含参广义向量均衡问题有效解的稳定性

韩瑜, 黄南京*

四川大学数学学院, 成都 610064

E-mail: hanyumath@163.com, nanjinghuang@hotmail.com

收稿日期: 2015-04-29; 接受日期: 2015-10-16; 网络出版日期: 2016-01-26; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11171237 和 11471230) 资助项目

摘要 在不需要映射的单调性和解映射信息的条件下, 本文讨论了一类含参广义向量均衡问题有效解映射的下半连续性和 Hausdorff 上半连续性. 利用映射的严格 C -凹性和 C -似凸性, 本文得到了该类含参广义向量均衡问题有效解映射的下半连续性. 进一步, 利用标量化方法, 证明了该类含参广义向量均衡问题有效解映射的 Hausdorff 上半连续性.

关键词 含参广义向量均衡问题 有效解 下半连续性 Hausdorff 上半连续性

MSC (2010) 主题分类 49K40, 90C31

1 引言

向量均衡问题作为均衡问题的推广, 为向量优化问题、鞍点问题、向量互补问题和向量变分不等式等问题的研究提供了统一格式 (参见文献 [1,2]). 文献 [3–8] 在不同条件下研究了若干向量均衡问题解的存在性问题.

另一方面, 众所周知, 研究含参向量均衡问题解的稳定性是优化理论中一个重要的研究课题 (参见文献 [9–16]). 最近, 许多学者研究了向量均衡问题和向量变分不等式问题解的稳定性问题, 获得了大量的研究成果 (参见文献 [13–20]). 我们注意到, 为了讨论含参向量均衡问题解映射的下半连续性, 文献 [11, 15–17, 21–24] 利用了映射的单调性或者解映射的信息. 我们知道, 映射的单调性可能导致整个解集是单点集. 另一方面, 从实际的角度出发, 假设中涉及解映射信息是不合理的. 因此, 如何寻找新的条件, 研究含参向量均衡问题解映射的半连续性是重要且有趣的工作.

本文的目的是, 在不需要映射的单调性和解映射信息的条件下, 研究一类含参广义向量均衡问题有效解的稳定性. 全文结构如下: 第 2 节回顾一些必要的基本知识和结果; 第 3 节得到了含参广义向量均衡问题有效解映射的下半连续性; 第 4 节研究了含参广义向量均衡问题有效解映射的 Hausdorff 上半连续性. 同时也给出了例子说明文中定理的条件是易于满足的.

英文引用格式: Han Y, Huang N J. Stability of efficient solutions to parametric generalized vector equilibrium problems (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 397–408, doi: 10.1360/012016-12

2 预备知识

本文如不作特别声明, 均假设 Λ, W, X 和 Y 是赋范线性空间, $C \subseteq Y$ 是一个具有非空内部的点凸锥. 令 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ 以及 $\mathbb{R}_+^0 = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. 设 Y^* 是 Y 的拓扑对偶空间. 定义 C^* 如下:

$$C^* = \{f \in Y^* : f(c) \geq 0, \forall c \in C\}.$$

进一步, 定义 C^* 的拟内部如下:

$$C^\# = \{f \in Y^* : f(c) > 0, \forall c \in C \setminus \{0\}\}.$$

记 D 的闭包为 $\text{cl}(D)$, D 的内部为 $\text{int}D$. 凸锥 C 的非空凸子集 B 称为是 C 的一个基, 若 $C = \text{cone}(B)$ 且 $0 \notin \text{cl}(B)$. 容易看出, $C^\# \neq \emptyset$ 当且仅当 C 具有基.

设 e 是 $\text{int}C$ 中给定的点. 令 $B^* = \{f \in C^* : f(e) = 1\}$, $B^\# = \{f \in C^\# : f(e) = 1\}$, 则容易看出, B^* 是 C^* 的弱*紧基, $B^\#$ 是 $C^\#$ 的基且关于弱*拓扑有 $B^* = \text{cl}(B^\#)$.

设 K 是 X 的非空子集且 $F : X \times X \rightarrow 2^Y$ 是集值映射. 考虑下面广义向量均衡问题, 找到 $x_0 \in K$ 使得

$$F(x_0, y) \cap (-\Omega) = \emptyset, \quad \forall y \in K,$$

其中 $\Omega \cup \{0\}$ 是 Y 中的凸锥.

广义向量均衡问题的弱有效解集记为 $W(F, K)$, 即

$$W(F, K) = \{x \in K : (F(x, y)) \cap (-\text{int}C) = \emptyset, \forall y \in K\}.$$

广义向量均衡问题的有效解集记为 $E(F, K)$, 即

$$E(F, K) = \{x \in K : (F(x, y)) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset, \forall y \in K\}.$$

对于给定的 $f \in B^*$, 广义向量均衡问题的 f -解集记为 $Q(f)$, 即

$$Q(f) = \{x \in K : f(F(x, y)) \subseteq \mathbb{R}_+, \forall y \in K\}.$$

设 $F : X \times X \times W \rightarrow 2^Y$ 和 $K : \Lambda \rightarrow 2^X$ 是两个集值映射. 对于 $(u, \lambda) \in W \times \Lambda$, 考虑下面含参广义向量均衡问题, 找到 $x_0 \in K(\lambda)$ 使得

$$F(x_0, y, u) \cap (-\Omega) = \emptyset, \quad \forall y \in K(\lambda),$$

其中 $\Omega \cup \{0\}$ 是 Y 中的凸锥.

