论 文

模糊度的结构分析

张铃^①, 张钺^{②*}, 张燕平^①

① 安徽大学计算机学院, 合肥 230039

② 清华信息科学与技术国家实验室, 智能技术与系统国家重点实验室, 清华大学信息学院计算机系, 北京 100084

* 通信作者. E-mail: dcszb@tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2010-08-10; 接受日期: 2010-10-19

国家自然科学基金 (批准号: 90820305, 61073117) 和国家基础研究发展计划 (批准号: 2007CB311003) 资助项目

摘要 从商空间的粒度计算理论出发, 本文讨论模糊集的模糊度量问题, 即模糊度的定义. 根据模糊集的结构分析, 我们提出“各向同性”的假设, 在这个假设下得出以下结果: (1) 在有限完备半序集上具有各向同性的模糊度是唯一的. (2) 得出模糊数学中的模糊度函数同构的充分必要条件. (3) 得出模糊度具有模糊单调性和粒度单调性的充分必要条件. (4) 在一定的假设下, 给出模糊度的解析表达式. 这些结果阐明了模糊度与粒计算的关系, 揭示了模糊度的本质, 同时提供一种构造模糊度的简易方法.

关键词 商空间 模糊集 模糊度 粗糙集 结构分析

1 引言

当前粒计算有两条基本研究路线. 一是关注不确定处理, 特别是模糊处理. 它的依据是“几乎所有人类的推理与概念形成, 其粒度都是模糊的” — Zadeh^[1]. 如模糊集理论、粗糙集理论与区间分析等属于这一类. 另一是强调计算复杂性, 即问题分层求解. 它的依据是“人类问题求解的一个基本特点是, 能够从不同粒度上观测世界, 并方便地从一个抽象层次转换到另外的层次, 也就是分层递阶地处理问题” — Hobbs^[2], 商空间理论等属于这一类. 这两条路线至今还是各自独立发展, 将二者结合起来的研究工作不多. 本文试图通过模糊测度的结构分析将这二者结合起来. 我们相信, 这两条路线的结合不仅会推动粒计算理论的发展, 还将提高不确定性处理的效率. 为此, 需要首先介绍目前有关模糊测度的已有研究成果.

自从 Zadeh^[3] 提出模糊事件的概率测度以来, 许多研究者从不同的角度研究了模糊测度 (fuzzy measure) 问题, 这些研究基本上分为两大类. 一类是从数学出发, 将函数论中的有关测度的概念、性质、命题推广到模糊集; 另一类是在“信息熵”(information entropy) 概念的影响下, 将模糊测度看成是对模糊集的模糊性的度量进行研究.

从数学角度研究的有以下成果, Sugeno 提出模糊积分 (fuzzy integral)^[4] 与极大测度 (max-measures)^[5] 的概念, 并研究其相关性质; Zhang 等^[6] 讨论了模糊测度序列的各种收敛性以及模糊积分的广义收敛定理; Wang 等^[7] 讨论模糊积分及其绝对连续性问题; Mesiar^[8] 研究模糊事件的可能性测度和它的积分表示; Klir 等^[9] 讨论专家系统中构造模糊测度的方法; Ha 等^[10] 引入模糊度序列的基础收敛

