论 文

多输入下三角系统的几何描述

张端^{①*}, 谈自忠^②, 何熊熊^①, 邹涛^①^① 浙江工业大学信息工程学院, 杭州 310023^② Department of Electrical and Systems Engineering, Washington University, St. Louis, Missouri 63130, USA

* 通信作者. E-mail: dzhang@zjut.edu.cn

收稿日期: 2009-12-29; 接受日期: 2010-05-30

国家高科技研究发展计划 (批准号: 2009AA04Z138) 和国家自然科学基金 (批准号: 60604015, 60774021) 资助项目

摘要 针对多输入情形, 考虑非线性系统通过坐标变换和状态反馈等价于下三角系统的问题. 首先给出了多输入下三角非线性系统的两种基本形式. 利用奇异分布的有关理论, 给出了多输入非线性系统通过反馈等价于非自治下三角形式系统的充要条件. 借助算法说明了如何通过状态反馈和坐标变换实现上述系统间的等价转换.

关键词 多输入系统 非线性系统 下三角系统 反馈等价

1 引言

研究非线性系统等价性问题的目的是将较复杂的非线性系统转换成为较为简单的系统, 以简化控制器的设计. 微分几何方法是研究非线性系统等价性比较成功的途径, 见文献 [1,2]. 采用微分几何方法讨论非线性系统等价性最早出现于精确反馈线性化的研究. 1973 年 Krener 给出了通过局部坐标变换将仿射非线性系统等价转换为线性系统的方法, 见文献 [3]. 1978 年 Brockett 得到了通过坐标变换和 $u = \alpha(\xi) + v$ 形式的反馈将单输入非线性系统转换为能控型线性系统的充要条件, 见文献 [4]. 20 世纪 80 年代, 陆续解决了通过 $u = \alpha(\xi) + \beta(\xi)v$ 形式的反馈和坐标变换实现反馈线性化的问题, 以及多变量系统的反馈线性化和部分反馈线性化等问题, 见文献 [5–8]. 1999 年 Schwartz, Isidori 和 Tarn 提出了一类可以清晰揭示系统零动态的标准型, 见文献 [9]. 2003 年, Cheng 和 Lin 提出通过 $u = \alpha(\xi) + v$ 形式的反馈成为 p -标准形的充要条件, 并给出获得反馈和坐标变换的算法, 见文献 [10]. 随后 Respondek 给出通过 $u = \alpha(\xi) + \beta(\xi)v$ 形式的反馈成为 p -标准形的充要条件, 见文献 [11]. Astolfi 和 Kaliora 分别给出了一个单输入系统能通过坐标变换和反馈成为前馈形式的条件, 见文献 [12]. Tall 和 Respondek 用 Poincare 标准型的方法给出了能通过坐标变换和反馈使系统按 Poincare 标准型展开的前 m 阶成为严格前馈形式的充要条件, 见文献 [13]. 严格的说, 这只是一种近似转换为严格前馈形式的充要条件, 类似于高阶近似线性化.

下三角系统是目前研究成果相当丰富的一类非线性系统, 比如 20 世纪 90 年代以来得到迅速发展的非线性控制器设计方法 — 后推法, 通常适用于这类系统. 2001 年 Kokotovic 和 Arcak 在非线形控制综述文章^[14]中所涉及大部分文献均处理下三角系统, 而文献 [15–18] 列举了部分 2001 年及以后发

引用格式: 张端, 谈自忠, 何熊熊, 等. 多输入下三角系统的几何描述. 中国科学: 信息科学, 2011, 41: 450–464

表的有关下三角系统的论文. 因此, 如果非线性系统能通过反馈和坐标变换等价于下三角系统, 往往意味着可能有更多地手段来设计其控制器.

对于单输入非线性系统, Celikovsky 和 Nijmeijer 给出了其能反馈等价于下三角系统的充要条件, 见文献 [19]. 然而, 多输入系统并不是对单输入系统的简单推广, 该文献末尾的结论和展望部分中提到“对多输入情形目前似乎难以给出 (与单变量情形) 相应的 (充要) 条件”. 此后该问题一直悬而未决. 我们认为这是因为多输入非线性系统的下三角形式与单输入非线性系统有两点显著差异: 第一, 单输入下三角系统的形式是单一的, 但当其扩展为多输入下三角系统时, 根据扩展方式不同, 所得的多输入下三角系统的形式不是唯一的; 第二, 对单输入下三角形式, p -标准型以及能精确反馈线性化的多输入非线性系统来说, 均能保证系统中直接导出的一组分布在状态反馈下对合关系和维数不变, 但对有的多输入下三角形式系统这一点不再成立, 这要求我们采用一些新的处理方法.

本文的主要工作大致可以总结为两个方面, 第一, 由单输入系统到多输入系统的两种不同扩展方式, 找出多输入下三角系统的两种基本形式; 第二, 给出非线性系统能通过反馈和坐标变换转换为上述两种多输入下三角系统基本形式的充分必要条件.

本文的结构安排如下, 第 1 节叙述研究问题的背景; 第 2 节探讨什么是多输入下三角形式; 第 3 节和第 4 节分别给出非线性系统通过反馈和坐标变换等价于两种多输入下三角基本形式的充要条件; 第 5 节对全文作出总结.

2 问题的提出

本文考虑的问题是在什么条件下如下非线性仿射系统

$$\dot{\xi} = F(\xi) + G(\xi)u, \quad (1)$$

其中 $\xi \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $F(\xi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $G(\xi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{nm}$ 均是光滑函数, 能通过坐标变换和状态反馈等价于一个具有下三角形式的多输入非线性系统, 所考虑的反馈是

$$u = \alpha(\xi) + \beta(\xi)v. \quad (2)$$

其中 $\alpha : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是光滑映射, $\beta(\xi)$ 是 m 阶非奇异方阵, 其元素 $\beta_{ij} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} (i, j = 1, 2, \dots, m)$ 是光滑函数, $v \in \mathbb{R}^m$ 是反馈后的系统输入; 考虑的坐标变换是

$$x = T(\xi) = (T_1(\xi), \dots, T_n(\xi))^T, \quad (3)$$

其中 $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是光滑映射.

单输入下三角系统其形式是

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_2, x_1), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(x_n, \dots, x_1), \\ \dot{x}_n &= v. \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $(x_1, \dots, x_n)^T$ 是状态量, v 是标量输入, $f_i : \mathbb{R}^{i+1} \rightarrow \mathbb{R} (i = 1, \dots, n-1)$ 是光滑函数并且在原点的一个邻域中满足 $\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} \underset{\text{a.e.}}{\neq} 0 (i = 1, \dots, n-1)$, 这里 a.e. 表示几乎处处, 即 $\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}$ 几乎处处不

为 0, 或者说除一个零测度集外不为 0. 如果 $\partial f_i / \partial x_{i+1}$ 在原点附近恒不等于 0 则意味着上述下三角形式可以实现精确反馈线性化.