对于给定的 $(u, \lambda) \in W \times \Lambda$, 含参广义向量均衡问题的弱有效解集记为 $E_w(u, \lambda)$, 即

$$E_w(u, \lambda) = \{x \in K(\lambda) : (F(x, y, u)) \cap (-\text{int}C) = \emptyset, \forall y \in K(\lambda)\}.$$

含参广义向量均衡问题的有效解集记为 $E(u, \lambda)$, 即

$$E(u, \lambda) = \{x \in K(\lambda) : (F(x, y, u)) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset, \forall y \in K(\lambda)\}.$$

对于给定的 $f \in B^*$ 和 $(u, \lambda) \in W \times \Lambda$, 含参广义向量均衡问题的 f -解集记为 $S(f, u, \lambda)$, 即

$$S(f, u, \lambda) = \{x \in K(\lambda) : f(F(x, y, u)) \subseteq \mathbb{R}_+, \forall y \in K(\lambda)\}.$$

定义 2.1 设 D 是 X 的非空子集. 一个集值映射 $\Phi: X \rightarrow 2^Y$ 称为

(i) 在 D 上 C - 似凸的, 如果对于任意 $x_1, x_2 \in D$ 以及任意 $t \in [0, 1]$, 存在 $x_3 \in D$ 使得

$$t\Phi(x_1) + (1-t)\Phi(x_2) \subseteq \Phi(x_3) + C;$$

(ii) 在 D 上严格 C - 凹的, 如果对于任意 $x_1, x_2 \in D$ 满足 $x_1 \neq x_2$ 以及任意 $t \in (0, 1)$, 有

$$\Phi(tx_1 + (1-t)x_2) \subseteq t\Phi(x_1) + (1-t)\Phi(x_2) + \text{int}C.$$

值得指出的是, 严格 C - 条件在本文中起到了重要的作用. 下面的例子说明, 严格 C - 凹条件是容易满足的.

例 2.1 设 $Y = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$, $X = \mathbb{R}$, $D = [-1, 1]$. 记 Y 中的闭单位球为 B_Y . 定义集值映射 $\Phi: X \rightarrow 2^Y$ 如下:

$$\Phi(x) = (-x^2 + x + 2, \cos x) + B_Y,$$

则容易看出 Φ 在 D 上是严格 C - 凹的.

定义 2.2 设 T 和 T_1 是赋范线性空间. 一个集值映射 $G: T \rightarrow 2^{T_1}$ 称为

(i) 在点 $u_0 \in T$ 处是 Hausdorff 上半连续的, 如果对于 $0 \in T_1$ 的任意邻域 V , 存在 u_0 的邻域 $U(u_0)$ 使得对任意 $u \in U(u_0)$, 有 $G(u) \subseteq G(u_0) + V$;

(ii) 在点 $u_0 \in T$ 处是上半连续的, 如果对于 $G(u_0)$ 的任意邻域 V , 存在 u_0 的邻域 $U(u_0)$ 使得对任意 $u \in U(u_0)$, 有 $G(u) \subseteq V$;

(iii) 在点 $u_0 \in T$ 处是下半连续的, 如果对于任意 $x \in G(u_0)$ 以及 x 的任意邻域 V , 存在 u_0 的邻域 $U(u_0)$ 使得对任意 $u \in U(u_0)$, 有 $G(u) \cap V \neq \emptyset$.

如果 G 在 T 的每一点都是 Hausdorff 上半连续的 (上半连续的, 下半连续的), 则称 G 在 T 上是 Hausdorff 上半连续的 (上半连续的, 下半连续的). 如果 G 在 T 上同时是上半连续的和下半连续的, 则称 G 在 T 上是连续的.

引理 2.1 ^[25] 集值映射 $G: T \rightarrow 2^{T_1}$ 在点 $u_0 \in T$ 处是下半连续的当且仅当对于任意序列 $\{u_n\} \subseteq T$ 满足 $u_n \rightarrow u_0$ 以及任意 $x_0 \in G(u_0)$, 存在 $x_n \in G(u_n)$ 使得 $x_n \rightarrow x_0$.

引理 2.2 ^[26] 设 $G: T \rightarrow 2^{T_1}$ 是集值映射. 对于任意给定的 $u_0 \in T$, 如果 $G(u_0)$ 是紧的, 则 G 在点 $u_0 \in T$ 处上半连续的充分必要条件是, 对于任意序列 $\{u_n\} \subseteq T$ 满足 $u_n \rightarrow u_0$ 以及任意 $x_n \in G(u_n)$, 存在 $x_0 \in G(u_0)$ 以及 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $x_{n_k} \rightarrow x_0$.

引理 2.3 一个集值映射 $G: T \rightarrow 2^{T_1}$ 在 T 上是下半连续的当且仅当对于任意集合 $A \subseteq T$, 有

$$\bigcup_{u \in \text{cl}(A)} G(u) \subseteq \text{cl}\left(\bigcup_{u \in A} G(u)\right).$$

证明 首先证明必要性. 对于任意集合 $A \subseteq T$, 设 $x_0 \in \bigcup_{u \in \text{cl}(A)} G(u)$, 则存在 $u_0 \in \text{cl}(A)$ 使得 $x_0 \in G(u_0)$. 由于 $u_0 \in \text{cl}(A)$, 可知存在 $u_n \in A$ 使得 $u_n \rightarrow u_0$. 根据引理 2.1, 存在

$$x_n \in G(u_n) \subseteq \bigcup_{u \in A} G(u)$$

使得 $x_n \rightarrow x_0$. 这样, $x_0 \in \text{cl}(\bigcup_{u \in A} G(u))$.

下面证明充分性. 假若存在 $u_0 \in T$ 使得 G 在点 u_0 处不是下半连续的, 则存在 $x_0 \in G(u_0)$ 以及 $0 \in T_1$ 的邻域 W_0 , 使得对于 u_0 的任意邻域 U , 存在 $u' \in U$ 满足 $(x_0 + W_0) \cap G(u') = \emptyset$. 这样, 存在一个序列 $\{u_n\} \subseteq T$ 满足 $u_n \rightarrow u_0$ 且

$$(x_0 + W_0) \cap G(u_n) = \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

取 $A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, 则易知 $x_0 \in \bigcup_{u \in \text{cl}(A)} G(u)$. 由 (2.1), 有

$$(x_0 + W_0) \cap \left(\bigcup_{u \in A} G(u) \right) = \emptyset.$$

因此, $x_0 \notin \text{cl}(\bigcup_{x \in A} G(x))$, 从而,

$$\bigcup_{u \in \text{cl}(A)} G(u) \not\subseteq \text{cl}\left(\bigcup_{x \in A} G(x)\right),$$

这与已知条件矛盾. □

3 含参广义向量均衡问题有效解映射的下半连续性

本节讨论含参广义向量均衡问题有效解映射的下半连续性.