引用格式: 张铃, 张钺, 张燕平. 模糊度的结构分析. 中国科学: 信息科学, 2011, 41: 820–832

(fundamental convergence) 概念, 并讨论其性质; Li 等^[11]、Liu 等^[12]、Jiang 等^[13]、Mesiar^[14,15]、Ban 等^[16,17]、Krasdhmer^[18] 和 Guo^[19] 等, 分别讨论了不同模糊度的定义及其数学性质. 总之, 以上研究工作都是试图从不同的角度将普通集合中的测度概念扩展到模糊集族. 另一类是运用信息熵的概念, 对模糊集合的模糊程度的度量进行研究, 从这个观点出发取得的研究成果有, Chakrabarty 等^[20] 利用模糊集和它邻近清晰集的关系, 给出一种模糊性度量; He^[21] 利用线性模糊度公式给出模糊熵公式; Wang 等^[22] 提出一种基于信息熵的粗糙集的模糊熵度量方法; Liang 等^[23-25] 建立了粗糙集的模糊熵度量公式, 并提出包含度的概念等; Zhao 等^[26] 给出了模糊粗糙集的模糊、粗糙熵度量; Qi 等^[27] 利用一种信息熵定义模糊粗糙集的模糊性度量, 并给出这种度量的性质; Miao^[28] 借用熵的概念来定义模糊度等; Delgado 等^[29] 引入上、下模糊测度的概念, 并讨论其对应性质; Banerjee 等^[30] 提出一种模糊集的粗糙度的定义为 $\rho_A^{\alpha,\beta} \equiv 1 - |A_\alpha|/|\bar{A}_\beta|$, 并讨论其简单的性质; Chakrabarty 等^[20] 引入粗糙集的模糊性的测度 $F_X^R(x) = |[x]_R \cap X|/|[x]_R|$.

同样, 在模糊数学中文献 [31, 32] 也讨论模糊度的问题, 比如引入一般的模糊度公式 $d(F_X^B) = g(\sum_{i=1}^n c_i f(\mu_X^B(x_i)))$ 等. Mao 等¹⁾ 证明了在文献 [20-24, 26, 27] 中定义的模糊度 (粗糙度、粗糙熵、模糊熵) 只要适当地选取 g, f 的形式, 均可用上面公式表示.

以上工作主要集中在模糊度的定义及其相关性质的理论研究上, 但从需求出发与应用结合的研究还不多. 大家知道, 隶属度函数是模糊集的通用描述方法, 是对模糊集的一种精确刻画. 在许多场合, 这种描述方法由于过于精细而带来过高的计算复杂度, 而难以应用. 因此需要寻找一种对模糊集的“粗粒度”描述, 即模糊度. 问题是怎样的描述有助于模糊分析和有效计算? 与已有研究工作不同, 我们根据模糊商空间理论^[33], 将模糊商空间看成由一系列普通商空间链组成, 因此一个模糊集就可以用一系列具有不同粒度的商空间表示, 而将模糊度看成是对该模糊集的粗粒度观察, 即对模糊对象粗略的“定性”描述. 这样就把模糊度与多粒计算联系起来, 使研究工作更有意义. 我们的研究思路是, 当 X 是有限集合时, X 上的模糊集全体 $F(X)$ 可以看成是一个 n 维函数空间中的点集. 当 n 很大, 用隶属度函数来描述模糊性时, 其描述成本太高, 我们的目标是寻找一个更粗略的描述. 首先在 $F(X)$ 上引入半序, 将它变成半序集. 先讨论半序集上的模糊度, 研究模糊度在半序集上的序 (定性) 关系. 其次, 研究半序集上模糊度应该满足的基本 (定性) 条件 (假设), 讨论所有满足这些要求, 可能作为模糊度的集合. 再从不同角度 (不同应用需求) 出发选出“最合理”的一类, 以作为模糊集合的模糊度的定义, 使之容易应用于模糊分析与粒计算.

2 模糊度的定义

2.1 模糊度的定义

定义 1 设 X 是一有限集合, 用对应的隶属度函数来定义 X 上的一个模糊集 A , 即 $\mu_A(x), x \in X, 0 \leq \mu_A(x) \leq 1$, 简记为 $A(x)$.

引入模糊度的目的, 就是要从数量上来比较模糊集的模糊程度 (不确定程度).

定义 2 给定一个有限集合 X , 其上的全体模糊集记为 $F(X) = [0, 1]^X$, $F(X)$ 上的点可以看成是 X 上的一个函数, 两个函数 $h(x), g(x) \in F(X)$, 若 $\forall x \in X, h(x) \leq g(x)$, 则定义 $h \prec g$. 显然, X 上的所有模糊集, 在这样的定义下构成一个半序集合.

1) Mao J J, Wu T, Zhang L. The interpretation of knowledge fuzzy measures of rough sets (in Chinese). Submit to J Comput Sci Tech

下面我们讨论在上述半序集上模糊度的定义, 该定义需要满足的第一个条件是“单调性”.

