilon}^H - S_r^H)(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H) dr ds \int_0^t \int_0^t 1_{[r, r+\varepsilon]}(x) 1_{[s, s+\varepsilon]}(y) \phi(x, y) dx dy \\ &= 4 \int_0^t \int_0^t (S_{r+\varepsilon}^H - S_r^H)(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H) \mu_\varepsilon(r, s) dr ds. \end{aligned}$$

这样, 引理 5 蕴含, 对所有的 $\frac{1}{2} < H < \frac{3}{4}$ 和 $t \in [0, T]$, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^{4H+1}} \mathbb{E}\|D^H \Xi_\varepsilon(H, t)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \frac{4}{\varepsilon^{4H+1}} \int_0^t \int_0^t (\mathbb{E}[(S_{r+\varepsilon}^H - S_r^H)(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)])^2 dr ds \\ &\rightarrow 8\lambda_H = 2 \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}|\Xi_\varepsilon(H, t)|^2, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

记

$$\Delta_\varepsilon S_r^H := S_{r+\varepsilon}^H - S_r^H, \quad r, \varepsilon > 0.$$

从而, 对所有的 $T > 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 下面等式成立:

$$\mathbb{E}(\|D^H \Xi_\varepsilon(H, t)\|_{\mathcal{H}}^2 - \mathbb{E}\|D^H \Xi_\varepsilon(H, t)\|_{\mathcal{H}}^2)^2$$

$$\begin{aligned}
&= 16 \int_{[0,t]^4} dr ds dr' ds' \mu_\varepsilon(r, s) \mu_\varepsilon(r', s') E[(\Delta_\varepsilon S_r^H \Delta_\varepsilon S_s^H - \mu_\varepsilon(r, s))(\Delta_\varepsilon S_{r'}^H \Delta_\varepsilon S_{s'}^H - \mu_\varepsilon(r', s'))] \\
&= 16 \int_{[0,t]^4} dr ds dr' ds' \mu_\varepsilon(r, s) \mu_\varepsilon(r', s') (E[\Delta_\varepsilon S_r^H \Delta_\varepsilon S_s^H \Delta_\varepsilon S_{r'}^H \Delta_\varepsilon S_{s'}^H] - \mu_\varepsilon(r, s) \mu_\varepsilon(r', s')). \quad (4.6)
\end{aligned}$$

注意, 对所有的 $s, t, s', t' > 0$, $\varepsilon > 0$ 和 $\frac{1}{2} < H < 1$, 利用 Malliavin 变分和对偶关系可获得

$$\begin{aligned}
E[\Delta_\varepsilon S_r^H \Delta_\varepsilon S_s^H \Delta_\varepsilon S_{r'}^H \Delta_\varepsilon S_{s'}^H] &= E\left(\Delta_\varepsilon S_r^H \Delta_\varepsilon S_s^H \Delta_\varepsilon S_{r'}^H \int_0^1 1_{[s', s'+\varepsilon]}(x) dS_x^H\right) \\
&= E[\langle D^H(\Delta_\varepsilon S_r^H \Delta_\varepsilon S_s^H \Delta_\varepsilon S_{r'}^H), 1_{[s', s'+\varepsilon]} \rangle_{\mathcal{H}}] \\
&= E[\Delta_\varepsilon S_s^H \Delta_\varepsilon S_{r'}^H \langle D^H(\Delta_\varepsilon S_r^H), 1_{[s', s'+\varepsilon]} \rangle_{\mathcal{H}}] \\
&\quad + E[\Delta_\varepsilon S_r^H \Delta_\varepsilon S_{r'}^H \langle D^H(\Delta_\varepsilon S_s^H), 1_{[s', s'+\varepsilon]} \rangle_{\mathcal{H}}] \\
&\quad + E[\Delta_\varepsilon S_r^H \Delta_\varepsilon S_s^H \langle D^H(\Delta_\varepsilon S_{r'}^H), 1_{[s', s'+\varepsilon]} \rangle_{\mathcal{H}}] \\
&= E[\Delta_\varepsilon S_s^H \Delta_\varepsilon S_{r'}^H] E[\Delta_\varepsilon S_r^H \Delta_\varepsilon S_{s'}^H] + E[\Delta_\varepsilon S_t^H \Delta_\varepsilon S_{r'}^H] E[\Delta_\varepsilon S_s^H \Delta_\varepsilon S_{s'}^H] \\
&\quad + E[\Delta_\varepsilon S_r^H \Delta_\varepsilon S_s^H] E[\Delta_\varepsilon S_{r'}^H \Delta_\varepsilon S_{s'}^H] \\
&= \mu_\varepsilon(s, r') \mu_\varepsilon(r, s') + \mu_\varepsilon(r, r') \mu_\varepsilon(s, s') + \mu_\varepsilon(r, s) \mu_\varepsilon(r', s').
\end{aligned}$$