引理 3.1 设 $W(F, K) \neq \emptyset$ 且对于每个 $x \in K$, $F(x, \cdot)$ 在 K 上是 C -似凸的, 则

$$W(F, K) = \bigcup_{f \in B^*} Q(f).$$

证明 对任意给定的点 $x \in \bigcup_{f \in B^*} Q(f)$, 存在 $f_0 \in B^*$ 使得 $x \in Q(f_0)$. 因此, $x \in K$ 且对任意 $y \in K$, $f_0(F(x, y)) \subseteq \mathbb{R}_+$. 假设 $x \notin W(F, K)$, 则存在 $y_0 \in K$ 使得 $(F(x, y_0)) \cap (-\text{int}C) \neq \emptyset$. 由此可知, 存在 $z_0 \in F(x, y_0)$ 使得 $f_0(z_0) < 0$, 这与 $f_0(F(x, y_0)) \subseteq \mathbb{R}_+$ 矛盾. 因此, 我们有 $x \in W(F, K)$.

下面证明

$$W(F, K) \subseteq \bigcup_{f \in B^*} Q(f).$$

设 $x \in W(F, K)$, 则 $x \in K$ 且对任意 $y \in K$, 有 $(F(x, y)) \cap (-\text{int}C) = \emptyset$. 这样,

$$(F(x, K) + C) \cap (-\text{int}C) = \emptyset.$$

对每个 $x \in K$, 由于 $F(x, \cdot)$ 在 K 上是 C -似凸的, 易知 $F(x, K) + C$ 是凸集. 由分离定理, 存在 $g \in Y^* \setminus \{0\}$ 使得

$$\inf\{g(z + c) : y \in K, z \in F(x, y), c \in C\} \geq \sup\{g(c') : c' \in -C\}.$$

对任意 $y \in K$, 我们有 $g(F(x, y)) \subseteq \mathbb{R}_+$ 且 $g \in C^*$. 由于 $g \in C^* \setminus \{0\}$, 故存在 $\delta > 0$ 以及 $\psi \in B^*$ 使得 $g = \delta\psi$. 因此, 对任意 $y \in K$, 我们有 $\psi(F(x, y)) \subseteq \mathbb{R}_+$. 因此, $x \in Q(\psi)$, 从而, $x \in \bigcup_{f \in B^*} Q(f)$. □

引理 3.2 设 $Q(\cdot)$ 在 B^* 上是下半连续的, 对任意 $x \in K$, $F(x, \cdot)$ 在 K 上是 C -似凸的, 则

$$\bigcup_{f \in B^\#} Q(f) \subseteq E(F, K) \subseteq W(F, K) = \bigcup_{f \in B^*} Q(f) \subseteq \text{cl}\left(\bigcup_{f \in B^\#} Q(f)\right).$$

证明 由引理 3.1 可知,

$$\bigcup_{f \in B^\#} Q(f) \subseteq E(F, K) \subseteq W(F, K) = \bigcup_{f \in B^*} Q(f).$$

注意到 $Q(\cdot)$ 在 $B^* = \text{cl}(B^\#)$ 上是下半连续的, 由引理 2.3, 有

$$\bigcup_{f \in B^*} Q(f) \subseteq \text{cl}\left(\bigcup_{f \in B^\#} Q(f)\right).$$

这样,

$$\bigcup_{f \in B^\#} Q(f) \subseteq E(F, K) \subseteq W(F, K) = \bigcup_{f \in B^*} Q(f) \subseteq \text{cl}\left(\bigcup_{f \in B^\#} Q(f)\right).$$

证毕. □

引理 3.3 设 $f_0 \in B^*$, 且下面条件成立,

- (i) K 是非空紧凸集;
- (ii) 对每个 $y \in K$, $F(\cdot, y)$ 在 K 上是严格 C -凹的;
- (iii) $F(\cdot, \cdot)$ 在 $K \times K$ 上是连续的且具有非空紧值的,

则 $Q(\cdot)$ 在点 f_0 处是下半连续的, 这里的拓扑是弱*拓扑.

证明 反证法. 假若 $Q(\cdot)$ 在 f_0 点不是下半连续的, 则存在 $x_0 \in Q(f_0)$ 以及存在 $0 \in X$ 的邻域 W_0 使得, 对 f_0 的任意邻域 $U(f_0)$, 存在 $f' \in U(f_0)$ 满足

$$(x_0 + W_0) \cap Q(f') = \emptyset.$$

因此, 存在序列 $\{f_n\}$ 满足 $f_n \xrightarrow{w^*} f_0$ 使得

$$(x_0 + W_0) \cap Q(f_n) = \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

我们分两种情形讨论.

情形 I $Q(f_0)$ 是单点集. 设

$$x_n \in Q(f_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

显然, $x_n \in K$. 由于 K 是紧的, 不失一般性, 我们可以假设 $x_n \rightarrow \bar{x} \in K$.

下面证明 $\bar{x} \in Q(f_0)$. 事实上, 假若 $\bar{x} \notin Q(f_0)$, 则存在 $\bar{y} \in K$ 使得 $f_0(F(\bar{x}, \bar{y})) \not\subseteq \mathbb{R}_+$. 故存在 $\bar{z} \in F(\bar{x}, \bar{y})$ 满足

$$f_0(\bar{z}) < 0. \quad (3.3)$$

注意到 $F(\cdot, \cdot)$ 在点 $(\bar{x}, \bar{y})$ 处是下半连续的, 由引理 2.1, 存在 $z_n \in F(x_n, \bar{y})$ 使得 $z_n \rightarrow \bar{z}$. 由 $f_n \xrightarrow{w^*} f_0$ 易知, $f_n(z_n) \rightarrow f_0(\bar{z})$. 根据 (3.3), 当 n 足够大时, 我们有 $f_n(z_n) < 0$, 这与 (3.2) 矛盾. 因此, $\bar{x} \in Q(f_0)$. 注意到 $Q(f_0)$ 是单点集, 可知 $\bar{x} = x_0$, 故 $x_n \rightarrow \bar{x} = x_0$. 因此, 当 n 足够大时, 我们有 $x_n \in x_0 + W_0$. 结合 (3.2) 可知, 当 n 足够大时, 有

$$(x_0 + W_0) \cap Q(f_n) \neq \emptyset,$$

这与 (3.1) 矛盾.