单调性(模糊单调性) 设 d 是 X 上的模糊集簇 $F(X)$ 上的一个模糊度量, 若 $\forall x, y \in F(X), x \prec y$, 有 $d(x) \leq d(y)$ 成立, 则称 d 具有单调性. 若 $\forall x, y \in F(X), x \prec y, x \neq y$, 有 $d(x) < d(y)$ 成立, 则称 d 具有严格单调性.

严格单调性的约束保证了, 在原来半序集上可以比较的点集, 其相应的模糊度也是可比较的. 于是, 从可比较性(序关系)来看, 引入模糊度的概念, 原来半序空间中的有用信息并没有受损失, 而大大简化了原空间.

归一性 $\forall x \in F(X), 0 \leq d(x) \leq 1$.

归一性的要求不是主要的, 只是为了统一起见.

可是, 将模糊集当作函数空间上的点所定义的半序关系, 与我们对模糊性的直观理解并不一致. 比如, 两个模糊集其隶属度函数分别为 $f = (0.4, 0.5), g = (0.6, 0.8)$ 时, 从直观上看, 具有隶属度函数 f 的模糊集要比具有函数 g 的集合更模糊(更加不确定). 但从函数的半序关系看, 却有 $f \prec g$. 所以还要对函数进行适当地变换, 使变换后函数的序与模糊性的直观感觉一致, 即模糊集的隶属度函数值越接近于 0.5, 该集合则越模糊. 为此只要对隶属度的值进行下面的变换即可.

$$h_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad h_1(x) = 2 \min\{x, 1 - x\}. \quad (1)$$

在以下讨论中, 我们假设模糊集的所有隶属度函数都经过 (1) 式的变换, 使其与模糊程度的直觉相一致.

2.2 有限半序集上的模糊度定义

定义 3 设 X 是半序集, $d: X \rightarrow [0, 1]$, 若 d 满足严格单调性, 则称 d 是 X 上的一个模糊度.

有了严格单调性的限制, 则在半序集上同一方向上的各个点(互相可比较的点集)之间的模糊程度, 已经有了一个“序”的关系. 但不同方向上的点(互不可比的点集)又如何定义其模糊度? 因为满足严格单调性条件的函数很多, 所以除严格单调性之外, 还需要加上一些限制, 以便得到合理的模糊测度. 这里我们提出一种可能的假设——“各向同性”. 为此, 需要引入“方向”的概念.

定义 4 设 X 是一有限完备半序集, 其最小元为 a , 最大元为 b , 设 $l_1 = (x_0 = a, x_1, \dots, x = x_i, \dots, x_n = b)$ 是由 a 经 x 到 b 的最长有向路径(即通过的点数最多), 则称 l_1 是 a 到 x 的方向, 其中 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, 称 x 是 i 级点(节点).

命题 1 点 x 的级数与所取的最长路径无关.

证明 取最长路径 $l_1 = (x_0 = a, x_1, \dots, x = x_i, \dots, x_n = b)$, $l_2 = (x'_0 = a, x'_1, \dots, x = x'_k, \dots, x'_n = b)$. 若 $i \neq k$, 不妨设 $i < k$, 做 $l_3 = (x_0 = a, x'_1, \dots, x = x_k, \dots, x_n = b)$, 即从 a 出发经 l_2 到 x , 再经 l_1 到 b , 得 l_3 的长度 $= (k + (n - i)) > n$, 这与 l_1 是最长路径矛盾. 证毕.

各向同性(假设) 同级的点赋以相同的模糊度.

这个假设说明, 不管沿什么方向只要从最小元开始最多通过 i 步到达的点, 都具有相同的模糊度, 故称之为各向同性.

定义 5 模糊度 d_1, d_2 是同构的 $\Leftrightarrow \forall x, y \in X, d_1(x) < d_1(y) \leftrightarrow d_2(x) < d_2(y)$.

命题 2 模糊度 d_1, d_2 是同构的, 则 $\forall x, y \in X, d_1(x) < d_1(y) \leftrightarrow d_2(x) < d_2(y)$ 且 $d_1(x) = d_1(y) \leftrightarrow d_2(x) = d_2(y)$.

