六维线性与张量积 k ($k \geq 1$) 次有限元的超收敛

献给林群教授 80 华诞

刘经洪^①, 朱起定^{②*}, 贾银锁^③

① 浙江大学宁波理工学院公共基础部, 宁波 315100;

② 湖南师范大学数学与计算机科学学院, 长沙 410081;

③ 上饶师范学院数学与计算机科学学院, 上饶 334001

E-mail: jhliu1129@sina.com, qd_zhu@sina.com, 550897472@qq.com

收稿日期: 2014-10-23; 接受日期: 2015-01-14; * 通信作者

浙江省自然科学基金 (批准号: LY13A010007)、宁波市自然科学基金 (批准号: 2013A610104) 和国家自然科学基金 (批准号: 11161039) 资助项目

摘要 本文研究六维椭圆问题线性与张量积 k ($k \geq 1$) 次有限元的超收敛性. 首先介绍离散导数 δ 函数、 L^2 投影算子、正则导数 Green 函数和离散导数 Green 函数的概念, 然后利用权范数估计导出离散导数 Green 函数的 $W^{1,1}$ 半范估计, 最后利用第一型弱估计和离散导数 Green 函数的估计获得线性与张量积 k ($k \geq 1$) 次有限元的导数的逐点超收敛估计.

关键词 离散导数 Green 函数 六维有限元 弱估计 超收敛

MSC (2010) 主题分类 65N30

1 引言

众所周知, 离散 Green 函数在有限元超收敛研究特别是在逐点超收敛研究中起着非常重要的作用 [1-8]. 对于一维和二维椭圆边值问题, 文献 [1] 已经获得了离散 Green 函数的若干最优阶估计, 从而解决了一、二维有限元的逐点超收敛问题. 对于三维以上的多有限元问题, 由于离散 Green 函数的估计不容易获得, 超收敛研究进展缓慢 [2]. 近年来, 文献 [5, 9] 利用权函数思想导出了三维离散 Green 函数和三维离散导数 Green 函数的最优阶估计, 进而解决了三维有限元的逐点超收敛问题. 由于离散 Green 函数的估计与维数密切相关, 一般而言, 很难用一种表达式将不同维数的离散 Green 函数的估计统一表示出来. 维数不同的离散 Green 函数的估计往往要寻求不同的方法才能导出, 有的甚至还很难找到导出的方法. 目前, 我们已经针对三维以上的高维离散 Green 函数的估计作了全面的研究, 对于四维和五维离散导数 Green 函数, 我们已经获得了最优阶估计 [10, 11]. 对于 d ($d \geq 7$) 维离散导数 Green 函数, 我们获得的 $W^{1,1}$ 半范估计是 $\mathcal{O}(h^{\frac{2-d}{2}})$, 显然, 这不是很好的估计. 目前, 我们还没有办法导出更好的估计, 更不用说最优阶估计了. 本文将针对六维 Poisson 方程, 利用权范数估计方法获得六维离散导数 Green 函数的对数阶估计, 然后结合第一型弱估计导出六维线性与张量积 k ($k \geq 1$) 次有限元的超收敛估计. 本文采用 Sobolev 空间中的标准记号, 并用字母 C 来表示与网格尺寸 h 无关的不同的常数.

英文引用格式: Liu J H, Zhu Q D, Jia Y S. Superconvergence of the six-dimensional linear and tensor-product k ($k \geq 1$)-order finite elements (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 1337-1344, doi: 10.1360/N012014-00219

我们考虑如下 Poisson 方程:

$$\mathcal{L}u \equiv -\Delta u = f, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad u = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad (1.1)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^6$. 用 $\{\mathcal{T}^h\}$ 表示区域 Ω 的 C 一致剖分族, $S^h(\Omega)$ 为对应的线性或张量积 k ($k \geq 1$) 次有限元空间, 且记 $S_0^h = S^h(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. 问题 (1.1) 的弱解为: 找 $u \in H_0^1(\Omega)$, 使得对任何 $v \in H_0^1(\Omega)$, 有 $a(u, v) = (f, v)$, 其中 $a(u, v) \equiv \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dX$, $(f, v) \equiv \int_{\Omega} f v dX$. 于是, 求解上面 Poisson 方程的有限元方法是: 找 $u_h \in S_0^h$, 使得对任何 $v \in S_0^h$, 有 $a(u_h, v) = (f, v)$. 显然有下面的 Galerkin 正交关系:

$$a(u - u_h, v) = 0, \quad \forall v \in S_0^h. \quad (1.2)$$

对于任意给定的 $Z \in \Omega$, 定义离散导数 δ 函数 $\partial_{Z,\ell} \delta_Z^h \in S_0^h$ 、正则导数 Green 函数 $\partial_{Z,\ell} G_Z^* \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 、离散导数 Green 函数 $\partial_{Z,\ell} G_Z^h \in S_0^h$ 和 u 的 L^2 投影 $P_h u \in S_0^h$ 如下 (参见文献 [1]):