据此, 从 (4.6) 和引理 7, 我们看到, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon^{8H+2}} E(\|D^H \Xi_\varepsilon(H, t)\|_{\mathcal{H}}^2 - E\|D^H \Xi_\varepsilon(H, t)\|_{\mathcal{H}}^2)^2 \\
&= \frac{16}{\varepsilon^{8H+2}} \int_{[0,t]^4} dr ds dr' ds' \mu_\varepsilon(r, s) \mu_\varepsilon(r', s') (\mu_\varepsilon(s, r') \mu_\varepsilon(r, s') + \mu_\varepsilon(r, r') \mu_\varepsilon(s, s')) \\
&\rightarrow 0.
\end{aligned}$$

这样, 我们证明了收敛性

$$\frac{1}{\varepsilon^{2H+\frac{1}{2}}} \Xi_\varepsilon(H, t) \rightarrow N(0, \lambda_H t), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

对所有的 $\frac{1}{2} < H < \frac{3}{4}$ 成立, 因此 (4.3) 成立.

第 2 步 我们证明当 $0 < H < \frac{1}{2}$ 时, (4.3) 也成立. 从第 1 步, 对所有的 $\varepsilon > 0$ 和 $s \in [0, t]$, 我们已经发现

$$f_\varepsilon(s) := D_s^H \Xi_\varepsilon(H, t) = 2 \int_0^t 1_{[r, r+\varepsilon]}(s) (S_{r+\varepsilon}^H - S_r^H) dr,$$

并且

$$\begin{aligned}
\varphi_{f_\varepsilon}(s) &= I_{t-, 2, \frac{3-2H}{4}}^{H-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2^{H-\frac{1}{2}}} u^{H-\frac{1}{2}} f_\varepsilon \right)(s) \\
&= I_{t-, 2, \frac{3-2H}{4}}^{H-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2^{H-\frac{1}{2}}} u^{H-\frac{1}{2}} 2 \int_0^t 1_{[r, r+\varepsilon]}(\cdot) (S_{r+\varepsilon}^H - S_r^H) dr \right)(s) \\
&= 2 \int_0^t (S_{r+\varepsilon}^H - S_r^H) \left(I_{t-, 2, \frac{3-2H}{4}}^{H-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2^{H-\frac{1}{2}}} u^{H-\frac{1}{2}} 1_{[r, r+\varepsilon]}(\cdot) \right)(s) \right) dr.
\end{aligned}$$

注意到

$$\mu_\varepsilon(t_1, t_2) = E(S_{t_1+\varepsilon}^H - S_{t_1}^H)(S_{t_2+\varepsilon}^H - S_{t_2}^H)$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{E} \left(\int_0^t 1_{[t_1, t_1+\varepsilon]}(x) dS_x^H \int_0^t 1_{[t_2, t_2+\varepsilon]}(y) dS_y^H \right) \\
 &= \mathbb{E} \int_0^t I_{t-, 2, \frac{3-2H}{4}}^{H-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2^{H-\frac{1}{2}}} u^{H-\frac{1}{2}} 1_{[t_1, t_1+\varepsilon]}(\cdot) \right) (x) dB_x \\
 &\quad \times \int_0^t I_{t-, 2, \frac{3-2H}{4}}^{H-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2^{H-\frac{1}{2}}} u^{H-\frac{1}{2}} 1_{[t_2, t_2+\varepsilon]}(\cdot) \right) (y) dB_y \\
 &= \int_0^t \left(I_{t-, 2, \frac{3-2H}{4}}^{H-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2^{H-\frac{1}{2}}} u^{H-\frac{1}{2}} 1_{[t_1, t_1+\varepsilon]}(\cdot) \right) (s) \right) \\
 &\quad \times \left(I_{t-, 2, \frac{3-2H}{4}}^{H-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2^{H-\frac{1}{2}}} u^{H-\frac{1}{2}} 1_{[t_2, t_2+\varepsilon]}(\cdot) \right) (s) \right) ds,
 \end{aligned}$$