然而, 对多输入的下三角非线性系统, 考察其可能的下三角形式, 与单输入系统比较会相对复杂, 我们认为其基本的形式有两种, 第一种基本形式可以认为来源于多个单输入下三角系统的“叠加”, 第二种基本形式可以看作是单输入下三角系统的输入“扩张”后形成的“块”三角系统. 第一种基本形式为

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,1} &= f_{1,1}(x_{1,2}, x_{1,1}), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{1,r_1-1} &= f_{1,r_1-1}(x_{1,r_1}, \dots, x_{1,1}), \\ \dot{x}_{1,r_1} &= v_1, \\ \Sigma_A : &\vdots \\ \dot{x}_{m,1} &= f_{m,1}(x_{m,2}, x_{m,1}, x_{m-1,r_{m-1}}, \dots, x_{m-1,1}, \dots, x_{1,r_1}, \dots, x_{1,1}), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{m,r_m-1} &= f_{m,r_m-1}(x_{m,r_m}, \dots, x_{m,1}, \dots, x_{1,r_1}, \dots, x_{1,1}), \\ \dot{x}_{m,r_m} &= v_m. \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $(x_{1,1}, \dots, x_{1,r_1}, \dots, x_{m,1}, \dots, x_{m,r_m})^T$ 是状态量, $(v_1, \dots, v_m)^T$ 是输入量, $r_1 + \dots + r_m = n$, $f_{i,j}$ ($1 \leq i \leq p-1, 1 \leq j \leq s_i$) 是光滑函数并在原点的一个邻域中 $\partial f_{i,j} / \partial x_{i,j+1} \stackrel{\text{a.e.}}{\neq} 0$. 第二种基本形式为

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,1} &= f_{1,1}(x_{2,1}, \dots, x_{2,s_2}, x_{1,1}, \dots, x_{1,s_1}), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{1,s_1} &= f_{1,s_1}(x_{2,1}, \dots, x_{2,s_2}, x_{1,1}, \dots, x_{1,s_1}), \\ &\vdots \\ \Sigma_B : \dot{x}_{p-1,1} &= f_{p-1,1}(x_{p,1}, \dots, x_{p,s_p}, \dots, x_{1,1}, \dots, x_{1,s_1}), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{p-1,s_{p-1}} &= f_{p-1,s_{p-1}}(x_{p,1}, \dots, x_{p,s_p}, \dots, x_{1,1}, \dots, x_{1,s_1}), \\ \dot{x}_{p,1} &= v_1, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{p,s_p} &= v_{s_p} = v_m. \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $(x_{1,1}, \dots, x_{1,s_1}, \dots, x_{p,1}, \dots, x_{p,s_p})^T$ 是状态向量, $(v_1, \dots, v_m)^T$ 是输入向量, $s_1 + \dots + s_p = n$, $s_p = m$, $s_1 \leq \dots \leq s_p$ (如果对 $i = 1, \dots, p-1$ 出现 $s_i > s_{i+1}$ 则表明该系统存在冗余方程), $f_{i,j}$ 是光滑函数, 函数 $f_{1,1}, \dots, f_{1,s_1}$ 有 $s_1 + s_2$ 个自变量, $f_{2,1}, \dots, f_{2,s_2}$ 有 $s_1 + s_2 + s_3$ 个自变量, 而 $f_{p-1,1}, \dots, f_{p-1,s_{p-1}}$ 有 $s_1 + \dots + s_p$ 个自变量, 在原点的一个邻域中 $\text{rank} \partial(f_{i,1}, \dots, f_{i,s_i}) / \partial(x_{i+1,1}, \dots, x_{i+1,s_{i+1}}) \stackrel{\text{a.e.}}{=} s_i$ ($i = 1, 2, \dots, p-1$).

按照微分几何中的记号, 确定系统 (1) 的向量场是

$$\begin{aligned} F &= F_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \cdots + F_n \frac{\partial}{\partial \xi_n}, \\ G^1 &= G_1^1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \cdots + G_n^1 \frac{\partial}{\partial \xi_n}, \\ &\vdots \\ G^m &= G_1^m \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \cdots + G_n^m \frac{\partial}{\partial \xi_n}; \end{aligned} \quad (7)$$

确定系统 Σ_A 的向量场是

$$\begin{aligned} f_A &= f_{1,1} \frac{\partial}{\partial x_{1,1}} + \cdots + f_{1,r_1-1} \frac{\partial}{\partial x_{1,r_1-1}} + \cdots + f_{m,1} \frac{\partial}{\partial x_{1,1}} + \cdots + f_{m,r_m-1} \frac{\partial}{\partial x_{m,r_m-1}}, \\ g_A^1 &= \frac{\partial}{\partial x_{1,r_1}}, \dots, g_A^m = \frac{\partial}{\partial x_{m,r_m}}; \end{aligned} \quad (8)$$

最后, 确定系统 Σ_B 的向量场是

$$\begin{aligned} f_B &= f_{1,1} \frac{\partial}{\partial x_{1,1}} + \cdots + f_{1,s_1} \frac{\partial}{\partial x_{1,s_1}} + \cdots + f_{p-1,1} \frac{\partial}{\partial x_{p-1,1}} + \cdots + f_{p-1,s_{p-1}} \frac{\partial}{\partial x_{p-1,s_{p-1}}}, \\ g_B^1 &= \frac{\partial}{\partial x_{p,1}}, \dots, g_B^m = \frac{\partial}{\partial x_{p,s_p}}. \end{aligned} \quad (9)$$

如果在坐标系 x 下有两个光滑向量场 $X = \sum_{i=1}^n X^i \partial / \partial x_i$ 和 $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \partial / \partial x_i$, 它们作李导数或者李括号积的运算结果仍然是一个向量场,

$$\text{ad}_X Y = \text{ad}_X^1 Y = [X, Y] = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}; \quad (10)$$

若记 $\text{ad}_X^0 Y = Y$, 则对 $i = 1, 2, \dots$, 记 $\text{ad}_X^i Y = \text{ad}_X(\text{ad}_X^{i-1} Y)$. 一组光滑向量场 $X_1, \dots, X_h$ 所张成的分布记为 $\text{span}\{X_1, \dots, X_h\}$, 该分布是对合的当且仅当对任意 $i, j = 1, \dots, h$ 向量场 $\text{ad}_{X_i} X_j$ 仍然属于此分布. 如果 $\mathcal{D}^1$ 和 $\mathcal{D}^2$ 均为光滑分布, 则 $\mathcal{D}^1 \oplus \mathcal{D}^2$ 表示所有属于 $\mathcal{D}^1$ 和 $\mathcal{D}^2$ 的向量场共同张成的分布. 如果分布 $\mathcal{D}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 U 中维数 $\dim(\mathcal{D})$ 不变, 则称该分布在 U 中是非奇异的, 否则是奇异的. 对奇异分布 $\mathcal{D}$, 用 $\bar{\mathcal{D}}$ 表示一个非奇异分布满足 $\bar{\mathcal{D}} \stackrel{\text{a.e.}}{=} \mathcal{D}$ (关于 $\mathcal{D}$ 是否存在满足此条件的非奇异分布以及如何找到该非奇异分布可参看文献 [19] 的定理 2、推论 1 和注 1). 若向量场 X 所张成的分布 $\text{span}\{X\}$ 为非奇异的, 则称 X 为非奇异向量场, 否则称为奇异向量场. 向量场 X 在坐标变换 $y = T(x)$ 下得到向量场 $T_*(X)$,

$$T_*(X)|_y = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial T_i}{\partial x_j} X_j \Big|_x \right) \frac{\partial}{\partial y_i}. \quad (11)$$

T_* 称为前推映射 [20].