$$(v, \partial_{Z,\ell} \delta_Z^h) = \partial_{\ell} v(Z), \quad \forall v \in S_0^h, \quad (1.3)$$

$$a(\partial_{Z,\ell} G_Z^*, v) = (\partial_{Z,\ell} \delta_Z^h, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (1.4)$$

$$a(\partial_{Z,\ell} G_Z^h, v) = (\partial_{Z,\ell} \delta_Z^h, v), \quad \forall v \in S_0^h, \quad (1.5)$$

$$(u - P_h u, v) = 0, \quad \forall v \in S_0^h, \quad (1.6)$$

其中 $\ell \in \mathbb{R}^6$, 且 $|\ell| = 1$, $\partial_{\ell} v(Z)$ 和 $\partial_{Z,\ell} \delta_Z^h$ 表示如下定义的方向导数:

$$\partial_{\ell} v(Z) = \lim_{|\Delta Z| \rightarrow 0} \frac{v(Z + \Delta Z) - v(Z)}{|\Delta Z|}, \quad \partial_{Z,\ell} \delta_Z^h = \lim_{|\Delta Z| \rightarrow 0} \frac{\delta_{Z+\Delta Z}^h - \delta_Z^h}{|\Delta Z|},$$

这里 $\Delta Z = |\Delta Z| \ell$, $\delta_Z^h \in S_0^h$ 为定义为 $(v, \delta_Z^h) = v(Z)$, $\forall v \in S_0^h$ 的离散 δ 函数.

显然, $\partial_{Z,\ell} G_Z^h$ 是 $\partial_{Z,\ell} G_Z^*$ 的有限元逼近. 本文的关键是获得 $|\partial_{Z,\ell} G_Z^*|_{1,1}$ 和 $|\partial_{Z,\ell} G_Z^*|_{2,1}$ 的最优阶估计.

2 正则导数 Green 函数 $\partial_{Z,\ell} G_Z^*$ 的估计

为了导出想要的估计, 需要引入下面的权函数:

$$\phi \equiv \phi(X) = (|X - \bar{X}|^2 + \theta^2)^{-3}, \quad \forall X \in \bar{\Omega}, \quad (2.1)$$

其中 $\bar{X} \in \bar{\Omega}$ 是定点, $\theta = \gamma h$, $\gamma \in [6, +\infty)$ 是一个适当的实数.

任给 $\alpha \in \mathbb{R}$, 记

$$|\nabla^n v|^2 = \sum_{|\beta|=n} |D^{\beta} v|^2, \quad |\nabla^n v|_{\phi^{\alpha}} = \left(\int_{\Omega} \phi^{\alpha} |\nabla^n v|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|v\|_{m, \phi^{\alpha}}^2 = \sum_{n=0}^m |\nabla^n v|_{\phi^{\alpha}}^2,$$

其中 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6)$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6$, $\beta_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 6$. 特别地, 当 $m = 0$ 时, 记 $\|v\|_{\phi^{\alpha}} = (\int_{\Omega} \phi^{\alpha} |v|^2 dX)^{\frac{1}{2}}$. 假定存在 q_0 ($6 < q_0 \leq \infty$) 使得当 $v \in W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$, $1 < q < q_0$, 有如下的先验估计 (参见文献 [1]):

$$\|v\|_{2,q} \leq C(q) \|\mathcal{L}v\|_{0,q}. \quad (2.2)$$

关于权函数 ϕ , 我们有下面的引理:

引理 2.1 假定 ϕ 是 (2.1) 定义的权函数, 我们有下面的估计:

$$|\nabla^n \phi^\alpha| \leq C(\alpha, n) \phi^{\alpha + \frac{n}{6}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \quad (2.3)$$

$$\int_{\Omega} \phi^\alpha dX \leq C(\alpha - 1)^{-1} \theta^{-6(\alpha-1)}, \quad \forall \alpha > 1, \quad (2.4)$$

$$\int_{\Omega} \phi dX \leq C(\eta) |\ln \theta|, \quad \theta \leq \eta < 1. \quad (2.5)$$

证明 由定义 (2.1), $\ln \phi^\alpha = -3\alpha \ln(|X - \bar{X}|^2 + \theta^2)$. 于是,

$$\frac{\nabla \phi^\alpha}{\phi^\alpha} = -6\alpha \frac{X - \bar{X}}{|X - \bar{X}|^2 + \theta^2}. \quad (2.6)$$

进而 $|\frac{\nabla \phi^\alpha}{\phi^\alpha}| \leq 6|\alpha|(|X - \bar{X}|^2 + \theta^2)^{-\frac{1}{2}} = 6|\alpha|\phi^{\frac{1}{6}}$. 由此可知, 当 $n = 1$ 时, (2.3) 成立. 下面证明当 $n = 2$ 时, (2.3) 也成立.