定义 6 给定模糊度 d , 定义等价关系 $R: xRy \leftrightarrow d(x) = d(y)$, 称 R 是 d 对应的等价关系.

命题 3 模糊度 d_1, d_2 是同构的, 则其对应的等价关系 $R_1 = R_2$.

定理 1 (唯一性定理) 满足“各向同性”的模糊度是同构的.

证明 设 $d_1(x) < d_1(y)$, 若 $x \prec y$, 由模糊度的严格单调性, 得 $d_2(x) < d_2(y)$. 若 x, y 不可比较, 设 x 为方向 l_1 上的 i -级点, y 为方向 l_2 上的 j -级点, 由各向同性假设得 $i \neq j$. 不妨设 $i < j$, $d_1(x) < d_1(y)$. 设在 l_2 上的 i -级点为 z , 则由各向同性得 $d_2(x) = d_2(z)$, 得 $d_2(y) > d_2(z) = d_2(x)$.

同理可证, 当 $d_2(x) < d_2(y)$, 可得 $d_1(x) < d_1(y)$. 最后得模糊度 d_1, d_2 是同构的.

命题 4 满足各向同性的模糊度具有“最优性”, 即该模糊度对应的商空间的等价类的个数最少.

证明 设 X 的最长路径长度为 n , 由模糊度的严格单调性条件可知, 在最长路径上的点的模糊度值必须相区别, 故该模糊度对应的等价关系的等价类至少要有 $n+1$ 个. 而满足各向同性的模糊度其对应的商空间中只有 $n+1$ 个不同的等价类, 故得该模糊度为最优. 证毕.

命题 5 设 X 的最长路径长度为 n , 赋 i -级点的模糊度为 $d(x) = i/n$, 则 d 是同时满足严格单调性、各向同性与归一性的模糊度.

下面讨论模糊度与粒度的关系.

定义 7 设 (X, T) 是一个完备半序集合, 其中 T 是 X 上的半序, R 是 X 的一个等价关系, 其对应的商空间为 $[X]$, 令 $p: X \rightarrow [X]$ 为自然投影. 若 $\forall x \prec y, p(x) \prec p(y)$, 则称 R 是保序的, 其对应的商空间称为保序商空间. 若 $\forall x \prec y, x \neq y, p(x) \prec p(y), p(x) \neq p(y)$, 则称 R 是严格保序的 (商空间中半序关系的定义, 请见参考文献 [34] 第 1 章 1.4 节.)

命题 6 设 d 是 X 的模糊度, 令其对应的等价关系为 R , 则 R 在半序集 X 上严格保序的. 反之, 若 $[X]$ 是 X 的严格保序 (全序) 商空间, 则 $[X]$ 上的模糊度定义了 X 上的一个模糊度.

从命题 6 可知, 模糊集簇的模糊度是该集簇在某个商空间上的粗粒度的观察. 一般, 模糊度未必是最优的 (其对应商空间的粒度个数最少). 即使是最优的模糊度, 也未必是“各向同性”.

3 商空间链上的模糊度的性质

3.1 模糊度与粒度的关系

上一节我们将模糊集簇 $F(X)$ 看成是一个半序空间, 由此得出模糊度是对象在某个严格保序 (全序) 商空间上的度量, 即对 $F(X)$ 进行的粗粒度度量.

现在换一个角度, 对 $F(X)$ 的底空间 X 进行分析, 即将模糊集簇看成是 $X(|X| = n)$ 空间上的函数的集合. 讨论当底空间 X 的空间粒度变化时, 模糊度将发生什么样的变化? 如 X 的商空间 $[X]$ 的基数为 $m (< n)$, X 上的模糊集经变换之后, 成为 $[X]$ 上的模糊集, 则原来是 n 维空间上的点, 变为 m 维空间上的点, 这就大大降低描述的成本.