情形 II $Q(f_0)$ 不是单点集, 则存在 $x' \in Q(f_0)$ 使得 $x' \neq x_0$. 由于 $x', x_0 \in Q(f_0)$, 对任意 $y \in K$, 我们有

$$f_0(F(x_0, y)) \subseteq \mathbb{R}_+, \quad f_0(F(x', y)) \subseteq \mathbb{R}_+. \quad (3.4)$$

因为 $F(\cdot, y)$ 在 K 上是严格 C - 凹的, 故对任意 $t \in (0, 1)$, 有

$$F(tx' + (1-t)x_0, y) \subseteq tF(x', y) + (1-t)F(x_0, y) + \text{int}C. \quad (3.5)$$

令 $x(t) := tx' + (1-t)x_0$. 显然, $x(t) \in K$. 这样, 存在 $t_0 \in (0, 1)$ 使得 $x(t_0) \in x_0 + W_0$. 由 (3.1) 可知, $x(t_0) \notin Q(f_n)$, 从而存在 $y'_n \in K$ 使得 $f_n(F(x(t_0), y'_n)) \not\subset \mathbb{R}_+$. 因此, 存在 $z'_n \in F(x(t_0), y'_n)$ 满足

$$f_n(z'_n) < 0. \quad (3.6)$$

由于 K 是紧的, 不失一般性, 我们可以假设 $y'_n \rightarrow y' \in K$. 注意到 $F(\cdot, \cdot)$ 在点 $(x(t_0), y')$ 处是上半连续的, 由引理 2.2 可知, 存在 $\{z'_{n_k}\}$ 的子序列 $\{z'_{n_k}\}$ 以及 $z' \in F(x(t_0), y')$ 使得 $z'_{n_k} \rightarrow z'$. 不失一般性, 我们可以假设 $z'_n \rightarrow z'$. 由 $f_n \xrightarrow{w^*} f_0$ 易知, $f_n(z'_n) \rightarrow f_0(z')$. 根据 (3.6), 有

$$f_0(z') \leq 0. \quad (3.7)$$

另一方面, 由 (3.4)、(3.5) 和 $f_0 \in B^*$, 我们可得 $f_0(z') > 0$, 这与 (3.7) 矛盾. $\square$

引理 3.4 设 $f \in B^*$, $(u_0, \lambda_0) \in W \times \Lambda$, 且下面条件成立,

- (i) $K(\lambda_0)$ 是非空紧凸集且 $K(\cdot)$ 在点 λ_0 处是连续的;
- (ii) 对每个 $y \in K(\lambda_0)$, $F(\cdot, y, u_0)$ 在 $K(\lambda_0)$ 上是严格 C - 凹的;
- (iii) $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在 $K(\lambda_0) \times K(\lambda_0) \times \{u_0\}$ 上是连续的且具有非空紧值,

则 $S(f, \cdot, \cdot)$ 在点 (u_0, λ_0) 处是下半连续的.

证明 反证法. 假设 $S(f, \cdot, \cdot)$ 在点 (u_0, λ_0) 处不是下半连续的, 则存在 $x_0 \in S(f, u_0, \lambda_0)$ 以及 $0 \in X$ 的邻域 W_0 使得对 (u_0, λ_0) 的任意邻域 $U' \times V'$, 存在 $(u', \lambda') \in U' \times V'$ 满足

$$(x_0 + W_0) \cap S(f, u', \lambda') = \emptyset.$$

因此, 存在序列 $\{(u_n, \lambda_n)\}$ 满足 $(u_n, \lambda_n) \rightarrow (u_0, \lambda_0)$ 使得

$$(x_0 + W_0) \cap S(f, u_n, \lambda_n) = \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

我们分两种情形讨论.

情形 I $S(f, u_0, \lambda_0)$ 是单点集. 设

$$x_n \in S(f, u_n, \lambda_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.9)$$

显然, $x_n \in K(\lambda_n)$. 由引理 2.2 知, 存在 $\bar{x} \in K(\lambda_0)$ 以及 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$. 不失一般性, 我们假设 $x_n \rightarrow \bar{x}$.

下面证明 $\bar{x} \in S(f, u_0, \lambda_0)$. 事实上, 假设 $\bar{x} \notin S(f, u_0, \lambda_0)$, 则存在 $\bar{y} \in K(\lambda_0)$ 使得

$$f(F(\bar{x}, \bar{y}, u_0)) \not\subset \mathbb{R}_+.$$

这样, 存在 $\bar{z} \in F(\bar{x}, \bar{y}, u_0)$ 满足

$$f(\bar{z}) < 0. \quad (3.10)$$

注意到 $\bar{y} \in K(\lambda_0)$, 根据引理 2.1 可知, 存在 $y_n \in K(\lambda_n)$ 使得 $y_n \rightarrow \bar{y}$. 由于 $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在点 $(\bar{x}, \bar{y}, u_0)$ 处是下半连续的, 根据引理 2.1 可知, 存在 $z_n \in F(x_n, y_n, u_n)$ 使得 $z_n \rightarrow \bar{z}$. 这样, $f(z_n) \rightarrow f(\bar{z})$. 由 (3.10) 可知, 当 n 足够大时, 我们有 $f(z_n) < 0$, 这与 (3.9) 矛盾. 因此, $\bar{x} \in S(f, u_0, \lambda_0)$.