记 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6)$. 由 (2.6) 知, $\partial_{x_j} \phi^\alpha = -6\alpha(x_j - \bar{x}_j)\phi^{\alpha+\frac{1}{3}}$, $j = 1, \dots, 6$. 于是,

$$\partial_{x_j}^2 \phi^\alpha = -6\alpha\phi^{\alpha+\frac{1}{3}} + 12\alpha(3\alpha+1)(x_j - \bar{x}_j)^2\phi^{\alpha+\frac{2}{3}}, \quad (2.7)$$

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} \phi^\alpha = 12\alpha(3\alpha+1)(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)\phi^{\alpha+\frac{2}{3}}, \quad i \neq j. \quad (2.8)$$

结合 (2.7) 和 (2.8) 可得

$$|\nabla^2 \phi^\alpha|^2 = \sum_{j=1}^6 |\partial_{x_j}^2 \phi^\alpha|^2 + \sum_{i=1, i < j}^5 |\partial_{x_i} \partial_{x_j} \phi^\alpha|^2 \leq 216\alpha^2(14(3\alpha+1)^2 + 4|3\alpha+1| + 1)\phi^{2\alpha+\frac{2}{3}}.$$

由上式知, 当 $n = 2$ 时, (2.3) 成立.

令 $D = \text{diam}(\Omega)$, 记 $B(\bar{X}, D) = \{X \in \mathbb{R}^6 : |X - \bar{X}| < D\}$, 则当 $\alpha > 1$ 时,

$$\int_{\Omega} \phi^\alpha dX \leq \int_{B(\bar{X}, D)} \phi^\alpha dX \leq C \int_0^D \frac{r^5 dr}{(r^2 + \theta^2)^{3\alpha}} \leq C \int_0^\infty \frac{dr^6}{(r^6 + \theta^6)^\alpha} \leq C(\alpha - 1)^{-1} \theta^{-6(\alpha-1)}.$$

(2.4) 得证.

当 $\alpha = 1$ 时, 类似可得

$$\int_{\Omega} \phi dX \leq C \int_0^D \frac{r^5 dr}{(r^2 + \theta^2)^3} \leq C \int_0^D \frac{r^5 dr}{r^6 + \theta^6} \leq C \left[|\ln \theta| + \frac{1}{6} \ln(D^6 + \theta^6) \right] \leq C \left[1 + \frac{\ln(1 + D^6)}{6|\ln \eta|} \right] |\ln \theta|,$$

故 $\int_{\Omega} \phi dX \leq C(\eta) |\ln \theta|$, $\theta \leq \eta < 1$. 于是 (2.5) 得证. $\square$

对于 L^2 投影算子 P_h 和离散导数 δ 函数 $\partial_{Z,\ell} \delta_Z^h$, 我们有下面的结果:

引理 2.2 假定 P_h 是由 (1.6) 定义的 L^2 投影算子, $w \in W^{1,q}(\Omega)$ 且 $6 < q \leq \infty$, 则有稳定性估计

$$\|P_h w\|_{1,q} \leq C \|w\|_{1,q}. \quad (2.9)$$

引理 2.3 假定 $\partial_{Z,\ell} \delta_Z^h$ 是由 (1.3) 定义的离散导数 δ 函数, 则有估计

$$|\partial_{Z,\ell} \delta_Z^h(X)| \leq C h^{-7} e^{-Ch^{-1}|X-Z|}, \quad (2.10)$$

其中 $X, Z \in \bar{\Omega}$, C 与 h , X 和 Z 无关.

注 2.1 引理 2.2 和 2.3 的证明与二维情形的结果的证明方法类似 (参见文献 [1]).

引理 2.4 假定 $\partial_{Z,\ell}\delta_Z^h$ 和 ϕ 分别是由 (1.3) 和 (2.1) 定义的函数, 则有权范数估计

$$\|\partial_{Z,\ell}\delta_Z^h\|_{\phi^{-\frac{4}{3}}} \leq C. \quad (2.11)$$

证明 由 (2.1) 和 (2.10) 知,

$$\|\partial_{Z,\ell}\delta_Z^h\|_{\phi^{-\frac{4}{3}}}^2 = \int_{\Omega} (|X - Z|^2 + \theta^2)^4 h^{-14} e^{-Ch^{-1}|X-Z|} dX \leq C \int_0^\infty (r^2 + \theta^2)^4 h^{-14} e^{-Ch^{-1}r} r^5 dr.$$

令 $h^{-1}r = t$, 于是, $\|\partial_{Z,\ell}\delta_Z^h\|_{\phi^{-\frac{4}{3}}}^2 \leq C \int_0^\infty (t^2 + \gamma^2)^4 e^{-Ct} t^5 dt \leq C$. (2.11) 得证. $\square$