我们看到, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 等式

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E}(\|D^H \Xi_\varepsilon(H, t)\|_{\mathcal{H}}^2) \\
 &= \mathbb{E} \int_0^t [\varphi_{f_\varepsilon}(s)]^2 ds \\
 &= 4 \int_0^t \int_0^t dt_1 dt_2 \mathbb{E}(S_{t_1+\varepsilon}^H - S_{t_1}^H)(S_{t_2+\varepsilon}^H - S_{t_2}^H) \int_0^t \left(I_{t-, 2, \frac{3-2H}{4}}^{H-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2^{H-\frac{1}{2}}} u^{H-\frac{1}{2}} 1_{[t_1, t_1+\varepsilon]}(\cdot) \right) (s) \right) \\
 &\quad \times \left(I_{t-, 2, \frac{3-2H}{4}}^{H-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2^{H-\frac{1}{2}}} u^{H-\frac{1}{2}} 1_{[t_2, t_2+\varepsilon]}(\cdot) \right) (s) \right) ds \\
 &= 4 \int_0^t \int_0^t \mu_\varepsilon(t_1, t_2)^2 dt_1 dt_2
 \end{aligned}$$

成立, 这意味着由引理 5, 对所有的 $0 < H < \frac{1}{2}$, 收敛性

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\varepsilon^{4H+1}} \mathbb{E} \|D^H \Xi_\varepsilon(H, t)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \frac{4}{\varepsilon^{4H+1}} \int_0^t \int_0^t (\mathbb{E}[(S_{r+\varepsilon}^H - S_r^H)(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)])^2 dr ds \\
 &\rightarrow 8\lambda_H = 2 \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E} |\Xi_\varepsilon(H, t)|^2, \quad \varepsilon \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

成立. 因此类似于第 1 步, 我们能证明

$$\frac{1}{\varepsilon^{2H+\frac{1}{2}}} \Xi_\varepsilon(H, t) \rightarrow N(0, \lambda_H t), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

对所有的 $0 < H < \frac{1}{2}$ 成立, 因此 (4.3) 成立.

第 3 步 当 $H = \frac{1}{2}$ 时, (4.3) 的收敛性是显然的.

第 4 步 我们证明当 $H = \frac{3}{4}$ 时 (4.4) 成立. 类似第 1 步, 我们有

$$\Xi_\varepsilon\left(\frac{3}{4}, t\right) = I_2(f_\varepsilon(\cdot, t)) + \frac{1}{2} \int_0^t G_\varepsilon(2, r, r) dr,$$

并且

$$D_s^H \Xi_\varepsilon\left(\frac{3}{4}, t\right) = 2 \int_0^t 1_{[r, r+\varepsilon]}(s) (S_{r+\varepsilon}^H - S_r^H) dr$$

对所有的 $\varepsilon > 0$ 和 $s \in [0, 1]$ 成立. 进一步地, 对 $\varepsilon > 0$, 利用引理 5, 有

$$\left\| D^H \Xi_\varepsilon\left(\frac{3}{4}, t\right) \right\|_{\mathcal{H}}^2 = 4 \int_0^t \int_0^t (S_{r+\varepsilon}^H - S_r^H)(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H) \mu_\varepsilon(r, s) dr ds,$$

据此, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{-\varepsilon^4 \log \varepsilon} \mathbb{E} \left\| D^H \Xi_\varepsilon \left(\frac{3}{4}, t \right) \right\|_{\mathcal{H}}^2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4}{-\varepsilon^4 \log \varepsilon} \int_0^t \int_0^t (\mathbb{E}[(S_{r+\varepsilon}^H - S_r^H)(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)])^2 dr ds \\ &= \frac{9}{8} t = 2 \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E} \left| \Xi_\varepsilon \left(\frac{3}{4}, t \right) \right|^2.\end{aligned}$$