设 $F(X) = [0, 1]^X$, $X > X_1 > \cdots > X_n$ 是 X 的一个分层递阶商空间链, 商空间 X_i 上的模糊集为 $F(X_i)$. 现在问 $F(X_i)$ 的半序与 $F(X)$ 的半序有什么样的联系? 要回答这个问题, 首先要讨论 $F(X)$ 到 $F(X_i)$ 的映射 p_i 的性质, 因为 $F(X)$ 与 $F(X_i)$ 的关系与 p_i 的形式有关.

当我们将 X 上的模糊集 (其隶属度函数) 看成是 X 上的属性 f 时, 对于给定的商空间 X_i , f 在 X_i 上有一个对应的商属性为 f_i , f_i 是 f 在 X_i 上的投影. 这个商属性 (函数) 是 $F(X_i)$ 上的点, 即 X_i 上的模糊集.

定义 8 给定空间 (X, f) 和商空间 X_i , 定义 f 在 X_i 上的商函数 f_i 为 $\forall a \in X_i, f_i(a) = E_{x \in a}(f(x))$, 其中 $E(\cdot)$ 表示取均值 (或加正权均值), 称 f_i 为 f 在 X_i 上的商函数. 其映射记为 $f_i = p_i(f)$,

称为自然投影.

定理 2 设模糊集簇 $F(X)$, X_1 是 X 的商空间, 令 $p_1 : F(X) \rightarrow F(X_1)$ 是其自然投影, 则 $\forall f, g \in F(X), f \prec g$, 有 $p_1(f) = f_1 \prec p_1(g) = g_1$, 且若 $f \prec g, f \neq g$, 有 $f_1 \prec g_1, f_1 \neq g_1$. 即 p_1 是严格单调的.

证明 设 $\forall f, g \in F(X), f \prec g, f \neq g$, 对 $\forall a \in X_1$, 有 $f_1(a) = E_{x \in a}(f(x)), g_1(a) = E_{x \in a}(g(x))$. 又因为 $\forall x \in X, f(x) \leq g(x)$, 故得 $\forall a \in X_1, f_1(a) \leq g_1(a)$, 且当 $f \neq g$ 时, 至少存在 $x_0 \in X, x_0 \in a_0 \in X_1$ 使得 $f(x_0) < g(x_0)$. 于是得 $f_1(a_0) < g_1(a_0)$, 即得 $f_1 \neq g_1$. 证毕.

推论 2 令 X_n 是 X 的商空间且 $|X_n| = 1$, 令 $d_1(f_1), f_1 \in F(X_n)$ 是 $F(X_n)$ 上的一个模糊度, 则 $d(f) = d_1(p(f)), f \in X(f \in [f] = p(f), p : X \rightarrow X_n)$, 是 $F(X)$ 上的一个模糊度.

证明 设 $f, g \in X, f \prec g, f \neq g$, 则 $f_1 = p(f) \prec g_1 = p(g), f_1 \neq g_1$. 再由 d_1 的严格增的性质, 得到 $d(f) = d_1(f_1) < d_1(g_1) = d(g)$. 于是 d 是 X 上的严格增函数. 故得 d 是 X 上的模糊度.

这个推论说明, 若只关心模糊度, 则可在粒度最粗的 X 的商空间上来考察模糊集簇, 而不影响模糊度的严格单调性. 并且指出从底空间出发, 也依然可以得到模糊集簇的粗粒度的观察.

4 粗糙集的模糊度

4.1 粗糙集不确定性的描述

上一节讨论了半序集上定义的模糊度问题, 得出半序集上的任一模糊度等价于一个 (严格保序) 商空间上的模糊度. 反之, X 上的任一 (严格保序) 商空间的模糊度必定义 X 上的一个模糊度.

本节我们将讨论粗糙集的模糊度的定义. 为此分两步走, 首先对粗糙集 X 上的任意集合定义其对应的模糊集, 即用模糊集来定义粗糙集 X 的不确定性; 第二步, 对得到的模糊集簇定义对应的模糊度. 其中第二步已经在前两节讨论过, 这里主要讨论利用模糊性来刻画粗糙集的问题. 在这方面已有不少的工作 [20-24, 26-28], 如 Wang 等 [22] 对模糊度与粒度之间的关系做了比较详细的讨论.