引理 2.5 假定 $\partial_{Z,\ell}G_Z^*$ 是由 (1.4) 定义的正则导数 Green 函数, ϕ 是由 (2.1) 定义的权函数, 则有权范数估计

$$\|\partial_{Z,\ell}G_Z^*\|_{\phi^{-\frac{2}{3}}}^2 \leq C|\ln h|^{\frac{5}{3}} + C|\ln h|^{\frac{5}{6}} \|\nabla(\partial_{Z,\ell}G_Z^*)\|_{\phi^{-1}}. \quad (2.12)$$

证明 由 (1.3)、(1.4)、(1.6)、(2.2) 和 (2.9)、逆估计和 Sobolev 嵌入定理^[2,12], 有

$$\begin{aligned} \|\partial_{Z,\ell}G_Z^*\|_{\phi^{-\frac{2}{3}}}^2 &= (\partial_{Z,\ell}G_Z^*, \phi^{-\frac{2}{3}}\partial_{Z,\ell}G_Z^*) = a(\partial_{Z,\ell}G_Z^*, w) = (\partial_{Z,\ell}\delta_Z^h, w) \\ &= \partial_\ell P_h w(Z) \leq |P_h w|_{1,\infty} \leq Ch^{-\frac{6}{q}} |P_h w|_{1,q} \leq Ch^{-\frac{6}{q}} |w|_{1,q} \\ &\leq Ch^{-\frac{6}{q}} q^{\frac{5}{6}} \|w\|_{2,6} \leq Ch^{-\frac{6}{q}} q^{\frac{5}{6}} \|\phi^{-\frac{2}{3}}\partial_{Z,\ell}G_Z^*\|_{0,6} \\ &\leq Ch^{-\frac{6}{q}} q^{\frac{5}{6}} \|\phi^{-\frac{2}{3}}\partial_{Z,\ell}G_Z^*\|_2 \leq Ch^{-\frac{6}{q}} q^{\frac{5}{6}} \|\mathcal{L}(\phi^{-\frac{2}{3}}\partial_{Z,\ell}G_Z^*)\|_0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中 $w \in W^{2,6}(\Omega) \cap W^{1,q}(\Omega)$ 且 $\mathcal{L}w = \phi^{-\frac{2}{3}}\partial_{Z,\ell}G_Z^*$. 在 (2.13) 中令 $q = |\ln h|$, 有

$$\|\partial_{Z,\ell}G_Z^*\|_{\phi^{-\frac{2}{3}}}^2 \leq C|\ln h|^{\frac{5}{6}} \|\mathcal{L}(\phi^{-\frac{2}{3}}\partial_{Z,\ell}G_Z^*)\|_0. \quad (2.14)$$

利用 (2.3) 和三角不等式可得

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(\phi^{-\frac{2}{3}}\partial_{Z,\ell}G_Z^*)\|_0 &\leq C(\|\phi^{-\frac{2}{3}}\mathcal{L}(\partial_{Z,\ell}G_Z^*)\|_0 + \|\phi^{-\frac{1}{2}}\nabla(\partial_{Z,\ell}G_Z^*)\|_0 + \|\phi^{-\frac{1}{3}}\partial_{Z,\ell}G_Z^*\|_0) \\ &= C(\|\phi^{-\frac{2}{3}}\partial_{Z,\ell}\delta_Z^h\|_0 + \|\phi^{-\frac{1}{2}}\nabla(\partial_{Z,\ell}G_Z^*)\|_0 + \|\phi^{-\frac{1}{3}}\partial_{Z,\ell}G_Z^*\|_0) \\ &= C(\|\phi^{-\frac{2}{3}}\partial_{Z,\ell}\delta_Z^h\|_0 + \|\nabla(\partial_{Z,\ell}G_Z^*)\|_{\phi^{-1}} + \|\partial_{Z,\ell}G_Z^*\|_{\phi^{-\frac{2}{3}}}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

由 (2.11)、(2.14)、(2.15) 和 Young 不等式可得

$$\begin{aligned} \|\partial_{Z,\ell}G_Z^*\|_{\phi^{-\frac{2}{3}}}^2 &\leq C|\ln h|^{\frac{5}{6}}(1 + \|\nabla(\partial_{Z,\ell}G_Z^*)\|_{\phi^{-1}} + \|\partial_{Z,\ell}G_Z^*\|_{\phi^{-\frac{2}{3}}}) \\ &\leq C|\ln h|^{\frac{5}{6}} + C|\ln h|^{\frac{5}{6}} \|\nabla(\partial_{Z,\ell}G_Z^*)\|_{\phi^{-1}} + C|\ln h|^{\frac{5}{6}} \|\partial_{Z,\ell}G_Z^*\|_{\phi^{-\frac{2}{3}}} \\ &\leq C|\ln h|^{\frac{5}{6}} + C|\ln h|^{\frac{5}{6}} \|\nabla(\partial_{Z,\ell}G_Z^*)\|_{\phi^{-1}} + C(\epsilon)|\ln h|^{\frac{5}{3}} + \epsilon\|\partial_{Z,\ell}G_Z^*\|_{\phi^{-\frac{2}{3}}}^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