3 等价转换为 Σ_A

为阐述非线性系统能等价转换为系统 Σ_A 或系统 (5) 的充分必要条件, 本节内容作如下安排: 首先通过引理 1 和引理 2 把非线性系统转化为一种简约型; 定理 1 进一步说明原系统能否通过状态反馈和坐标变换等价转换为下三角系统 Σ_A 的问题实际上正是简约型能否仅通过坐标变换实现下三角化的问题; 然后由算法 1 和 2 给出简约型能下三角化的充要条件, 定理 1 和 2 完整描述了非线性系统

等价转换为下三角系统 Σ_A 的充要条件; 算法 2 总结了上述充要条件的检验过程以及如何实现系统转换的过程, 其中对简约型作坐标变换采用了定理 3 给出的方法.

考虑到下三角系统 Σ_A 的各输入向量场所张成的分布显然是对合的, 立即可以得出如下引理^[1,2].

引理 1 如果系统 (1) 能等价转换为下三角系统 Σ_A , 则分布 $\mathcal{D} = \text{span}\{G^1, \dots, G^m\}$ 对合.

可以认为在引理 1 给出了系统 (1) 能等价转换为下三角系统 Σ_A 的一个必要条件. 当该条件成立时, 引理 2 将考虑对系统的形式作一定程度的简化, 以便进一步检验该系统是否可以转换为系统 Σ_A .

引理 2 如果系统 (1) 的分布 $\mathcal{D} = \text{span}\{G^1, \dots, G^m\}$ 对合, 则该系统能通过反馈和坐标变化等价转换为如下系统

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= f_1(z), \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-m} &= f_{n-m}(z), \\ \dot{z}_{n-m+1} &= w_1, \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= w_m.\end{aligned}\quad (12)$$

证 系统 (1) 的输入分布 $\mathcal{D}$ 是对合的, 因此由 Frobenius 定理在某个坐标变换下

$$\mathcal{D} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z_{n-m+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right\}.\quad (13)$$

在新坐标下

$$G^i = \sum_{j=1}^m \gamma_{ji} \frac{\partial}{\partial z_{n-m+j}}, i = 1, \dots, m,\quad (14)$$

其中 γ_{ji} 为光滑函数. 此时系统可以表示为

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= f_1(z), \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-m} &= f_{n-m}(z), \\ \dot{z}_{n-m+1} &= \lambda_1(z) + \sum_{i=1}^m \gamma_{1i}(z)u_i, \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= \lambda_m(z) + \sum_{i=1}^m \gamma_{mi}(z)u_i.\end{aligned}\quad (15)$$

其中 $\lambda_j(z) (1 \leq j \leq m)$ 为光滑函数. 作反馈 $u = \gamma^{-1}(w - \lambda)$ 即成为 (12) 式, 其中 γ 为矩阵 $(\gamma_{ij})_{m \times m}$, λ 为向量 $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$, 而 $w = (w_1, \dots, w_m)^T$ 为新的输入.

如果系统 (1) 满足引理 1 中的条件, 我们把系统 (12) 称为系统 (1) 的简约型. 简约型不仅在形式上较为简单, 更重要的是, 验证其是否可以等价转换为系统 Σ_A 较原系统简单, 正如下定理所述.

定理 1 系统 (1) 能通过状态反馈和坐标变换等价转换为下三角系统 Σ_A 的充分必要条件是分布 $\mathcal{D} = \text{span}\{G^1, \dots, G^m\}$ 对合并且该系统的简约型 (12) 能仅通过坐标变换转换为系统 Σ_A .

证 鉴于充分性是显而易见的我们仅讨论必要性. 分布 $\mathcal{D} = \text{span}\{G^1, \dots, G^m\}$ 的对合已由引理 1 保证, 故系统的简约型可用. 既然系统 (1) 等价于系统 Σ_A , 那么其简约型也能通过状态反馈和坐标

变换等价转换为系统 Σ_A . 假设简约型 (12) 需引入反馈才能转换为系统 Σ_A 的形式, 则作反馈后其形式可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= f_1(\mathbf{z}), \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-m} &= f_{n-m}(\mathbf{z}), \\ \dot{z}_{n-m+1} &= \alpha_1(\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^m \beta_{1i}(\mathbf{z})w_i, \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= \alpha_m(\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^m \beta_{mi}(\mathbf{z})w_i. \end{aligned} \quad (16)$$

系统 (16) 不符合下三角系统 Σ_A 在形式上的要求. 故进一步考察它通过何种坐标变换能转换为下三角系统 Σ_A . 如果有坐标变换将系统 (16) 转换为系统 Σ_A , 则也可把系统 (16) 转换为下面形式, 因为系统 Σ_A 为其特殊情形

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= b_1(\mathbf{x}), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-m} &= b_{n-m}(\mathbf{x}), \\ \dot{x}_{n-m+1} &= w_1, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= w_m. \end{aligned} \quad (17)$$

令从系统 (16) 到系统 (17) 的坐标变换为 $(x_1, \dots, x_n) = S(z_1, \dots, z_n)$, 由于系统 (17) 的前 $n-m$ 个方程并不出现输入变量, 因此

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_{n-m+1}} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_{n-m}}{\partial z_{n-m+1}} & \cdots & \frac{\partial x_{n-m}}{\partial z_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

这意味着

$$\frac{\partial x_i}{\partial z_j} = 0, \quad i = 1, \dots, n-m; j = n-m+1, \dots, n, \quad (19)$$

也就是说坐标变换 S 有如下形式

$$x_1 = S_1(z_1, \dots, z_{n-m}), \dots, x_{n-m} = S_{n-m}(z_1, \dots, z_{n-m}), \quad (20)$$

注意到 $x_i (i = 1, \dots, n-m)$ 仅与 $z_1, \dots, z_{n-m}$ 有关而与 $z_{n-m+1}, \dots, z_n$ 无关; 进一步按如下方式补全坐标变换

$$x_{n-m+1} = S_{n-m+1}(\mathbf{z}) = z_{n-m+1}, \dots, x_n = S_n(\mathbf{z}) = z_n. \quad (21)$$

在此坐标变换下, 对比系统 (16) 和系统 (17), 可知必有 $\alpha_1(\mathbf{z}) = 0, \beta_{ii} = 1 (1 \leq i \leq m)$ 以及 $\beta_{ki} = 0 (k \neq i)$. 这表明简约型 (12) 如果可以等价转换为系统 (17) 只需引入坐标变换而不必加入反馈, 作为系统 (17) 的特殊情形下三角系统 Σ_A 也是如此.

由定理 1, 问题转化为考察简约型 (12) 能否仅仅通过坐标变换转换为下三角系统 Σ_A . 令确定简约型 (12) 的向量场为

$$\begin{aligned} f_R &= f_{R,1} \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + f_{R,n-m} \frac{\partial}{\partial z_{n-m}}, \\ g_R^1 &= \frac{\partial}{\partial z_{n-m+1}}, \dots, g_R^m = \frac{\partial}{\partial z_n}. \end{aligned} \quad (22)$$

下面即将给出的简约型可转换为下三角系统 Σ_A 的充要条件有赖于如下算法对确定简约型的向量场即 (22) 式作适当的检验.