当 $\varepsilon > 0$ 时, 由 (4.6) 和引理 8 可以验证

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\varepsilon^8 (\log \varepsilon)^2} \mathbb{E} \left(\left\| D^H \Xi_\varepsilon \left(\frac{3}{4}, t \right) \right\|_{\mathcal{H}}^2 - \mathbb{E} \left\| D^H \Xi_\varepsilon \left(\frac{3}{4}, t \right) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \right)^2 \\ &= \frac{C}{\varepsilon^8 (\log \varepsilon)^2} \int_{[0, t]^4} dr ds dr' ds' \mu_\varepsilon(r, s) \mu_\varepsilon(r', s') (\mu_\varepsilon(s, r') \mu_\varepsilon(r, s') + \mu_\varepsilon(r, r') \mu_\varepsilon(s, s')) \\ &\rightarrow 0.\end{aligned}$$

再结合定理 2, 我们获得收敛性 (4.4). □

引理 11 假设 S^H 为 Hurst 指数为 $H \in (0, 1)$ 的次分数 Brown 运动.

(1) 对于 $0 < H < \frac{3}{4}$, 记

$$\Upsilon_\varepsilon(H, t) := \frac{1}{\varepsilon^{2H+\frac{1}{2}}} \int_0^t ((S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)^2 - \varepsilon^{2H}) ds, \quad t \in [0, T], \quad \varepsilon \in (0, 1),$$

则对 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq T$, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $(\Upsilon_\varepsilon(H, t_1), \Upsilon_\varepsilon(H, t_2), \dots, \Upsilon_\varepsilon(H, t_n))$ 依分布收敛到 $\sqrt{\lambda_H}(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$.

(2) 对 $H = \frac{3}{4}$, 记

$$\Upsilon_\varepsilon\left(\frac{3}{4}, t\right) := \frac{1}{\varepsilon^2 \sqrt{-\log \varepsilon}} \int_0^t ((S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)^2 - \varepsilon^{2H}) ds, \quad t \in [0, T], \quad \varepsilon \in (0, 1),$$

则对 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq T$, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $(\Upsilon_\varepsilon(3/4, t_1), \Upsilon_\varepsilon(3/4, t_2), \dots, \Upsilon_\varepsilon(3/4, t_n))$ 依分布收敛到 $\frac{3}{4}(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_n})$.

证明 对第一个结论, 我们只需证明对任意的 $0 \neq (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\Upsilon_\varepsilon(H) := \sum_{j=1}^n a_j \Upsilon_\varepsilon(H, t_j)$$

收敛于方差为 $\lambda_H \mathbb{E}(\sum_{j=1}^n a_j B_{t_j})^2$ 的中心正态随机变量. 显然对 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned}\Upsilon_\varepsilon(H) &= \frac{1}{\varepsilon^{2H+\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^n a_j \left(I_2(f_\varepsilon(\cdot, t_j)) + \frac{1}{2} \int_0^{t_j} G_\varepsilon(2, s, s) ds \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{2H+\frac{1}{2}}} I_2 \left(\sum_{j=1}^n a_j f_\varepsilon(\cdot, t_j) \right) + \frac{1}{2\varepsilon^{2H+\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^n a_j \int_0^{t_j} G_\varepsilon(2, s, s) ds.\end{aligned}$$

因此, 与引理 4 的证明类似, 我们可以建立第一个结论, 类似地也可以证明第二个结论成立. □

5 次分数 O-U 过程的一个参数估计

作为定理 1 的应用, 本节研究次分数 O-U 过程

$$X_t^H = X_0^H + \sigma S_t^H - \beta \int_0^t X_s^H ds, \quad t \in [0, T] \quad (5.1)$$

中 σ^2 的参数估计, 其中 $\frac{1}{2} < H < 1$. 显然, (5.1) 的解能够表示为

$$X_t^H = X_0^H + \sigma \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dS_s^H. \quad (5.2)$$

首先考虑所谓次分数 O-U 过程的 (分数) 二次变差. 对随机过程 (5.1), 我们定义广义 (分数) 二次变差 $[X^H, X^H]^{(H)}$ 如下:

$$[X^H, X^H]_t^{(H)} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{2H}} \int_0^t (X_{s+\varepsilon}^H - X_s^H)^2 ds, \quad t \in [0, T],$$

这里假设极限是 $L^1(\Omega)$ 意义下的. 这个定义的思想来自于文献 [11, 33].