注意到 $S(f, u_0, \lambda_0)$ 是单点集, 我们有 $\bar{x} = x_0$, 从而, $x_n \rightarrow \bar{x} = x_0$. 这样, 当 n 足够大时, 我们有 $x_n \in x_0 + W_0$. 结合 (3.9) 可知, 当 n 足够大时, 我们可得

$$(x_0 + W_0) \cap S(f, u_n, \lambda_n) \neq \emptyset,$$

这与 (3.8) 矛盾.

情形 II $S(f, u_0, \lambda_0)$ 不是单点集, 则存在 $x' \in S(f, u_0, \lambda_0)$ 使得 $x' \neq x_0$. 由于 $x', x_0 \in S(f, u_0, \lambda_0)$, 故对任意 $y \in K(\lambda_0)$, 我们有

$$f(F(x', y, u_0)) \subseteq \mathbb{R}_+, \quad f(F(x_0, y, u_0)) \subseteq \mathbb{R}_+. \quad (3.11)$$

因为 $F(\cdot, y, u_0)$ 在 $K(\lambda_0)$ 上是严格 C -凹的, 故对任意 $t \in (0, 1)$, 可得

$$F(tx' + (1-t)x_0, y, u_0) \subseteq tF(x', y, u_0) + (1-t)F(x_0, y, u_0) + \text{int}C. \quad (3.12)$$

令 $x(t) := tx' + (1-t)x_0$. 显然, $x(t) \in K(\lambda_0)$. 对 W_0 , 我们知道存在 $0 \in X$ 的邻域 W_1 使得 $W_1 + W_1 \subseteq W_0$. 这样, 存在 $t_0 \in (0, 1)$ 使得 $x(t_0) \in x_0 + W_1$. 于是,

$$x(t_0) + W_1 \subseteq x_0 + W_1 + W_1 \subseteq x_0 + W_0. \quad (3.13)$$

根据 $x(t_0) \in K(\lambda_0)$ 和引理 2.1 可知, 存在 $x'_n \in K(\lambda_n)$ 使得 $x'_n \rightarrow x(t_0)$. 这样, 当 n 足够大时, 我们有 $x'_n \in x(t_0) + W_1$. 结合 (3.8) 和 (3.13), 可知 $x'_n \notin S(f, u_n, \lambda_n)$. 因此, 存在 $y'_n \in K(\lambda_n)$ 使得 $f(F(x'_n, y'_n, u_n)) \not\subseteq \mathbb{R}_+$. 于是, 存在 $z'_n \in F(x'_n, y'_n, u_n)$ 满足

$$f(z'_n) < 0. \quad (3.14)$$

由 $y'_n \in K(\lambda_n)$ 和引理 2.2 可知, 存在 $y' \in K(\lambda_0)$ 以及 $\{y'_n\}$ 的子序列 $\{y'_{n_k}\}$ 使得 $y'_{n_k} \rightarrow y'$. 不失一般性, 我们假设 $y'_n \rightarrow y'$. 注意到 $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在点 $(x(t_0), y', u_0)$ 处是上半连续的, 由引理 2.2 可知, 存在 $z' \in F(x(t_0), y', u_0)$ 以及 $\{z'_n\}$ 的子序列 $\{z'_{n_k}\}$ 使得 $z'_{n_k} \rightarrow z'$. 不失一般性, 我们假设 $z'_n \rightarrow z'$. 因此, $f(z'_n) \rightarrow f(z')$. 根据 (3.14), 有

$$f(z') \leq 0. \quad (3.15)$$

另一方面, 由 (3.11)、(3.12) 和 $f \in B^*$, 可知 $f(z') > 0$, 这与 (3.15) 矛盾. $\square$

注 3.1 引理 3.4 与文献 [16, 引理 3.1]、[15, 引理 3.2]、[21, 引理 3.1] 和 [22, 引理 3.1] 相比较, 我们既不需要映射的单调性假设, 也不需要与解映射信息相关的假设.

定理 3.1 设 $E(u_0, \lambda_0) \neq \emptyset$ 且 $(u_0, \lambda_0) \in W \times \Lambda$. 假设下面条件成立,

- (i) $S(\cdot, u_0, \lambda_0)$ 在 B^* 上是下半连续的;
- (ii) 对任意给定的 $f_0 \in B^*$, $S(f_0, \cdot, \cdot)$ 在点 (u_0, λ_0) 处是下半连续的;
- (iii) 对每个 $x \in K(\lambda_0)$, $F(x, \cdot, u_0)$ 在 $K(\lambda_0)$ 上是 C -似凸的,

则 $E(\cdot, \cdot)$ 在 (u_0, λ_0) 点是下半连续的.

证明 由引理 3.2 可知,

$$\bigcup_{f \in B^\#} S(f, u_0, \lambda_0) \subseteq E(u_0, \lambda_0) \subseteq \text{cl} \left(\bigcup_{f \in B^\#} S(f, u_0, \lambda_0) \right).$$

对任意 $x_0 \in E(u_0, \lambda_0)$ 以及 x_0 的任意邻域 U , 有

$$x_0 \in E(u_0, \lambda_0) \subseteq \text{cl} \left(\bigcup_{f \in B^\#} S(f, u_0, \lambda_0) \right).$$

因此,

$$U \cap \left(\bigcup_{f \in B^\#} S(f, u_0, \lambda_0) \right) \neq \emptyset.$$

这样, 我们知道存在 $f_0 \in B^\#$ 使得 $U \cap S(f_0, u_0, \lambda_0) \neq \emptyset$. 因为 $S(f_0, \cdot, \cdot)$ 在点 (u_0, λ_0) 处是下半连续的, 故存在 (u_0, λ_0) 的邻域 $U(u_0) \times U(\lambda_0)$ 使得

$$U \cap S(f_0, u, \lambda) \neq \emptyset, \quad \forall (u, \lambda) \in U(u_0) \times U(\lambda_0).$$

由于 $S(f_0, u, \lambda) \subseteq E(u, \lambda)$, 我们可得

$$U \cap E(u, \lambda) \neq \emptyset, \quad \forall (u, \lambda) \in U(u_0) \times U(\lambda_0).$$

因此, $E(\cdot, \cdot)$ 在点 (u_0, λ_0) 处是下半连续的. □

由引理 3.3、3.4 和定理 3.1, 我们可得下面的定理.