在粗糙集理论中, 既然是利用边界来表示事物的不确定性, 因此可以直接利用边界来描述粗糙集的模糊程度. 并要求它满足以下假设 (条件):

(1) 粒度单调性假设当商空间的粒度越粗, 其对应的模糊度越大.

(2) 不确定性 (模糊性) 单调性假设边界集合的不确定性越大, 其对应的模糊度越大. 其中, 集合不确定性越大, 是指一个集合 X 包含在确定集合中的部分越接近该集合的一半.

由粗糙集理论可知, 在论域 U 上, 给定一个集合 X , 当空间的粒度越粗, 其对应的边界也越大. 故要满足上面的第一个条件, 只要定义的模糊度与边界的大小呈正相关即可. 至于第 2 条件, 我们在下面再讨论.

现在让我们对已有的一些定义进行分析 [22-24, 26, 27].

定义 9 给定 U 的商空间 $[U]$ (由属性集 B 产生的商空间) 和 U 上的任一集合 X , 定义隶属度函数为

$$\forall x \in X, \quad \mu_X^B(x) = \frac{|X \cap [x]_B|}{|[x]_B|}. \quad (2)$$

很多文献都利用这个公式来描述粗糙集的模糊性, 但这个定义不满足条件 (2). 一般认为, 当公式 (2) 中的 $[x]_B$ 一半在 X 内, 一半在 X 外时, 此时点 x 的模糊性 (从属关系的不确定性) 最大. 但由 (2) 式可知, 此时隶属度函数的取值并不是最大. 故要使定义的隶属度与不确定性成正相关, 可按 (1) 式对

(2) 式进行变换, 得公式 (3).

$$\begin{aligned} h_1(\mu_X^B(x)) &= 2 \min\{\mu_X^B(x), 1 - \mu_X^B(x)\} = 2 \min\left\{\frac{|X \cap [x]_B|}{|[x]_B|}, 1 - \frac{|X \cap [x]_B|}{|[x]_B|}\right\} \\ &= 2 \min\left\{\frac{|X \cap [x]_B|}{|[x]_B|}, \frac{|X^C \cap [x]_B|}{|[x]_B|}\right\}, \end{aligned}$$

简记为

$$\mu_X^B(x) = \frac{2 \min(|X \cap [x]_B|, |X^C \cap [x]_B|)}{|[x]_B|}. \quad (3)$$

以下证明, 若用 $\sum_i \mu_X^B(x_i)$ 来定义 $F(U)$ 中的模糊度, 则满足“粒度单调性假设”.

命题 7 设 B_1, B_2 是论域 U 的属性集, $B_1 \subset B_2$, 令 U/B_i 是由 B_i 定义的商空间. 令 $d_1(X) = \sum_i \mu_X^{B_1}(x_i)$, $d_2(X) = \sum_i \mu_X^{B_2}(x_i)$. 则 $\forall X \in F(U), d_1(X) \geq d_2(X)$.

证明 不妨设存在 x_1 使得 $[x_1]_{B_1} = [x_1]_{B_2} \cup [x_2]_{B_2}$ 成立, 以及 $[x_i]_{B_1} = [x_i]_{B_2}, i = 3, \dots, n$.

下面证明 $\mu_X^{B_1}(x_1) \geq \mu_X^{B_2}(x_1) + \mu_X^{B_2}(x_2)$. 由于

$$\begin{aligned} \mu_X^{B_1}(x_1) &= \frac{2 \min\{|X \cap [x_1]_{B_1}|, |X^C \cap [x_1]_{B_1}|\}}{|[x_1]_{B_1}|} \\ &= \frac{2 \min\{|X \cap ([x_1]_{B_1} \cup [x_2]_{B_1})|, |X^C \cap ([x_1]_{B_1} \cup [x_2]_{B_1})|\}}{|[x_1]_{B_1} \cup [x_2]_{B_1}|}, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{x \in [x_1]_{B_1}} \mu_X^{B_1}(x) &= 2 \min\{|X \cap [x_1]_{B_1}|, |X^C \cap [x_1]_{B_1}|\}, \\ \sum_{x \in [x_1]_{B_2}} \mu_X^{B_2}(x) + \sum_{x \in [x_2]_{B_2}} \mu_X^{B_2}(x) &= 2 \min\{|X \cap [x_1]_{B_2}|, |X^C \cap [x_1]_{B_2}|\} + 2 \min\{|X \cap [x_2]_{B_2}|, |X^C \cap [x_2]_{B_2}|\}. \end{aligned}$$