引理 12 ^[11] 假设 $0 < H < 1$, 则对所有 $t \geq 0$, 在 $L^2(\Omega)$ 收敛的意义下, 有

$$\frac{1}{\varepsilon^{2H}} \int_0^t (S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)^2 ds \rightarrow t. \quad (5.3)$$

命题 1 假设 $0 < H < 1$, 则对所有的 $t \in [0, T]$, 有

$$[X^H, X^H]_t^{(H)} = \sigma^2 t. \quad (5.4)$$

证明 对所有的 $s > 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 由 (5.1) 可以看到

$$\begin{aligned} (X_{s+\varepsilon}^H - X_s^H)^2 &= \left(\sigma(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H) - \beta \int_s^{s+\varepsilon} X_u^H du \right)^2 \\ &= \sigma^2 (S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)^2 + \beta^2 \left(\int_s^{s+\varepsilon} X_u^H du \right)^2 - 2\sigma\beta (S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H) \int_s^{s+\varepsilon} X_u^H du. \end{aligned}$$

记

$$\Phi_1(s, s+\varepsilon) := \left(\int_s^{s+\varepsilon} X_u^H du \right)^2, \quad (5.5)$$

$$\Phi_2(s, s+\varepsilon) := (S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H) \int_s^{s+\varepsilon} X_u^H du. \quad (5.6)$$

因此, 我们只需证明当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{1}{\varepsilon^{2H}} \int_0^t \Phi_j(s, s+\varepsilon) ds \xrightarrow{L^2} 0, \quad j = 1, 2 \quad (5.7)$$

成立.

当 $\frac{1}{2} < H < 1$ 时, (5.2) 蕴含对所有的 $u \in [0, T]$, 有

$$\mathbb{E}|X_u^H|^2 = \sigma^2 \mathbb{E} \left| \int_0^u e^{-\beta(u-v)} dS_v^H \right|^2 = 3\sigma^2 \mathbb{E} \left| \int_0^u e^{-\beta(u-v)} dS_v^H \right|^2$$

$$= C\sigma^2 \int_0^u \int_0^u e^{-\beta(u-v_1)} e^{-\beta(u-v_2)} \phi(v_1, v_2) dv_1 dv_2 \leq C\sigma^2 T^{2H}; \quad (5.8)$$

当 $0 < H < \frac{1}{2}$ 时,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_u^H|^2 &= \sigma^2 \mathbb{E} \left| \int_0^u e^{-\beta(u-v)} dS_v^H \right|^2 = \sigma^2 \int_0^u \left[I_{T^-, 2, \frac{3-2H}{4}}^{H-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2^{H-\frac{1}{2}}} s^{H-\frac{1}{2}} e^{-\beta(u-\cdot)} \right) (s) \right]^2 ds \\ &\leq C\sigma^2 T^{2H}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

注意到积分 $\int_0^u e^{-\beta(u-v)} dS_v^H$ 是 Gauss 的, 可以得到

$$\mathbb{E}|\Phi_1(s, s+\varepsilon)|^2 = \mathbb{E} \left(\int_s^{s+\varepsilon} X_u^H du \right)^4 \leq \varepsilon^3 \int_s^{s+\varepsilon} \mathbb{E}(|X_u^H|^4) du \leq C\sigma^4 T^{4H} \varepsilon^4$$

对所有的 $\varepsilon > 0$, $s \in [0, T]$ 和 $0 < H < 1$ 成立. 因此, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 对所有的 $t \in [0, T]$ 和 $0 < H < 1$, 收敛性

$$\frac{1}{\varepsilon^{4H}} \mathbb{E} \left| \int_0^t \Phi_1(s, s+\varepsilon) ds \right|^2 \leq \frac{t}{\varepsilon^{4H}} \int_0^t \mathbb{E}|\Phi_1(s, s+\varepsilon)|^2 ds \leq C\sigma^4 T^{4H+1} \varepsilon^{4-4H} \rightarrow 0 \quad (5.10)$$

和

$$\frac{1}{\varepsilon^{4H}} \mathbb{E} \left| \int_0^t \Phi_2(s, s+\varepsilon) ds \right|^2 \leq CT^{2H+1} \varepsilon^{2-2H} \rightarrow 0 \quad (5.11)$$

成立. 证毕. $\square$

从上面的命题, 我们可以立即得到, 对 $T > 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 如果过程 X^H 在时间区间 $[0, T+\varepsilon]$ 上能被连续观测, 我们可以构造统计量

$$\widehat{\sigma}_T^2(\varepsilon) := \frac{1}{\varepsilon^{2H}T} \int_0^T (X_{t+\varepsilon}^H - X_t^H)^2 dt,$$