定理 3.2 设 $E(u_0, \lambda_0) \neq \emptyset$ 且 $(u_0, \lambda_0) \in W \times \Lambda$. 假设下面条件成立,

- (i) $K(\lambda_0)$ 是非空紧凸集以及 $K(\cdot)$ 在 λ_0 点是连续的;
- (ii) 对每个 $y \in K(\lambda_0)$, $F(\cdot, y, u_0)$ 在 $K(\lambda_0)$ 上是严格 C -凹的;
- (iii) $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在 $K(\lambda_0) \times K(\lambda_0) \times \{u_0\}$ 上是连续的且具有非空紧值的;
- (iv) 对每个 $x \in K(\lambda_0)$, $F(x, \cdot, u_0)$ 在 $K(\lambda_0)$ 上是 C -似凸的,

则 $E(\cdot, \cdot)$ 在点 (u_0, λ_0) 处是下半连续的.

注 3.2 文献 [15–17, 21–24] 利用映射的单调性条件或者解映射信息的条件得到解映射的下半连续性. 在定理 3.2 中, 我们把这些条件替换为严格 C -凹性.

4 含参广义向量均衡问题有效解映射的 Hausdorff 上半连续性

本节利用标量化方法, 讨论含参广义向量均衡问题有效解映射的 Hausdorff 上半连续性.

引理 4.1 设 $(f_0, u_0, \lambda_0) \in B^* \times W \times \Lambda$, $K(\lambda_0)$ 是非空紧集, $K(\cdot)$ 在点 λ_0 处连续, 且 $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在 $K(\lambda_0) \times K(\lambda_0) \times \{u_0\}$ 上是下半连续的, 则 $S(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在点 (f_0, u_0, λ_0) 处是上半连续的, 这里 B^* 上的拓扑是弱*拓扑.

证明 反证法. 假设 $S(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在点 (f_0, u_0, λ_0) 处不是上半连续的, 则存在 $S(f_0, u_0, \lambda_0)$ 的邻域 W_0 , 使得对于 (f_0, u_0, λ_0) 的任意邻域 $U(f_0) \times U(u_0) \times U(\lambda_0)$, 存在 $(f', u', \lambda') \in U(f_0) \times U(u_0) \times U(\lambda_0)$ 满足 $S(f', u', \lambda') \not\subset W_0$. 这样, 可以找到序列 $\{(f_n, u_n, \lambda_n)\}$ 满足 $(f_n, u_n, \lambda_n) \rightarrow (f_0, u_0, \lambda_0)$, 且

$$S(f_n, u_n, \lambda_n) \not\subset W_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

因此, 存在

$$x_n \in S(f_n, u_n, \lambda_n) \tag{4.1}$$

使得

$$x_n \notin W_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

注意到 $K(\cdot)$ 在点 λ_0 是上半连续的以及 $x_n \in K(\lambda_n)$, 由引理 2.2, 我们有 $x_0 \in K(\lambda_0)$ 以及 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $x_{n_k} \rightarrow x_0$. 不失一般性, 我们假设 $x_n \rightarrow x_0$. 假若 $x_0 \notin S(f_0, u_0, \lambda_0)$, 则存在 $y_0 \in K(\lambda_0)$ 使得

$$f_0(F(x_0, y_0, u_0)) \not\subset \mathbb{R}_+.$$

故存在 $z_0 \in F(x_0, y_0, u_0)$ 使得

$$f_0(z_0) < 0. \quad (4.3)$$

注意到 $K(\cdot)$ 在点 λ_0 是下半连续的, $y_0 \in K(\lambda_0)$, 由引理 2.1 知, 存在 $y_n \in K(\lambda_n)$ 使得 $y_n \rightarrow y_0$. 由于 $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在点 (x_0, y_0, u_0) 是下半连续的, $z_0 \in F(x_0, y_0, u_0)$, 根据引理 2.1, 存在 $z_n \in F(x_n, y_n, u_n)$ 使得 $z_n \rightarrow z_0$. 因为 $f_n \xrightarrow{w^*} f_0$, 易知 $f_n(z_n) \rightarrow f_0(z_0)$. 结合 (4.3), 可知当 n 足够大时, 有 $f_n(z_n) < 0$, 这与 (4.1) 矛盾. 因此, $x_0 \in S(f_0, u_0, \lambda_0)$. 显然, $x_n \rightarrow x_0 \in W_0$, 这与 (4.2) 矛盾. $\square$

引理 4.2 设 $S(f_0, u_0, \lambda_0) \neq \emptyset$ 且 $(f_0, u_0, \lambda_0) \in B^* \times W \times \Lambda$. 如果 $K(\lambda_0)$ 是非空紧集且 $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在 $K(\lambda_0) \times K(\lambda_0) \times \{u_0\}$ 上是下半连续的, 则 $S(f_0, u_0, \lambda_0)$ 是紧的.

证明 对任意序列

$$\{x_n\} \subseteq S(f_0, u_0, \lambda_0), \quad (4.4)$$

满足 $x_n \rightarrow x_0$, 我们证明 $x_0 \in S(f_0, u_0, \lambda_0)$. 假若 $x_0 \notin S(f_0, u_0, \lambda_0)$, 则存在 $y_0 \in K(\lambda_0)$ 使得

$$f_0(F(x_0, y_0, u_0)) \not\subset \mathbb{R}_+.$$

因此, 存在 $z_0 \in F(x_0, y_0, u_0)$ 满足

$$f_0(z_0) < 0. \quad (4.5)$$

注意到 $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在点 (x_0, y_0, u_0) 是下半连续的, 且 $z_0 \in F(x_0, y_0, u_0)$, 由引理 2.1 可知, 存在 $z_n \in F(x_n, y_0, u_0)$ 使得 $z_n \rightarrow z_0$. 故 $f_0(z_n) \rightarrow f_0(z_0)$. 由 (4.5), 当 n 足够大时, 我们有 $f_0(z_n) < 0$, 这与 (4.4) 矛盾. 因此, $x_0 \in S(f_0, u_0, \lambda_0)$. $\square$