在 (2.16) 中取 $\epsilon = \frac{1}{2}$, (2.12) 即可得证. $\square$

定理 2.1 假定 $\partial_{Z,\ell}G_Z^*$ 是由 (1.4) 定义的正则导数 Green 函数, 则有 $W^{1,1}$ 和 $W^{2,1}$ 半范估计

$$|\partial_{Z,\ell}G_Z^*|_{1,1} \leq C|\ln h|^{\frac{4}{3}}, \quad (2.17)$$

$$|\partial_{Z,\ell} G_Z^*|_{2,1} \leq Ch^{-1} |\ln h|^{\frac{9}{8}}. \quad (2.18)$$

证明 显然,

$$|\partial_{Z,\ell} G_Z^*|_{1,1}^2 \leq \int_{\Omega} \phi dX \cdot \|\nabla(\partial_{Z,\ell} G_Z^*)\|_{\phi^{-1}}^2. \quad (2.19)$$

而

$$\begin{aligned} \|\nabla(\partial_{Z,\ell} G_Z^*)\|_{\phi^{-1}}^2 &\leq Ca(\partial_{Z,\ell} G_Z^*, \phi^{-1} \partial_{Z,\ell} G_Z^*) + C\|\partial_{Z,\ell} G_Z^*\|_{\phi^{-\frac{2}{3}}}^2 = C(\partial_{Z,\ell} \delta_Z^h, \phi^{-1} \partial_{Z,\ell} G_Z^*) + C\|\partial_{Z,\ell} G_Z^*\|_{\phi^{-\frac{2}{3}}}^2 \\ &\leq C\|\partial_{Z,\ell} \delta_Z^h\|_{\phi^{-\frac{4}{3}}}^2 + C\|\partial_{Z,\ell} G_Z^*\|_{\phi^{-\frac{2}{3}}}^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

由 (2.11)、(2.12) 和 (2.20) 可得 $\|\nabla(\partial_{Z,\ell} G_Z^*)\|_{\phi^{-1}}^2 \leq C|\ln h|^{\frac{5}{3}} + C|\ln h|^{\frac{5}{3}} \|\nabla(\partial_{Z,\ell} G_Z^*)\|_{\phi^{-1}}$. 利用 Young 不等式可得

$$\|\nabla(\partial_{Z,\ell} G_Z^*)\|_{\phi^{-1}}^2 \leq C|\ln h|^{\frac{5}{3}}. \quad (2.21)$$

结合 (2.5)、(2.19) 和 (2.21) 即可得到 (2.17). 此外,

$$|\partial_{Z,\ell} G_Z^*|_{2,1}^2 \leq \int_{\Omega} \phi dX \cdot \|\nabla^2 \partial_{Z,\ell} G_Z^*\|_{\phi^{-1}}^2. \quad (2.22)$$

类似于文献 [10, (2.47)], 我们可得

$$\|\nabla^2 \partial_{Z,\ell} G_Z^*\|_{\phi^{-1}}^2 \leq C\|\partial_{Z,\ell} \delta_Z^h\|_{\phi^{-1}}^2 + C\|\partial_{Z,\ell} G_Z^*\|_{\phi^{-\frac{2}{3}}}^2. \quad (2.23)$$

类似于 $\|\partial_{Z,\ell} G_Z^*\|_{\phi^{-\frac{2}{3}}}^2$ 的估计 (2.16), 我们可得

$$\|\partial_{Z,\ell} G_Z^*\|_{\phi^{-\frac{1}{3}}}^2 \leq C|\ln h|^{\frac{5}{6}} (\|\partial_{Z,\ell} \delta_Z^h\|_{\phi^{-\frac{2}{3}}} + \|\nabla(\partial_{Z,\ell} G_Z^*)\|_{\phi^{-\frac{1}{3}}} + \|\partial_{Z,\ell} G_Z^*\|_0). \quad (2.24)$$

而

$$\begin{aligned} \|\nabla(\partial_{Z,\ell} G_Z^*)\|_{\phi^{-\frac{1}{3}}}^2 &\leq Ca(\partial_{Z,\ell} G_Z^*, \phi^{-\frac{1}{3}} \partial_{Z,\ell} G_Z^*) + C\|\partial_{Z,\ell} G_Z^*\|_0^2 = C(\partial_{Z,\ell} \delta_Z^h, \phi^{-\frac{1}{3}} \partial_{Z,\ell} G_Z^*) + C\|\partial_{Z,\ell} G_Z^*\|_0^2 \\ &\leq C\|\partial_{Z,\ell} \delta_Z^h\|_{\phi^{-\frac{2}{3}}}^2 + C\|\partial_{Z,\ell} G_Z^*\|_0^2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