并且该估计量是 σ^2 的一个渐近无偏估计, 进一步地, 对 $0 < H < 1$, 有

$$\widehat{\sigma}_T^2(\varepsilon) \xrightarrow{L^2} \sigma^2, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

引理 13 对所有的 $T > 0$ 和 $0 < H < \frac{3}{4}$, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 以下收敛性成立:

$$\frac{1}{\varepsilon^{2H+\frac{1}{2}}} \int_0^t \Phi_j(s, s+\varepsilon) ds \xrightarrow{L^1} 0, \quad j = 1, 2. \quad (5.12)$$

证明 当 $0 < H < \frac{1}{2}$ 时, 该引理可由 (5.10) 和 (5.11) 推出. 当 $\frac{1}{2} < H < \frac{3}{4}$ 时, 由 (5.10) 可以看出 (5.12) 对于 $j = 1$ 成立. 因此, 我们只需证明当 $\frac{1}{2} < H < \frac{3}{4}$ 时,

$$\frac{1}{\varepsilon^{2H+\frac{1}{2}}} \int_0^T \Phi_2(t, t+\varepsilon) dt \xrightarrow{L^2} 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

显然有

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T \Phi_2(t, t+\varepsilon) dt \right)^2 = 2 \int_0^T dt \int_0^t \mathbb{E}[\Phi_2(t, t+\varepsilon) \Phi_2(s, s+\varepsilon)] ds, \quad \varepsilon > 0,$$

并且, 对任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $t > s > 0$, 也有

$$\mathbb{E}[\Phi_2(t, t+\varepsilon) \Phi_2(s, s+\varepsilon)] = \mathbb{E}(S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H) \left(\int_t^{t+\varepsilon} X_u^H du \right) \left(\int_s^{s+\varepsilon} X_v^H dv \right)$$

$$= \int_t^{t+\varepsilon} du \int_s^{s+\varepsilon} E[(S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)X_v^H X_u^H] dv.$$

另一方面, 利用对偶关系和 Malliavin 变分可得

$$D_y^H X_u^H = \sigma e^{-\beta u} D_y^H \int_0^u e^{\beta v} dS_v^H = \sigma e^{-\beta(u-y)} 1_{\{u>y\}},$$

因此, 对所有的 $\varepsilon > 0$, $t > s > 0$ 和 $u, v > 0$, 等式

$$\begin{aligned} E[(S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)X_v^H X_u^H] &= E\left[(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)X_v^H X_u^H \int_t^{t+\varepsilon} dS_x^H\right] \\ &= E[(S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)]E[X_v^H X_u^H] \\ &\quad + E[(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)X_v^H] \int_t^{t+\varepsilon} dx \int_0^u \sigma e^{-\beta(u-y)} \phi(x, y) dy \\ &\quad + E[(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)X_u^H] \int_t^{t+\varepsilon} dx \int_0^v \sigma e^{-\beta(u-y)} \phi(x, y) dy \end{aligned}$$

成立. 组合上式、引理 9 和以下事实:

$$\begin{aligned} E[(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)X_v^H] &= E\left(X_v^H \int_s^{s+\varepsilon} dS_x^H\right) = \int_s^{s+\varepsilon} dx \int_0^v \sigma e^{-\beta(v-y)} \phi(x, y) dy \\ &\leq \sigma \int_s^{s+\varepsilon} dx \int_0^v \phi(x, y) dy = \sigma E[(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)S_v^H] \leq C\sigma\varepsilon, \end{aligned}$$

我们可以获得, 对所有的 $\varepsilon > 0$ 和 $s, t > 0$, 估计

$$\begin{aligned} |E[\Phi_2(t, t+\varepsilon)\Phi_2(s, s+\varepsilon)]| &\leq \int_t^{t+\varepsilon} du \int_s^{s+\varepsilon} dv |E[(S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)(S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)X_v^H X_u^H]| \\ &\leq C\sigma^2 \left(T^{2H} \frac{1}{|t-s-\varepsilon|^{2-2H}} + 1\right) \varepsilon^4 \end{aligned}$$