定理 4.1 设 $(u_0, \lambda_0) \in W \times \Lambda$, 且满足下列条件:

- (i) $S(\cdot, u_0, \lambda_0)$ 在 B^* 上是下半连续的;
- (ii) $K(\lambda_0)$ 是非空紧集, 且 $K(\cdot)$ 在点 λ_0 是连续的;
- (iii) $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在 $K(\lambda_0) \times K(\lambda_0) \times \{u_0\}$ 上是下半连续的;
- (iv) 对任意 $(u, \lambda) \in W \times \Lambda$ 和 $x \in K(\lambda)$, $F(x, \cdot, u)$ 在 $K(\lambda)$ 上是 C -似凸的,

则 $E(\cdot, \cdot)$ 在点 (u_0, λ_0) 是 Hausdorff 上半连续的.

证明 反证法. 假设 $E(\cdot, \cdot)$ 在点 (u_0, λ_0) 不是 Hausdorff 上半连续的, 则存在 $0 \in X$ 的邻域 W_0 使得对 (u_0, λ_0) 的任意邻域 $U(u_0) \times U(\lambda_0)$, 存在 $(u', \lambda') \in U(u_0) \times U(\lambda_0)$ 满足 $E(u', \lambda') \not\subset E(u_0, \lambda_0) + W_0$. 因此, 存在序列 $\{(u_n, \lambda_n)\}$ 满足 $(u_n, \lambda_n) \rightarrow (u_0, \lambda_0)$, 且

$$E(u_n, \lambda_n) \not\subset E(u_0, \lambda_0) + W_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

这样, 我们知道存在

$$x_n \in E(u_n, \lambda_n) \quad (4.6)$$

使得

$$x_n \notin E(u_0, \lambda_0) + W_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.7)$$

由引理 3.1, 有

$$E_w(u_n, \lambda_n) = \bigcup_{f \in B^*} S(f, u_n, \lambda_n).$$

显然, $E(u_n, \lambda_n) \subseteq E_w(u_n, \lambda_n)$. 这样, 结合 (4.6) 可得

$$x_n \in \bigcup_{f \in B^*} S(f, u_n, \lambda_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

因此, 存在 $f_n \in B^*$ 使得

$$x_n \in S(f_n, u_n, \lambda_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.8)$$

由注 2.1 可知, B^* 是弱 * 紧的, 从而存在 $\{f_n\}$ 的子序列 $\{f_{n_k}\}$ 以及 $f_0 \in B^*$ 使得 $f_{n_k} \xrightarrow{w^*} f_0$. 不失一般性, 我们可以假设 $f_n \xrightarrow{w^*} f_0$. 由引理 4.2 可知, $S(f_0, u_0, \lambda_0)$ 是紧的. 又由引理 4.1 易知, $S(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在点 (f_0, u_0, λ_0) 是上半连续的. 注意到 (4.8) 以及引理 2.2, 我们知道存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 以及存在 $x_0 \in S(f_0, u_0, \lambda_0)$ 使得 $x_{n_k} \rightarrow x_0$. 由引理 3.2, 有

$$\bigcup_{f \in B^\#} S(f, u_0, \lambda_0) \subseteq E(u_0, \lambda_0) \subseteq E_w(u_0, \lambda_0) = \bigcup_{f \in B^*} S(f, u_0, \lambda_0) \subseteq \text{cl}\left(\bigcup_{f \in B^\#} S(f, u_0, \lambda_0)\right).$$

故

$$x_0 \in \bigcup_{f \in B^*} S(f, u_0, \lambda_0) \subseteq \text{cl}\left(\bigcup_{f \in B^\#} S(f, u_0, \lambda_0)\right) = \text{cl}(E(u_0, \lambda_0)) \subseteq E(u_0, \lambda_0) + W_0.$$

结合 $x_{n_k} \rightarrow x_0$ 可知, 当 k 足够大时, 有 $x_{n_k} \in E(u_0, \lambda_0) + W_0$, 这与 (4.7) 矛盾. $\square$

由引理 3.3 和定理 4.1, 我们可以得到下面的定理.

定理 4.2 设 $(u_0, \lambda_0) \in W \times \Lambda$, 且满足下列条件:

- (i) $K(\lambda_0)$ 是非空紧凸集, $K(\cdot)$ 在 λ_0 点是连续的;
- (ii) 对每个 $y \in K(\lambda_0)$, $F(\cdot, y, u_0)$ 在 $K(\lambda_0)$ 上是严格 C -凹的;
- (iii) $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在 $K(\lambda_0) \times K(\lambda_0) \times \{u_0\}$ 上是连续的且具有非空紧值的;
- (iv) 对每个 $(u, \lambda) \in W \times \Lambda$ 以及对每个 $x \in K(\lambda)$, $F(x, \cdot, u)$ 在 $K(\lambda)$ 上是 C -似凸的,

则 $E(\cdot, \cdot)$ 在点 (u_0, λ_0) 处是 Hausdorff 上半连续的.

注 4.1 标量化方法是处理解映射下半连续性的一种有效方法 (参见文献 [13–17, 21, 22]). 然而, 到目前为止, 几乎没有文献利用标量化方法研究解映射的上半连续性或者 Hausdorff 上半连续性. 在定理 4.2 的证明中, 我们利用标量化方法得到了解映射的 Hausdorff 上半连续性, 方法是新的.

最后, 我们给出一个例子说明定理 3.2 和 4.2 的条件是易于满足的.