此外,

$$\begin{aligned} \|\partial_{Z,\ell} G_Z^*\|_0^2 &= (\partial_{Z,\ell} G_Z^*, \partial_{Z,\ell} G_Z^*) = a(\partial_{Z,\ell} G_Z^*, \varphi) = (\partial_{Z,\ell} \delta_Z^h, \varphi) = \partial_{\ell} P_h \varphi(Z) \leq |P_h \varphi|_{1,\infty} \\ &\leq Ch^{-\frac{6}{q}} |P_h \varphi|_{1,q} \leq Ch^{-\frac{6}{q}} |\varphi|_{1,q} \leq Ch^{-\frac{6}{q}} q^{\frac{5}{6}} \|\varphi\|_{2,6} \leq Ch^{-\frac{6}{q}} q^{\frac{5}{6}} \|\partial_{Z,\ell} G_Z^*\|_{0,6} \\ &\leq Ch^{-\frac{6}{q}} q^{\frac{5}{6}} \|\partial_{Z,\ell} G_Z^*\|_2 \leq Ch^{-\frac{6}{q}} q^{\frac{5}{6}} \|\partial_{Z,\ell} \delta_Z^h\|_0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

其中 $\varphi \in W^{2,6}(\Omega) \cap W^{1,q}(\Omega)$ 且 $\mathcal{L}\varphi = \partial_{Z,\ell} G_Z^*$. 在 (2.26) 中令 $q = |\ln h|$, 有

$$\|\partial_{Z,\ell} G_Z^*\|_0^2 \leq C|\ln h|^{\frac{5}{6}} \|\partial_{Z,\ell} \delta_Z^h\|_0. \quad (2.27)$$

类似 (2.11) 的证明可得

$$\|\partial_{Z,\ell} \delta_Z^h\|_0 \leq Ch^{-4}, \quad \|\partial_{Z,\ell} \delta_Z^h\|_{\phi^{-\frac{2}{3}}}^2 \leq Ch^{-4}, \quad \|\partial_{Z,\ell} \delta_Z^h\|_{\phi^{-1}}^2 \leq Ch^{-2}. \quad (2.28)$$

结合 (2.25)、(2.27) 和 (2.28) 可得

$$\|\nabla(\partial_{Z,\ell}G_Z^*)\|_{\phi^{-\frac{1}{3}}}^2 \leq Ch^{-4}|\ln h|^{\frac{5}{6}}. \quad (2.29)$$

利用 (2.24) 和 (2.27)–(2.29) 可得

$$\|\partial_{Z,\ell}G_Z^*\|_{\phi^{-\frac{1}{3}}}^2 \leq Ch^{-2}|\ln h|^{\frac{5}{4}}. \quad (2.30)$$

结合 (2.5)、(2.22)、(2.23)、(2.28) 和 (2.30) 可得 (2.18). $\square$

3 离散导数 Green 函数 $\partial_{Z,\ell}G_Z^h$ 的估计

为了获得离散导数 Green 函数 $\partial_{Z,\ell}G_Z^h$ 的 $W^{1,1}$ 半范估计, 我们需要估计 $|\partial_{Z,\ell}G_Z^* - \partial_{Z,\ell}G_Z^h|_{1,1}$. 在此, 我们先假定有限元解 u_h 像二维情形一样具有如下的 $W^{1,\infty}$ 稳定性估计 (参见文献 [1]):

$$\|u_h\|_{1,\infty} \leq C\|u\|_{1,\infty}, \quad \forall u \in W_0^{1,\infty}(\Omega), \quad (3.1)$$

其中常数 $C > 0$ 与 u 无关.

注 3.1 上述稳定性估计对二维问题是成立的, 其结论参见文献 [1, 定理 3.12], 自然我们可以假定该稳定性估计对六维问题也成立. 然而对于三维以上的椭圆问题, 由于离散导数 Green 函数的权范数估计过于复杂, 目前还没有能证明该假定成立.

进而, 对于 Poisson 方程, 我们可得如下引理:

引理 3.1 假定 u_h 是问题 (1.1) 的有限元解, 则存在与 u 无关的常数 $C > 0$, 使得对任意 $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, 有

$$|u_h|_{1,1} \leq C|u|_{1,1}, \quad (3.2)$$

$$|u - u_h|_{1,1} \leq C \inf_{\nu \in S_0^h} |u - \nu|_{1,1}. \quad (3.3)$$

证明 对任意 $v \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$, 由 Galerkin 正交关系、Poincaré 不等式和 (3.1) 得

$$(\nabla u_h, \nabla v) = (\nabla u_h, \nabla v_h) = (\nabla u, \nabla v_h) \leq |u|_{1,1}|v_h|_{1,\infty} \leq C|u|_{1,1}|v|_{1,\infty}.$$