成立, 这意味着收敛性

$$\frac{1}{\varepsilon^{4H+1}} E\left(\int_0^T \Phi_2(t, t+\varepsilon) dt\right)^2 \leq C\varepsilon^{3-4H} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (5.13)$$

对所有的 $\frac{1}{2} < H < \frac{3}{4}$ 成立. 命题得证. $\square$

引理 14 对所有的 $T > 0$ 和 $H = \frac{3}{4}$, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 有

$$\frac{1}{\varepsilon^2 \sqrt{-\log \varepsilon}} \int_0^T \Phi_j(s, s+\varepsilon) ds \xrightarrow{L^2} 0, \quad j = 1, 2. \quad (5.14)$$

证明 从 (5.10) 和 (5.13) 可以得到收敛性 (5.14). $\square$

定理 3 假设估计量 $\widehat{\sigma_T^2}(\varepsilon)$ 被定义如上.

(1) 若 $0 < H < \frac{3}{4}$, 则当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 渐近正态性

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\widehat{\sigma_T^2}(\varepsilon) - \sigma^2) \rightarrow N\left(0, \frac{\lambda_H}{T} \sigma^4\right) \quad (5.15)$$

成立.

(2) 若 $H = \frac{3}{4}$, 则当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 渐近正态性

$$\frac{1}{\sqrt{-\varepsilon \log \varepsilon}}(\widehat{\sigma_T^2}(\varepsilon) - \sigma^2) \rightarrow N\left(0, \frac{9}{16T}\sigma^4\right) \quad (5.16)$$

成立.

证明 清楚地, 对每个 $\varepsilon > 0$ 和 $T > 0$, 如下分解成立:

$$\widehat{\sigma_T^2}(\varepsilon) - \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^{2H}T} \int_0^T ((S_{t+\varepsilon}^H - S_t^H)^2 - \varepsilon^{2H})dt + \frac{1}{\varepsilon^{2H}T} \int_0^T \Phi_1(t, t+\varepsilon)dt + \frac{2}{\varepsilon^{2H}T} \int_0^T \Phi_2(t, t+\varepsilon)dt,$$

其中 Φ_1 和 Φ_2 分别由 (5.5) 和 (5.6) 定义. 这个定理来自于引理 13、14、Slutsky 定理和定理 1. $\square$

致谢 感谢审稿人提出了许多宝贵的建议.

参考文献

- Bojdecki T, Gorostiza L G, Talarczyk A. Sub-fractional Brownian motion and its relation to occupation times. *Statist Probab Lett*, 2004, 69: 405–419
- Alós E, Mazet O, Nualart D. Stochastic calculus with respect to Gaussian processes. *Ann Probab*, 2001, 29: 766–801
- Bojdecki T, Gorostiza L G, Talarczyk A. Limit theorems for occupation time fluctuations of branching systems (I): Long-range dependence. *Stochastic Process Appl*, 2006, 116: 1–18
- Bojdecki T, Gorostiza L G, Talarczyk A. Some extension of fractional Brownian motion and sub-fractional Brownian motion related to particle systems. *Electron Comm Probab*, 2007, 12: 161–172
- Shen G, Yan L. An approximation of subfractional Brownian motion. *Comm Statist Theory Methods*, 2014, 43: 1873–1886
- Shen G, Yan L. Estimators for the drift of subfractional Brownian motion. *Comm Statist Theory Methods*, 2014, 43: 1601–1612
- Tudor C. Some properties of the sub-fractional Brownian motion. *Stochastics*, 2007, 79: 431–448
- Tudor C. Inner product spaces of integrands associated to sub-fractional Brownian motion. *Statist Probab Lett*, 2008, 78: 2201–2209
- Tudor C. Some aspects of stochastic calculus for the sub-fractional Brownian motion. *Ann Univ Bucuresti Math*, 2008, 57: 199–230
- Tudor C. On the Wiener integral with respect to a sub-fractional Brownian motion on an interval. *J Math Anal Appl*, 2009, 351: 456–468
- Yan L, He K, Chen C. The generalized Bouleau-Yor identity for a sub-fBm. *Sci China Math*, 2013, 56: 2089–2116
- Yan L, Shen G. On the collision local time of sub-fractional Brownian motions. *Statist Probab Lett*, 2010, 80: 296–308
- Gao H, Yan L, Zhang J. Parameter estimation for the fractional Ornstein-Uhlenbeck process with constant drift. *Stochastics*, in press, 2017
- Berzin C, Latour A, Leon J R. Inference on the Hurst Parameter and the Variance of Diffusions Driven by Fractional Brownian Motion. Berlin: Springer, 2014
- Bishwal J P. Parameter Estimation in Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer, 2008
- Es-Sebaïy K. Berry-Esséen bounds for the least squares estimator for discretely observed fractional Ornstein-Uhlenbeck processes. *Statist Probab Lett*, 2013, 83: 2372–2385
- Es-Sebaïy K, Nourdin I. Parameter estimation for α fractional bridges. In: *Malliavin Calculus and Stochastic Analysis*. New York: Springer, 2013, 385–412
- Hu Y, Nualart D. Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes. *Statist Probab Lett*, 2010, 80: 1030–1038
- Hu Y, Song J. Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes with discrete observations. In: *Malliavin Calculus and Stochastic Analysis*. New York: Springer, 2013, 417–442
- Stefano M I. Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations. London-Berlin: Springer-Verlag, 2008
- Kleptsyna M L, Breton A L. Statistical analysis of the fractional Ornstein-Uhlenbeck type processes. *Stat Inference Stoch Process*, 2002, 5: 229–248
- Kutoyants Y A. Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes. London-Berlin: Springer-Verlag, 2004