算法 1

步骤 1.1 对各输出向量场 $g_R^i (i = 1, 2, \dots, m)$ 检验下式是否成立

$$\text{ad}_{f_R} g_R^i \in \text{span}\{g_R^i\}. \quad (23)$$

假设有 $g_R^{i_1}, \dots, g_R^{i_c} (0 \leq c \leq m)$ 共 c 个输出向量场满足 (23) 式, 如果 $c = 0$, 则 $\mathcal{Y} = \mathcal{Z} = \{\phi\}$; 否则, 令 $\mathcal{Y}^{i_1, \dots, i_c} = \mathcal{Z}^{i_1, \dots, i_c} = \{g_R^{i_1}, \dots, g_R^{i_c}\}$, $\mathcal{Y} = \{\mathcal{Y}^{i_1, \dots, i_c}\}$, $\mathcal{Z} = \{\mathcal{Z}^{i_1, \dots, i_c}\}$, 并重新命名上述向量场 $Y_{n-j}^{i_1, \dots, i_c} = g_R^{i_{j+1}}$ 和 $Z_{n-j}^{i_1, \dots, i_c} = g_R^{i_{j+1}} (j = 0, 1, \dots, c-1)$. 从简约型 (12) 的形式知这些向量场的任何非空子集所张成的分布是对合的并且是非奇异的.

步骤 1.2 建立 $\mathcal{Y}$ 的子集 $\mathcal{Y}_A$ 和 $\mathcal{Y}_B$, 其中 $\mathcal{Y}_A$ 为 $\mathcal{Y}$ 中所有包含 n 个元素的集合 $\mathcal{Y}^\sigma$ 组成的集合, 这里的 $\sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_p$ 是一个上标 (步骤 1.1 中 $\mathcal{Y}^{i_1, i_2, \dots, i_c}$ 上标为 σ 的特例), 而 $\mathcal{Y}_B = \mathcal{Y} - \mathcal{Y}_A$. 如果 $\mathcal{Y}_B = \phi$ (与 $\mathcal{Y}_B = \{\phi\}$ 不同), 退出算法; 如果 $\mathcal{Y}_B = \{\phi\}$ (此时应有 $\mathcal{Y}_A = \phi$), 令 $\mathcal{Z}_A = \phi$ 和 $\mathcal{Z}_B = \{\phi\}$; 对其余情形, 令 $\mathcal{Z}_A = \{\mathcal{Z}^\sigma | \mathcal{Y}^\sigma \in \mathcal{Y}_A\}$ 和 $\mathcal{Z}_B = \{\mathcal{Z}^\sigma | \mathcal{Y}^\sigma \in \mathcal{Y}_B\}$. 转步骤 1.3.

步骤 1.3 对所有 $\mathcal{Y}^\sigma \in \mathcal{Y}_B$ 以及所有输入向量场 $g_R^i \notin \mathcal{Y}^\sigma$, 检验是否满足以下条件: 第一, 如下向量场集合

$$\mathcal{Y}^\sigma \cup \{g_R^i = \text{ad}_{f_R}^0 g_R^i\}, \mathcal{Y}^\sigma \cup \{g_R^i, \text{ad}_{f_R} g_R^i, \dots, \mathcal{Y}^\sigma \cup \{g_R^i, \text{ad}_{f_R} g_R^i, \dots, \text{ad}_{f_R}^k g_R^i\}, \quad (24)$$

各自所张成的分布均几乎处处对合, 其中 k 是满足如下式子的最小非负整数

$$\text{ad}_{f_R}^{k+1} g_R^i \stackrel{\text{a.e.}}{\in} \text{span}\{\mathcal{Y}^\sigma \cup \{g_R^i, \text{ad}_{f_R} g_R^i, \dots, \text{ad}_{f_R}^k g_R^i\}\}; \quad (25)$$

第二, 存在一组向量场 $C_0^i, C_1^i, \dots, C_k^i$, 对任何 $k \geq j \geq 0$, $\text{span}(\mathcal{Z}^\sigma \cup \{C_0^i, C_1^i, \dots, C_j^i\})$ 是非奇异对合分布, 并在原点的一个邻域内满足,

$$\text{span}(\mathcal{Z}^\sigma \cup \{C_0^i, C_1^i, \dots, C_j^i\}) \stackrel{\text{a.e.}}{=} \text{span}(\mathcal{Y}^\sigma \cup \{g_R^i, \text{ad}_{f_R} g_R^i, \dots, \text{ad}_{f_R}^j g_R^i\}). \quad (26)$$

如果上述两条件满足则引入记号

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^{\sigma, i} &= \mathcal{Y}^\sigma \cup \{g_R^i, \text{ad}_{f_R} g_R^i, \dots, \text{ad}_{f_R}^k g_R^i\}, \\ \mathcal{Z}^{\sigma, i} &= \mathcal{Z}^\sigma \cup \{C_0^i, C_1^i, \dots, C_k^i\}, \end{aligned} \quad (27)$$

令集合 $\mathcal{Y}^\sigma$ 元素的个数为 $c (c \geq 0)$, 改记原 $\mathcal{Y}^\sigma$ 中的向量场 (如果存在的话) 为 $Y_{n-j}^{\sigma, i} = Y_{n-j}^\sigma$, $Z_{n-j}^{\sigma, i} = Z_{n-j}^\sigma (j = 0, 1, \dots, c-1)$; 并对 $j = 0, 1, \dots, k$, 记 $Y_{n-c-j}^{\sigma, i} = \text{ad}_{f_R}^j g_R^i$, $Z_{n-c-j}^{\sigma, i} = C_j^i$. 如果对所有 $\mathcal{Y}^\sigma \in \mathcal{Y}_B$ 和 $g_R^i \notin \mathcal{Y}^\sigma$ 找不到满足上述两条件的 $\mathcal{Y}^{\sigma, i}$, 则令 $\mathcal{Y}_B = \mathcal{Z}_B = \varphi$; 否则把 $\mathcal{Y}_B$ 改为所有这些的 $\mathcal{Y}^{\sigma, i}$ 的集合 (去除 $\mathcal{Y}_B$ 中原来的所有元素), 而 $\mathcal{Z}_B$ 改为 $\mathcal{Z}_B = \{\mathcal{Z}^\sigma | \mathcal{Y}^\sigma \in \mathcal{Y}_B\}$. 以新的 $\mathcal{Y}_B$, 重置集合 $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_A \cup \mathcal{Y}_B$; 以新的 $\mathcal{Z}_B$, 重置集合 $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_A \cup \mathcal{Z}_B$, 返回步骤 1.2.

定理 2 简约型 (12) 能通过坐标变换 $x = Q(z)$ 而具有下三角系统 Σ_A 的形式当且仅当 $\mathcal{Y}$ 中存在元素 $\mathcal{Y}^\sigma$ 满足 $\dim(\text{span}\mathcal{Y}^\sigma) \stackrel{\text{a.e.}}{=} n$.