于是, $|u_h|_{1,1} = \sup_{v \in W_0^{1,\infty}(\Omega)} \frac{|(\nabla u_h, \nabla v)|}{|v|_{1,\infty}} \leq C|u|_{1,1}$. (3.2) 得证. 对任意的 $\nu \in S_0^h$, 用 $u - \nu$ 代替 (3.2) 中的 u 可得 $|u_h - \nu|_{1,1} \leq C|u - \nu|_{1,1}$. 于是, $|u - u_h|_{1,1} \leq |u - \nu|_{1,1} + |u_h - \nu|_{1,1} \leq C|u - \nu|_{1,1}, \forall \nu \in S_0^h$. (3.3) 得证. $\square$

引理 3.2 假定 $\partial_{Z,\ell}G_Z^*$ 和 $\partial_{Z,\ell}G_Z^h$ 分别是 (1.4) 和 (1.5) 所定义的正则导数 Green 函数和离散导数 Green 函数, 则有估计

$$|\partial_{Z,\ell}G_Z^* - \partial_{Z,\ell}G_Z^h|_{1,1} \leq C|\ln h|^{\frac{9}{8}}. \quad (3.4)$$

证明 假定 Π 是某种插值算子, 于是, 由 (3.3) 和插值误差估计可得

$$|\partial_{Z,\ell}G_Z^* - \partial_{Z,\ell}G_Z^h|_{1,1} \leq C|\partial_{Z,\ell}G_Z^* - \Pi\partial_{Z,\ell}G_Z^*|_{1,1} \leq Ch|\partial_{Z,\ell}G_Z^*|_{2,1}. \quad (3.5)$$

结合 (2.18) 和 (3.5) 立即可得 (3.4). $\square$

由 (2.17)、(3.4) 和三角不等式立即可得下面定理:

定理 3.1 假定 $\partial_{Z,\ell} G_Z^h$ 是 (1.5) 所定义的离散导数 Green 函数, 则有估计

$$|\partial_{Z,\ell} G_Z^h|_{1,1} \leq C |\ln h|^{\frac{4}{3}}. \quad (3.6)$$

注 3.2 本文针对 Poisson 方程有 (3.6) 成立, 对于一般的椭圆问题 (3.6) 是否成立有待验证.

4 有限元的逐点超收敛估计

本节将利用离散导数 Green 函数的估计和有限元的插值弱估计导出六维线性与张量积 k ($k \geq 1$) 次元的逐点超收敛估计. 首先给出如下的第一型插值弱估计 (参见文献 [1, 定理 4.9 和 4.7]).

引理 4.1 假设 $\{\mathcal{T}^h\}$ 是 Ω 的 C 一致 6 单体剖分族, $S_0^h(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ 为该剖分族上的线性 Lagrange 有限元空间, $u \in W^{3,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, Π 是相应的插值算子, 则有下面的第一型插值弱估计:

$$|a(u - \Pi u, v)| \leq Ch^2 \|u\|_{3,\infty} |v|_{1,1}, \quad \forall v \in S_0^h(\Omega). \quad (4.1)$$

引理 4.2 假设 $\{\mathcal{T}^h\}$ 是 Ω 的 C 一致矩形剖分族, $S_0^h(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ 为该剖分族上的张量积 k ($k \geq 1$) 次 Lagrange 有限元空间, $u \in W^{k+2,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, Π 是相应的插值算子, 则有下面的第一型插值弱估计:

$$|a(u - \Pi u, v)| \leq Ch^{k+1} \|u\|_{k+2,\infty} |v|_{1,1}, \quad \forall v \in S_0^h(\Omega). \quad (4.2)$$

注 4.1 2 单体是三角形, 3 单体是四面体, 引理 4.1 中的 C 一致 6 单体剖分定义为: 设 Ω 实现了拟一致的 6 单体剖分 $\mathcal{T}^h$, 对于每个 6 单体 $e \in \mathcal{T}^h$, 其顶点即为结点. 若对任意一对相邻结点 P 和 Q , 以及对以 P 为端点的棱 PP' , 必有以 Q 为端点的棱 QQ' , 使得 PP' 与 QQ' 构成一个近似平行四边形, 即 $|\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'}| \leq Ch^2$, 其中 C 与 h 无关, 则称剖分 $\mathcal{T}^h$ 为 C 一致 6 单体剖分. 引理 4.2 中的 C 一致矩形剖分的定义与 C 一致 6 单体剖分类似, 不同的只是对于剖分单元而言, 后者为 6 单体, 而前者为 6 四边形而已.

现在给出下面的超收敛估计.