- 23 Liptser R S, Shiryaev A N. Statistics of Random Processes, II: Applications, 2nd ed. New York: Springer, 2001
- 24 Prakasa Rao B L S. Statistical Inference for Diffusion Type Processes. New York-Arnold-London: Oxford University Press, 1999
- 25 Prakasa Rao B L S. Statistical Inference for Fractional Diffusion Processes. New York: John Wiley & Sons, 2010
- 26 Tudor C A, Viens F G. Statistical aspects of the fractional stochastic calculus. *Ann Statist*, 2007, 35: 1183–1212
- 27 Mendy I. Parametric estimation for sub-fractional Ornstein-Uhlenbeck process. *J Statist Plann Inference*, 2013, 143: 663–674
- 28 Nualart D. Malliavin Calculus and Related Topics, 2nd ed. New York: Springer, 2006
- 29 Samko S G, Kilbas A A, Marichev O I. Fractional Integrals and Fractional Derivatives. London: Gordon and Breach Science, 1993
- 30 Nualart D, Ortiz-Latorre S. Central limit theorems for multiple stochastic integrals and Malliavin calculus. *Stochastic Process Appl*, 2008, 118: 614–628
- 31 Nualart D, Peccati G. Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals. *Ann Probab*, 2005, 33: 177–193
- 32 Billingsley P. Convergence of Probability Measures. New York: Chapman & Hall, 1968
- 33 Gradinaru M, Nourdin I. Approximation at first and second order of m -order integrals of the fractional Brownian motion and of certain semimartingales. *Electron J Probab*, 2003, 8: 1–26

A central limit theorem associated with sub-fractional Brownian motion and an application

SUN XiChao & YAN LiTan

Abstract In this paper, we consider the asymptotic normality associated with the integral functionals

$$\frac{1}{\eta(\varepsilon)} \int_0^T ((S_{s+\varepsilon}^H - S_s^H)^2 - \varepsilon^{2H}) ds, \quad \varepsilon > 0$$

with $T > 0$, where $\eta(\varepsilon)$ is an infinitesimal as ε tends to zero. When $0 < H < \frac{3}{4}$ and $\eta(\varepsilon) = \varepsilon^{2H+\frac{1}{2}}$, we show that there exists a standard Brownian motion B such that it converges weakly to B multiplied by a constant, and moreover when $H = \frac{3}{4}$ and $\eta(\varepsilon) = \varepsilon^2 \sqrt{-\log \varepsilon}$, we also show that there exists a standard Brownian motion W such that it converges weakly to $\frac{3}{4}W$. As an application we study the asymptotic normality of the estimator of parameter $\sigma > 0$ in Ornstein-Uhlenbeck process

$$X_t^H = X_0^H + \sigma S_t^H - \beta \int_0^t X_s^H ds,$$

by using the so-called generalized quadratic variation.

Keywords sub-fractional Brownian motion, central limit theorem, Ornstein-Uhlenbeck process, the generalized quadratic variation

MSC(2010) 60G15, 60J55, 60H05

doi: 10.1360/SCM-2016-0748