证 必要性. 先检验下三角系统 Σ_A 是否满足题设中的条件. 对下三角系统 Σ_A , 算法 1 保证了 $\mathcal{Y}$ 包含至少一个元素, 设有 $\mathcal{Y}^\sigma \in \mathcal{Y}$, 其所有元素列写如下

$$\begin{aligned} Y_1^\sigma &= \text{ad}_f^{r_1-1} g^1, \dots, Y_{r_1-1}^\sigma = \text{ad}_f g^1, Y_{r_1}^\sigma = g^1, \dots, \\ Y_{n-r_m+1}^\sigma &= \text{ad}_f^{r_m-1} g^m, \dots, Y_{n-1}^\sigma = \text{ad}_f g^m, Y_n^\sigma = g^m. \end{aligned} \quad (28)$$

上式结合算法 1 的步骤表明 $\sigma = m, \dots, 1$, 同时由李导数的计算公式

$$\begin{aligned} Y_i^\sigma &\in \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_{j,k}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j,r_j}}, \frac{\partial}{\partial x_{j+1,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j+1,r_{j+1}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{m,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{m,r_m}}\right\}, \\ i &= r_1 + \dots + r_{j-1} + k, 1 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq r_j, \end{aligned} \quad (29)$$

其中假设 $r_0 = 0$, $x_{j+1,0} = x_{j,r_j}$ ($j = 1, \dots, m-1$). (28) 式中的向量场几乎处处可张成 n 维分布, 而该分布与下列向量场

$$\frac{\partial}{\partial x_{1,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{1,r_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{m,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{m,r_m}}. \quad (30)$$

张成的分布几乎处处相等; 进一步地, (28) 式中列写的后 i ($i = 1, \dots, n$) 个向量场张成的分布与 (30) 式中列写的后 i 个向量场张成的分布几乎处处相等. 注意到下三角系统 Σ_A 只是简约型 (12) 在坐标变换 $x = Q(z)$ 后的表示形式, 由李导数计算的性质可知, 对简约型 (12) 在完成算法 1 后 $\mathcal{Y}$ 也包含至少一个元素, 该元素包含以下向量场

$$Q_*(\text{ad}_f^{r_1-1} g^1), \dots, Q_*(\text{ad}_f g^1), Q_*(g^1), \dots, Q_*(\text{ad}_f^{r_m-1} g^m), \dots, Q_*(\text{ad}_f g^m), Q_*(g^m). \quad (31)$$

上述向量场几乎处处可张成 n 维分布, 而其张成的分布与下列向量场

$$Q_*\left(\frac{\partial}{\partial x_{1,1}}\right), \dots, Q_*\left(\frac{\partial}{\partial x_{1,r_1}}\right), \dots, Q_*\left(\frac{\partial}{\partial x_{m,1}}\right), \dots, Q_*\left(\frac{\partial}{\partial x_{m,r_m}}\right). \quad (32)$$

张成的分布几乎处处相等, 并且 (31) 式和 (32) 式各自的后 i 个向量场张成的分布几乎处处相等.

充分性. 由定理中的条件和算法 1 知, 对应与 $\mathcal{Y}^\sigma$ 中存在 n 个向量场 $Y_1^\sigma, \dots, Y_n^\sigma$, 其中包括 (22) 式中给出的 m 个输入向量场 g_R^i ($1 \leq i \leq m$). 不失一般性地, 假设 $Y_{r_1}^\sigma = g_R^1, Y_{r_1+r_2}^\sigma = g_R^2, \dots, Y_{r_1+\dots+r_m}^\sigma = g_R^m$, 其中 $r_1 + \dots + r_m = n$. 由算法 1 知道存在一组 n 维非奇异向量场 $X_{1,1}, \dots, X_{1,r_1}, \dots, X_{m,1}, \dots, X_{m,r_m}$ 使得对 $r_1 + \dots + r_{p-1} < q \leq r_1 + \dots + r_p$ ($1 \leq p \leq m$ 并假设 $r_0 = 0$) 有

$$\begin{aligned} \text{span}\{Y_q^\sigma, \dots, Y_n^\sigma\} &\stackrel{\text{a.e.}}{=} \text{span}\{X_{p,q-(r_1+\dots+r_{p-1})}, \dots, X_{p,r_p}, X_{p+1,1}, \dots, X_{p+1,r_{p+1}}, \dots, X_{m,1}, \dots, X_{m,r_m}\} \\ &= \bar{\mathcal{D}}_q. \end{aligned} \quad (33)$$

进而在原点邻域 U 上的存在坐标变换 $x = Q(z)$ 使得对任意整数 $1 \leq q \leq n$ 有

$$\bar{\mathcal{D}}_q = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_{p,q-(r_1+\dots+r_{p-1})}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p,r_p}}, \frac{\partial}{\partial x_{p+1,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p+1,r_{p+1}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{m,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{m,r_m}}\right\}. \quad (34)$$

在新坐标系下简约型 (12) 表示为

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{1,1} &= f_{1,1}(\mathbf{x}), \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{1,r_1-1} &= f_{1,r_1-1}(\mathbf{x}), \\
 \dot{x}_{1,r_1} &= v_1, \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{m,1} &= f_{m,1}(\mathbf{x}), \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{m,r_m-1} &= f_{m,r_m-1}(\mathbf{x}), \\
 \dot{x}_{m,r_m} &= v_m,
 \end{aligned} \tag{35}$$

其中 $v_i = w_j(i, j = 1, \dots, m)$. 确定系统 (35) 的向量场为

$$\begin{aligned}
 f_S &= T_*(f_R) = f_{1,1} \frac{\partial}{\partial x_{1,1}} + \dots + f_{1,r_1-1} \frac{\partial}{\partial x_{1,r_1-1}} + \dots + f_{m,1} \frac{\partial}{\partial x_{1,1}} + \dots + f_{m,r_m-1} \frac{\partial}{\partial x_{m,r_m-1}}, \\
 g_S^1 &= T_*(X_{1,r_1}) = \frac{\partial}{\partial x_{1,r_1}}, \dots, g_S^m = T_*(X_{1,r_m}) = \frac{\partial}{\partial x_{m,r_m}}.
 \end{aligned} \tag{36}$$

由算法 1, 对 $g_S^i (i = 1, \dots, m)$ 有

$$\begin{aligned}
 \text{ad}_{f_S}^j g_S^i &\in \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{i,r_i-j}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i,r_i}}, \frac{\partial}{\partial x_{i+1,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i+1,r_{i+1}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{m,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{m,r_m}} \right\}, \\
 \text{ad}_{f_S}^j g_S^i &\notin \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{i,r_i-j+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i,r_i}}, \frac{\partial}{\partial x_{i+1,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i+1,r_{i+1}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{m,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{m,r_m}} \right\}, \\
 j &= 1, \dots, r_i - 1.
 \end{aligned} \tag{37}$$

利用李导数的计算公式知道, 这意味着在原点的一个邻域中满足

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x_{i,j+1}} &\stackrel{\text{a.e.}}{\neq} 0, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r_i - 1; \\
 \frac{\partial f_{i,k}}{\partial x_{i,j+1}} &= 0, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r_i - 1, 1 \leq k \leq j - 1; \\
 \frac{\partial f_{l,k}}{\partial x_{i,j+1}} &= 0, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r_i - 1, \\
 &1 \leq l \leq i - 1, 1 \leq k \leq r_l.
 \end{aligned} \tag{38}$$

这样得到了系统 Σ_A 所示的下三角形式.

注 1 如果算法 1 所得的 $\mathcal{Y}$ 包含多个元素, 表明简约型可通过上述定理证明中的构造性方法等价转换为几种不同的下三角系统.

注 2 如果算法 1 所得的 $\mathcal{Y}$ 包含某个元素 Y^σ 使得对 $1 \leq i \leq n$ 向量场 Y_i^σ 均为非奇异向量场, 容易证明该系统可等价转换为多输入线性能控标准型.

定理 3 简约型 (12) 如果能通过坐标变换转换为下三角系统 Σ_A , 则可利用算法 1 得到的 Z^σ 确定坐标变换:

- (i) 如果 $Z_k^\sigma = g_R^l$ (设 $n - k = r_m + \cdots + r_{i+1}$), 则 $x_{i,r_i}(z) = z_{n-m+l}$;
 (ii) 如果 $Z_k^\sigma \notin \{g^1, \dots, g^m\}$, 设 $k = r_1 + \cdots + r_{i-1} + j$ ($r_i > j \geq 1, 1 \leq i \leq m$), 则 $x_{i,j}$ 是如下偏微分方程组

$$\begin{aligned} \langle dx_{i,j}, Z_{r_1+\dots+r_{i-1}+j}^\sigma \rangle &\neq 0, \\ \langle dx_{i,j}, Z_{r_1+\dots+r_{i-1}+j+1}^\sigma \rangle &= 0, \\ &\vdots \\ \langle dx_{i,j}, Z_n^\sigma \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

的解.