例 4.1 设 $Y = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ 以及 $X = W = \Lambda = \mathbb{R}$. 记 Y 中的闭单位球为 B_Y , 定义集值映射 $F : X \times X \times W \rightarrow 2^Y$ 如下:

$$F(x, y, u) = (f_1(x, y, u), f_2(x, y, u)) + B_Y,$$

其中

$$f_1(x, y, u) = -x^2 + 3xy \sin u + y^2 - 2y \cos u + x + \sin u + 2,$$

以及

$$f_2(x, y, u) = -x^2 \cos u + xy \sin u + y^2 \cos u + x \sin u + 4y + 4 \cos u.$$

进一步, 定义集值映射 $K: \Lambda \rightarrow 2^X$ 为

$$K(\lambda) := \{x \in R : -5 + \sin \lambda \leq x \leq 5 + \cos \lambda\}, \quad \lambda \in \Lambda,$$

则容易验证定理 3.2 和 4.2 的所有条件都满足. 又因 $0 \in E(0, 0)$, 故由定理 3.2 可知, $E(\cdot, \cdot)$ 在点 $(0, 0)$ 是下半连续的, 从而, 由定理 4.2 可知, $E(\cdot, \cdot)$ 在点 $(0, 0)$ 是 Hausdorff 上半连续的.

致谢 衷心感谢两名匿名审稿人所提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Chen G Y, Huang X X, Yang X Q. Vector Optimization: Set-valued and Variational Analysis. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 541. Berlin: Springer-Verlag, 2005
- 2 Giannessi F. Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria. Dordrecht: Kluwer Academic, 2000
- 3 Chen G Y. Existence of solutions for a vector variational inequality: An extension of Hartman-Stampacchia theorem. J Optim Theory Appl, 1992, 74: 445–456
- 4 Ansari Q H, Konnov I V, Yao J C. Existence of a solution and variational principles for vector equilibrium problems. J Optim Theory Appl, 2001, 110: 481–492
- 5 Ansari Q H. Existence of solutions of systems of generalized implicit vector quasi-equilibrium problems. J Math Anal Appl, 2008, 341: 1271–1283
- 6 Gong X H. Strong vector equilibrium problems. J Global Optim, 2006, 36: 339–349
- 7 Huang N J, Fang Y P. On vector variational-like inequalities in reflexive Banach spaces. J Global Optim, 2005, 32: 495–505
- 8 Huang N J, Li J, Yao J C. Gap functions and existence of solutions to a system of vector equilibrium problems. J Optim Theory Appl, 2007, 133: 201–212
- 9 Anh L Q, Khanh P Q. Semicontinuity of the solution set of parametric multivalued vector quasiequilibrium problems. J Math Anal Appl, 2004, 294: 699–711
- 10 Anh L Q, Khanh P Q. On the stability of the solution sets of general multivalued vector quasiequilibrium problems. J Optim Theory Appl, 2007, 135: 271–284
- 11 Anh L Q, Khanh P Q. Continuity of solution maps of parametric quasiequilibrium problems. J Global Optim, 2010, 46: 247–259
- 12 Huang N J, Li J, Thompson H B. Stability for parametric implicit vector equilibrium problems. Math Comput Modelling, 2006, 43: 1267–1274
- 13 Gong X H. Continuity of the solution set to parametric weak vector equilibrium problems. J Optim Theory Appl, 2008, 139: 35–46
- 14 Gong X H, Yao J C. Lower semicontinuity of the set of efficient solutions for generalized systems. J Optim Theory Appl, 2008, 138: 197–205
- 15 Chen C R, Li S J, Teo K L. Solution semicontinuity of parametric generalized vector equilibrium problems. J Global Optim, 2009, 45: 309–318
- 16 Chen B, Huang N J. Continuity of the solution mapping to parametric generalized vector equilibrium problems. J Global Optim, 2013, 56: 1515–1528
- 17 Cheng Y H, Zhu D L. Global stability results for the weak vector variational inequality. J Global Optim, 2005, 32: 543–550
- 18 Fang Y P, Huang N J. Upper semicontinuity of the solution maps in homogeneous vector quasi-equilibrium problems. Optimization, 2006, 55: 231–239
- 19 Han Y, Gong X H. Lower semicontinuity of solution mapping to parametric generalized strong vector equilibrium problems. Appl Math Lett, 2014, 28: 38–41
- 20 Khanh P Q, Luu L M. Upper semicontinuity of the solution set to parametric vector quasivariational inequalities. J Global Optim, 2005, 32: 569–580
- 21 Li S J, Fang Z M. Lower semicontinuity of the solution mappings to a parametric generalized Ky Fan inequality. J Optim Theory Appl, 2010, 147: 507–515
- 22 Li S J, Liu H M, Zhang Y, et al. Continuity of the solution mappings to parametric generalized strong vector equilibrium problems. J Global Optim, 2013, 55: 597–610

- 23 Wangkeeree R, Wangkeeree R, Preechasilp P. Continuity of the solution mappings to parametric generalized vector equilibrium problems. *Appl Math Lett*, 2014, 29: 42–45
- 24 Zhang W Y, Fang Z M, Zhang Y. A note on the lower semicontinuity of efficient solutions for parametric vector equilibrium problems. *Appl Math Lett*, 2013, 26: 469–472
- 25 Aubin J P, Ekeland I. *Applied Nonlinear Analysis*. New York: Wiley, 1984
- 26 Göpfert A, Riahi H, Tammer C, et al. *Variational Methods in Partially Ordered Spaces*. New York: Springer, 2003

Stability of efficient solutions to parametric generalized vector equilibrium problems

HAN Yu & HUANG NanJing

Abstract In this paper, some stability results concerning the lower semicontinuity and the Hausdorff upper semicontinuity of the efficient solution mappings to a class of parametric generalized vector equilibrium problems are given under suitable conditions with neither the monotonicity of mappings nor any information of the solution mappings. By the strict C -concavity and C -convexlikeness of the mappings, the lower semicontinuity of the efficient solution mapping to the parametric generalized vector equilibrium problem is obtained. Moreover, the Hausdorff upper semicontinuity of the efficient solution mapping to the parametric generalized vector equilibrium problem is proved by using the scalarization method.

Keywords parametric generalized vector equilibrium problem, efficient solution, lower semicontinuity, Hausdorff upper semicontinuity

MSC(2010) 49K40, 90C31

doi: 10.1360/012016-12