定理 4.1 假设 $\{\mathcal{T}^h\}$ 是 Ω 的 C 一致 6 单体剖分族, $S_0^h(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ 为该剖分族上的线性 Lagrange 有限元空间, $u \in W^{3,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $u_h \in S_0^h(\Omega)$ 是 u 的线性有限元逼近, Π 是相应的插值算子, 则有下面的超收敛估计:

$$|u_h - \Pi u|_{1,\infty} \leq Ch^2 |\ln h|^{\frac{4}{3}} \|u\|_{3,\infty}. \quad (4.3)$$

证明 对任意 $Z \in \Omega$, 由 (1.2)、(1.3) 和 (1.5) 知,

$$\partial_\ell(u_h - \Pi u)(Z) = a(\partial_{Z,\ell} G_Z^h, u_h - \Pi u) = a(u - \Pi u, \partial_{Z,\ell} G_Z^h). \quad (4.4)$$

结合 (3.6)、(4.1) 和 (4.4) 立即可得 (4.3), 定理 4.1 得证. $\square$

定理 4.2 假设 $\{\mathcal{T}^h\}$ 是 Ω 的 C 一致矩形剖分族, $S_0^h(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ 为该剖分族上的张量积 k ($k \geq 1$) 次 Lagrange 有限元空间, $u \in W^{k+2,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $u_h \in S_0^h(\Omega)$ 是 u 的张量积 k ($k \geq 1$) 次有限元逼近, Π 是相应的插值算子, 则有下面的超收敛估计:

$$|u_h - \Pi u|_{1,\infty} \leq Ch^{k+1} |\ln h|^{\frac{4}{3}} \|u\|_{k+2,\infty}. \quad (4.5)$$

证明 对任意 $Z \in \Omega$, 由 (1.2)、(1.3) 和 (1.5) 知,

$$\partial_\ell(u_h - \Pi u)(Z) = a(\partial_{Z,\ell} G_Z^h, u_h - \Pi u) = a(u - \Pi u, \partial_{Z,\ell} G_Z^h). \quad (4.6)$$

结合 (3.6)、(4.2) 和 (4.6) 立即可得 (4.5), 定理 4.2 得证. $\square$

致谢 感谢审稿人审阅本文并给出有建设性的修改意见.

参考文献

- 1 朱起定, 林群. 有限元超收敛理论. 长沙: 湖南科技出版社, 1989
- 2 陈传淼, 黄云清. 有限元高精度理论. 长沙: 湖南科技出版社, 1995
- 3 陈传淼. 有限元超收敛构造理论. 长沙: 湖南科技出版社, 2001
- 4 Goodsell G. Pointwise superconvergence of the gradient for the linear tetrahedral element. *Numer Methods Partial Differential Equations*, 1994, 10: 651–666
- 5 Liu J H, Jia B, Zhu Q D. An estimate for the three-dimensional discrete Green's function and applications. *J Math Anal Appl*, 2010, 370: 350–363
- 6 Liu J H, Zhu Q D. Uniform superapproximation of the derivative of tetrahedral quadratic finite element approximation. *J Comput Math*, 2005, 23: 75–82
- 7 Liu J H, Zhu Q D. Maximum-norm superapproximation of the gradient for the trilinear block finite element. *Numer Methods Partial Differential Equations*, 2007, 23: 1501–1508
- 8 Liu J H, Zhu Q D. Pointwise supercloseness of tensor-product block finite elements. *Numer Methods Partial Differential Equations*, 2009, 25: 990–1008
- 9 刘经洪, 朱起定. 三维离散导数 Green 函数的 $W^{1,1}$ 半范估计. *湖南文理学院学报 (自然科学版)*, 2004, 16: 1–3
- 10 Liu J H, Zhu Q D. The $W^{1,1}$ -seminorm estimate for the discrete derivative Green's function for the 5D Poisson equation. *J Comput Anal Appl*, 2011, 13: 1143–1156
- 11 Liu J H, Hu G. An estimate for the discrete derivative Green's function for the 4D variable coefficient elliptic equation. *J Comput Anal Appl*, 2012, 14: 165–172
- 12 Adams R A. *Sobolev Spaces*. New York: Academic Press, 1975

Superconvergence of the six-dimensional linear and tensor-product k ($k \geq 1$)-order finite elements

LIU JingHong, ZHU QiDing & JIA YinSuo

Abstract In this paper, we study superconvergence of the linear and tensor-product k ($k \geq 1$)-order finite elements for the six-dimensional elliptic problem. First, the definitions of the discrete derivative δ function, L^2 -projection operator, generalized derivative Green's function, and discrete derivative Green's function are introduced. Second, the $W^{1,1}$ -seminorm estimate for the discrete derivative Green's function is derived by using the weighted-norm estimates. Finally, with the weak estimate of the first type and the estimate for the discrete derivative Green's function, pointwise superconvergent estimates for the derivatives of the linear and tensor-product k ($k \geq 1$)-order finite elements are obtained.

Keywords discrete derivative Green's function, six-dimensional finite element, weak estimate, superconvergence

MSC(2010) 65N30

doi: 10.1360/N012014-00219