证 定理中的 (i) 由 (21) 式直接得出. 考虑到

$$\text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_{r_1+\dots+r_{i-1}+j+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\} = \text{span}\{Z_{r_1+\dots+r_{i-1}+j+1}^\alpha, \dots, Z_n^\alpha\}, \quad (40)$$

并结合一阶偏微分方程组解的理论, (39) 式中第 2 个方程到最末的方程会有 $r_1 + \cdots + r_{i-1} + j - 1$ 个独立解; 而进一步满足 (39) 式中不等式的独立解有且只有一个, 该解能保证

$$\text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_{r_1+\dots+r_{i-1}+j}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\} = \text{span}\{Z_{r_1+\dots+r_{i-1}+j+1}^\sigma, \dots, Z_n^\sigma\}. \quad (41)$$

当然 (39) 式中的不等式可用 $\langle dx_{i,j}, Z_{r_1+\dots+r_{i-1}+j}^\sigma \rangle = 1$ 替代.

综上所述, 判断非线性系统 (1) 可否等价转换为下三角系统 Σ_A 并找到转换方式的步骤如下.

算法 2

步骤 2.1 对系统 (1) 检验 $\mathcal{D} = \text{span}\{G^1, \dots, G^m\}$ 是否对合, 若对合则进入步骤 2.2; 否则系统不能等价转换为下三角系统 Σ_A , 退出.

步骤 2.2 将系统转化为简约系统.

步骤 2.3 完成算法 1, 检验定理 1 中的条件是否满足, 若满足则进入步骤 2.4; 否则系统不能等价转换为下三角系统 Σ_A , 退出.

步骤 2.4 按定理 3 的方法按 $x_{m,r_m}, \dots, x_{m,1}, \dots, x_{1,r_1}, \dots, x_{1,1}$ 的顺序找出坐标变换, 在该坐标系下重新写出的系统已具备系统 Σ_A 的下三角形式.

4 等价转换为 Σ_B

本节讨论一个多输入非线性系统在何种条件下能等价转换为下三角系统 Σ_B 或系统 (6). 定理 4 将给出等价转换存在的充要条件; 定理 5 讨论满足定理 4 的充要条件时如何通实现等价转换.

定理 4 系统 (1) 能通过反馈 (2) 和坐标变换 (3) 而具有下三角系统 Σ_B 表示的下三角形式, 当且仅当满足下列条件

(i) 取分布

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^p &= \text{span}\{G^1, \dots, G^m\}, \\ \mathcal{D}^{p-1} &= \mathcal{D}^p \oplus \text{ad}_F \mathcal{D}^p, \\ &\vdots \\ \mathcal{D}^i &= \mathcal{D}^{i+1} \oplus \text{ad}_F \mathcal{D}^{i+1}, \\ i &= 1, \dots, p-1.\end{aligned}\quad (42)$$

上述分布在原点的一个邻域 Ω 中满足 $\dim(\mathcal{D}^i) \stackrel{\text{a.e}}{=} s_i + \dots + s_p, i = 1, \dots, p$;

(ii) 存在一组在 Ω 上非奇异分布 $\bar{\mathcal{D}}^i (i = 1, \dots, p)$, 满足 $\bar{\mathcal{D}}^i \stackrel{\text{a.e}}{=} \mathcal{D}^i$ 和

$$\bar{\mathcal{D}}^1 \supset \dots \supset \bar{\mathcal{D}}^p. \quad (43)$$

证 必要性. 假设系统 (1) 能通过反馈 (2) 和坐标变换 (3) 等价地转换为系统 Σ_B , 则该系统实际上可通过同一坐标变换 $x = T(\xi)$ 而具有下列块三角形式,

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,1} &= f_{1,1}(x_{2,1}, \dots, x_{2,s_2}, x_{1,1}, \dots, x_{1,s_1}), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{1,s_1} &= f_{1,s_1}(x_{2,1}, \dots, x_{2,s_2}, x_{1,1}, \dots, x_{1,s_1}), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{p-1,1} &= f_{p-1,1}(x_{p,1}, \dots, x_{p,s_p}, \dots, x_{1,1}, \dots, x_{1,s_1}), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{p-1,s_{p-1}} &= f_{p-1,s_{p-1}}(x_{p,1}, \dots, x_{p,s_p}, \dots, x_{1,1}, \dots, x_{1,s_1}), \\ \dot{x}_{p,1} &= \alpha_1(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \beta_{1i}(\mathbf{x})v_i, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{p,s_p} &= \alpha_m(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \beta_{mi}(\mathbf{x})v_i.\end{aligned}\quad (44)$$

故应证明系统 (44) 应满足定理中的条件. 令

$$\begin{aligned}f &= \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{s_k} f_{k,i} \frac{\partial}{\partial x_{k,i}} + \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_{p,i}}, \\ g^k &= \sum_{i=1}^m \beta_{ki}(x) \frac{\partial}{\partial x_{p,i}}, \quad k = 1, \dots, m,\end{aligned}\quad (45)$$

则

$$\text{ad}_{g^i} g^j \in \text{span}\{G^1, \dots, G^m\} = \text{span}\{g^1, \dots, g^m\} = \mathcal{D}^p = \bar{\mathcal{D}}^p (i, j = 1, 2, \dots, m), \quad (46)$$

因此 $\mathcal{D}^p$ 是对合分布. 设 $d^p \in \mathcal{D}^p$,

$$\text{ad}_f d^p = \left[\sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{s_k} f_{k,i} \frac{\partial}{\partial x_{k,i}} + \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_{p,i}}, \sum_{i=1}^m d_i^p \frac{\partial}{\partial x_{p,i}} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^m \left(- \sum_{q=1}^m \frac{\partial a_i}{\partial x_{p,q}} d_q^p + \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{q=1}^{s_k} \frac{\partial d_i^p}{\partial x_{k,q}} f_{k,q} + \sum_{q=1}^m \frac{\partial d_i^p}{\partial x_{p,q}} a_q \right) \frac{\partial}{\partial x_{p,i}} \\
&\quad - \sum_{i=1}^{s_{p-1}} \left(\sum_{q=1}^m \frac{\partial f_{p-1,i}}{\partial x_{p,q}} d_q^p \right) \frac{\partial}{\partial x_{p-1,i}}.
\end{aligned} \quad (47)$$

再借助向量场李导数的计算性质, 同时注意到系统 (44) 的下三角形式并满足

$$\text{rank} \frac{\partial(f_{i,1}, \dots, f_{i,s_i})}{\partial(x_{i+1,1}, \dots, x_{i+1,s_{i+1}})} \stackrel{\text{a.e.}}{\neq} 0, x \in \Omega, \quad (48)$$

因此,

$$\forall d^p \in \bar{\mathcal{D}}^p, \text{ad}_f d^p \in \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{p,s_p}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p,1}}, \frac{\partial}{\partial x_{p-1,s_{p-1}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p-1,1}} \right\} \triangleq \bar{\mathcal{D}}^{p-1}, \text{ad}_f d^p \notin \bar{\mathcal{D}}^p. \quad (49)$$

进而设 $d^j = \sum_{k=j}^p \sum_{i=1}^{s_k} d_{k,i}^j \frac{\partial}{\partial x_{k,i}} \in \mathcal{D}^j (p < j \leq 2)$,

$$\begin{aligned}
\text{ad}_f d^j &= \left[\sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{s_k} f_{k,i} \frac{\partial}{\partial x_{k,i}} + \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_{p,i}} + \sum_{k=j}^p \sum_{i=1}^{s_k} d_{k,i}^j \frac{\partial}{\partial x_{k,i}} \right] \\
&= - \sum_{k=j}^{p-1} \sum_{i=1}^{s_k} \left(\sum_{q=j}^p \sum_{r=1}^{s_q} \frac{\partial f_{k,i}}{\partial x_{q,r}} d_{q,r}^j \right) \frac{\partial}{\partial x_{k,i}} - \sum_{i=1}^m \left(\sum_{q=j}^p \sum_{r=1}^{s_q} \frac{\partial a_i}{\partial x_{q,r}} d_{q,r}^j \right) \frac{\partial}{\partial x_{p,i}} \\
&\quad + \sum_{k=j}^p \sum_{i=q}^{s_k} \left(\sum_{q=1}^{p-1} \sum_{r=1}^{s_q} \frac{\partial d_{k,i}^j}{\partial x_{q,r}} f_{q,r} + \sum_{r=1}^m \frac{\partial d_{k,i}^j}{\partial x_{p,r}} a_r \right) \frac{\partial}{\partial x_{k,i}} - \sum_{i=1}^{s_{j-1}} \left(\left(\sum_{q=1}^{s_j} \left(\frac{\partial f_{j-1,i}}{\partial x_{j,q}} d_{j,q}^j \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_{j-1,i}} \right).
\end{aligned} \quad (50)$$

所以,

$$d^j \in \bar{\mathcal{D}}^j, \text{ad}_f d^j \in \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{p,s_p}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j-1,s_{j-1}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j-1,1}} \right\} = \bar{\mathcal{D}}^{j-1}, \text{ad}_f d^j \notin \bar{\mathcal{D}}^j. \quad (51)$$

至此, 证明了系统 (44) 满足定理中的条件. 系统 (1) 能等价转换为下三角系统 Σ_B 则也能通过一个坐标变换 $x = T(\xi)$ 转换为系统 (44). 考虑前推映射

$$\begin{aligned}
T_*(F) &= \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{s_k} f_{k,i} \frac{\partial}{\partial x_{k,i}} + \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_{p,i}}, \\
T_*(G^k) &= \sum_{i=1}^m \beta_{ki}(x) \frac{\partial}{\partial x_{p,i}}, k = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned} \quad (52)$$

再考虑到分布的对合, 维数及包含关系, 这些性质在状态变换下不变, 可知若系统 (1) 能等价转换为下三角系统 Σ_B 必满足定理中的条件.

充分性. 由条件 (ii) 存在 n 个非奇异向量场 $X^{p,1}, \dots, X^{p,s_p}, \dots, X^{1,1}, \dots, X^{1,s_1}$ 使得

$$\bar{\mathcal{D}}^j = \text{span}\{X^{p,1}, \dots, X^{p,s_p}, \dots, X^{j,1}, \dots, X^{j,s_j}\}. \quad (53)$$

并在原点的某个邻域上存在坐标变换 $x = T(\xi)$ 使

$$\bar{\mathcal{D}}^j = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{p,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p,s_p}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j,s_j}} \right\}, j = 1, 2, \dots, m. \quad (54)$$

设在新坐标系下系统表示为

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{1,1} &= f_{1,1}(x_{p,1}, \dots, x_{p,s_p}, \dots, x_{1,1}, \dots, x_{1,s_1}), \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{1,s_1} &= f_{1,s_1}(x_{p,1}, \dots, x_{p,s_p}, \dots, x_{1,1}, \dots, x_{1,s_1}), \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{p-1,1} &= f_{p-1,1}(x_{p,1}, \dots, x_{p,s_2}, \dots, x_{1,1}, \dots, x_{1,s_1}), \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{p-1,s_{p-1}} &= f_{p-1,s_{p-1}}(x_{p,1}, \dots, x_{p,s_p}, \dots, x_{1,1}, \dots, x_{1,s_1}), \\
 \dot{x}_{p,1} &= \lambda_1(x) + \sum_{i=1}^m \gamma_{1i}(x)u_i, \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{p,s_p} &= \lambda_m(x) + \sum_{i=1}^m \gamma_{mi}(x)u_i.
 \end{aligned} \tag{55}$$

输入向量场在新坐标所诱导的前推映射下成为

$$T_*(G^k) = \sum_{i=1}^m \beta_{ki}(x) \frac{\partial}{\partial x_{p,i}}, k = 1, \dots, m, \tag{56}$$

由条件 (i) 有

$$\overline{\text{ad}_{T_*(F)} \mathcal{D}^p} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{p,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p,s_p}}, \frac{\partial}{\partial x_{p-1,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p-1,s_{p-1}}} \right\}, \tag{57}$$

即

$$\text{ad}_{T_*(F)} \frac{\partial}{\partial x_{p,i}} \in \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{p,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p,s_p}}, \frac{\partial}{\partial x_{p-1,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p-1,s_{p-1}}} \right\}, i = 1, \dots, s_p. \tag{58}$$

利用李括号的计算公式知道,

$$\text{ad}_{T_*(F)} \frac{\partial}{\partial x_{p,i}} = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^{s_k} \frac{\partial f_{k,l}}{\partial x_{p,i}} \frac{\partial}{\partial x_{k,l}}. \tag{59}$$

这样 (58) 式意味着

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{p-i,j}}{\partial x_{p,k}} &= 0, \quad i = 2, \dots, p-1; j = 1, \dots, s_i; k = 1, \dots, s_p; \\
 \text{rank} \frac{\partial(f_{p-1,1}, \dots, f_{p-1,s_{p-1}})}{\partial(x_{p,1}, \dots, x_{p,s_p})} &\stackrel{\text{a.e.}}{=} s_{p-1}.
 \end{aligned} \tag{60}$$

进而, 对一般的 $r = 2, \dots, n-1$, 按照条件 (i),

$$\overline{\text{ad}_{T_*(F)} \mathcal{D}^r} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{p,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p,s_p}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{r-1,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{r-1,s_{r-1}}} \right\}, \tag{61}$$

同样地这意味着

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x_{r,k}} &= 0, \quad i = 1, \dots, r-2; j = 1, \dots, s_i; k = 1, \dots, s_r; \\
 \text{rank} \frac{\partial(f_{r-1,1}, \dots, f_{r-1,s_{r-1}})}{\partial(x_{r,1}, \dots, x_{r,s_r})} &\stackrel{\text{a.e.}}{=} s_{r-1}.
 \end{aligned} \tag{62}$$

最后, (60) 式和 (62) 式实际上表明对 (55) 式作反馈

$$(u_1, \dots, u_m)^T = (\gamma_{ij})^{-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T + (\gamma_{ij})^{-1}(v_1, \dots, v_m)^T, i, j = 1, 2, \dots, m, \quad (63)$$

即得到下三角系统 Σ_B .

接下来的问题是: 若系统 (1) 符合定理 4 的条件, 如何才能转换为下三角系统 Σ_B .

定理 5 系统 (1) 如果符合定理 4 的条件而需转换为下三角系统 Σ_B , 可选取 $x_{l,1}(\xi), \dots, x_{l,s_l}(\xi)$ 为如下方程组的 s_l 个独立解,

$$\langle dx_{l,i}, X^{l,h} \rangle \neq 0, \quad \langle dx_{l,i}, X^{j,k} \rangle = 0, \quad h = 1, \dots, s_l, \quad j = l+1, \dots, p; k = 1, \dots, s_j; \quad (64)$$

其中 $\text{span}\{X^{j,k} | j = l+1, \dots, p; k = 1, \dots, s_j\} = \bar{\mathcal{D}}^{l+1}$. 如果 $x_{1,1}(\xi), \dots, x_{1,s_1}(\xi), \dots, x_{p-1,1}(\xi), \dots, x_{p-1,s_{p-1}}(\xi)$ 已确定, 要确定 $x_{p,1}(\xi), \dots, x_{p,s_p}(\xi)$ 只需 s_p 个与 $x_{1,1}(\xi), \dots, x_{1,s_1}(\xi), \dots, x_{p-1,1}(\xi), \dots, x_{p-1,s_{p-1}}(\xi)$ 独立的光滑函数.

证 对 $l = 1, \dots, p-1$ 的情况, 从定理 4 充分性的证明看,

$$\bar{\mathcal{D}}^l = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_{p,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p,s_p}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{l,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{l,s_l}}\right\}. \quad (65)$$

故 (64) 式成立, 从而保证了系统在新坐标系下的前 $s_1 + \dots + s_p - l$ 个方程具备下三角形式; 由 Frobenius 理论 (64) 式的第二个方程可以找到 $s_1 + \dots + s_l$ 个独立解, 而 (64) 式中第一个方程的限制下, 只能找到 s_l 个独立解.

对 $l = p$ 的情况, 由于在下三角系统 Σ_B 的最后 s_p 个方程中出现了 s_p 个输入变量, 只需找到 s_p 个与 $x_{1,1}(\xi), \dots, x_{1,s_1}(\xi), \dots, x_{p-1,1}(\xi), \dots, x_{p-1,s_{p-1}}(\xi)$ 无关的函数即可.

综合本节中定理 4 和定理 5, 算法 3 总结了判断系统 (1) 能否等价转换为下三角系统 Σ_B 并如何实现转换的过程.

算法 3

步骤 3.1 按定理 4 判断系统 (1) 是否可以等价转换为下三角系统 Σ_B , 如果不能转换, 退出; 否则保留判断过程中计算的 $\bar{\mathcal{D}}^i (i = 1, 2, \dots, n)$. 转至步骤 3.2.

步骤 3.2 按定理 5 找到坐标变换 $x_{1,1}(\xi), \dots, x_{1,s_1}(\xi), \dots, x_{p,1}(\xi), \dots, x_{p,s_p}(\xi)$. 转至步骤 3.3.

步骤 3.3 用新坐标系重新写出系统, 并按 (63) 式引入反馈. 按照定理 4 充分性的证明此时系统应已成为下三角系统 Σ_B .

5 结论

研究非线性系统等价性的目的是将较复杂的非线性系统转换成为较为简单的系统, 对一类非线性系统的分析和设计具有一定现实意义. 本文讨论了多输入下三角系统的两种基本形式, 以微分几何为工具, 给出了非线性系统反馈等价于多输入下三角系统的充要条件.

参考文献

- 1 Isidori A. Nonlinear Systems. 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 1995
- 2 Nijmeijer H, van der Schaft A J. Nonlinear Dynamical Control System. New York: Springer-Verlag, 1996

- 3 Krener A J. On the equivalence of control systems and the linearization of nonlinear systems. *SIAM J Contr Optim*, 1973, 11: 670–676
- 4 Brockett R W. Feedback invariants for nonlinear systems. In: *Proceedings of 6th IFAC World Congress*. Vol 6. New York: Elsevier, 1978. 1115–1120
- 5 Su R. On the linear equivalents of nonlinear systems. *Syst Control Lett*, 1982, 2: 48–52
- 6 Isidori A, Krener A, Gori A J, et al. Nonlinear decoupling via feedback: a differential geometric approach. *IEEE Trans Automat Contr*, 1981, 26: 331–345
- 7 Hunt L R, Su R, Meyer G. Global transformations of nonlinear systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 1983, 28: 24–31
- 8 Marino R. On the largest feedback linearizable subsystem. *Syst Contr Lett*, 1986, 7: 345–351
- 9 Schwartz B, Isidori A, Tarn T J. Global normal form for MIMO nonlinear systems with applications to stabilization and disturbance attenuation. *Math Contr Signal*, 1999, 12: 121–142
- 10 Cheng D, Lin W. On p -normal forms of Nonlinear System. *IEEE Trans Automat Contr*, 2003, 48: 1242–1248
- 11 Respondek W. Transforming a single-input system to a p -normal form via feedback. In: *Proceeding of 42st IEEE CDC*. New York: Springer, 2003. 1574–1579
- 12 Astolfi A, Kaliora G. A geometric characterization of feedforward forms. *IEEE Trans Automat Contr*, 2003, 50: 1016–1021
- 13 Tall I A, Respondek W. Feedback equivalence to feedforward forms for nonlinear single-input systems. In: *Dynamics Bifurcations and Control*. Berlin: Springer-Verlag, 2002. 269–286
- 14 Kokotovic P, Arcak M. Constructive nonlinear control: a historical perspective. *Automatica*, 2001, 37: 637–662
- 15 Mazenc F, Igdir A. Backstepping with bounded feedbacks. *Syst Contr Lett*, 2004, 51: 235–245
- 16 Chen Z, Huang J. Global robust servomechanism problem of lower triangular systems in the general case. *Syst Contr Lett*, 2004, 52: 209–220
- 17 Liu L, Huang J. Global robust output regulation of lower triangular systems with unknown control direction. *Automatica*, 2008, 44: 1278–1284
- 18 Hong Y, Huang J, Xu Y. On an output feedback finite-time stabilization problem. *IEEE Trans Automat Contr*, 2001, 46: 305–309
- 19 Celikovsky S, Nijmeijer H. Equivalence of nonlinear systems to triangular form: the singular case. *Syst Contr Lett*, 1996, 27: 135–144
- 20 Lang S. *Differential and Riemannian Manifolds*, GTM 160. New York: Springer-Verlag, 1995

Geometric characterization of multi-input lower-triangular forms

ZHANG Duan¹, TARN Tzyh Jong^{2*}, HE XiongXiong¹ & ZOU Tao¹

¹ *Department of Electrical Engineering and Automation, Zhejiang University of Technology, Hangzhou, Zhejiang 310023, China;*

² *Department of Electrical and Systems Engineering, Washington University, St. Louis, Missouri 63130, USA*

*E-mail: dzhang@zjut.edu.cn

Abstract This paper is concerned with the problem as to whether a multi-input nonlinear system is equivalent to the so-called low-triangular form. Two elemental forms of multi-input lower-triangular systems are proposed. Then, using the theory of singular distributions, the necessary and sufficient conditions under which multi-input nonlinear systems are locally feedback equivalent to these two lower-triangular systems are established. Furthermore, algorithms are provided to describe how to realize these equivalent transformations via state feedbacks and coordinate conversions.

Keywords multi-input system, nonlinear system, lower-triangular system, feedback equivalence