令 $a_1 = 2(|X \cap [x_1]_{B_2}|), b_1 = 2(|X^C \cap [x_1]_{B_2}|), a_2 = 2(|X \cap [x_2]_{B_2}|), b_2 = 2(|X^C \cap [x_2]_{B_2}|)$,

(1) 若 $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2$, 则 $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$, 得

$$\sum_{x \in [x_1]_{B_1}} \mu_X^{B_1}(x) = a_1 + a_2 = \sum_{x \in [x_1]_{B_2}} \mu_X^{B_2}(x) + \sum_{x \in [x_2]_{B_2}} \mu_X^{B_2}(x).$$

(2) 若 $a_1 \leq b_1, a_2 \geq b_2$ 时, 又有两种情况:

(2.1) 若 $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$, 则 $\sum_{x \in [x_1]_{B_1}} \mu_X^{B_1}(x) = a_1 + a_2 \geq a_1 + b_2 = \sum_{x \in [x_1]_{B_2}} \mu_X^{B_2}(x) + \sum_{x \in [x_2]_{B_2}} \mu_X^{B_2}(x)$;

(2.2) 若 $b_1 + b_2 \leq a_1 + a_2$, 则 $\sum_{x \in [x_1]_{B_1}} \mu_X^{B_1}(x) = b_1 + b_2 \geq a_1 + b_2 = \sum_{x \in [x_1]_{B_2}} \mu_X^{B_2}(x) + \sum_{x \in [x_2]_{B_2}} \mu_X^{B_2}(x)$.

其他情况, 同理可得 $\sum_{x \in [x_1]_{B_1}} \mu_X^{B_1}(x) \geq \sum_{x \in [x_1]_{B_2}} \mu_X^{B_2}(x) + \sum_{x \in [x_2]_{B_2}} \mu_X^{B_2}(x)$.

故得由 (3) 式定义的模糊度满足“粒度单调性”假设. 证毕.

下面讨论模糊集簇的模糊度时, 都假定其对应的隶属度函数已经过 (1) 式的变换.

在模糊数学中模糊度的概念是通过模糊度公理引入^[31,32].

定义 10 设 $d: F(U) \rightarrow [0, 1]$ 满足:

(1) $d(A) = 0, A \in P(U) (P(U)$ 是 U 的幂集);

(2) $\forall A \in F(U), d(A) = d(A^c)$;

$$(3) d((0.5, \dots, 0.5)) = 1;$$

$$(4) A(x_i), B(x_i) \leq 0.5, i = 1, \dots, n, A \prec B \Rightarrow d(A) \leq d(B) \text{ (即满足单调性)}.$$

然后用下面的公式来定义模糊度:

$$d: F(U) \rightarrow [0, 1], \text{ 有 } d(X) = g\left(\sum_{i=1}^n c_i f_i(\mu_X^B(x_i))\right), \quad (4)$$

其中 $\mu_X^B(x)$ 是 X 的隶属度函数, c_i 为正的实数, $g: [0, a] \rightarrow [0, 1]$ 满足:

$$(1) g(a) = 1, g(0) = 0, a = \sum_{i=1}^n c_i f_i(0.5);$$

(2) $g(t)$ 在 $[0, a]$ 上严格递增, $f_i: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 满足: (i) $\forall f_i(0) = 0$; (ii) $f_i(t)$ 在 $[0, 0.5]$ 严格增; (iii) $\forall x \in [0, 1], f(x) = f(1-x)$.

设先对隶属度函数进行 (1) 式的变换, 那么对函数 f 只要假设它在 $[0, 1]$ 上严格增, 而且 $f(0) = 0, f(1) = 1$ 即可. 为区别起见, 特将 (4) 式中利用变换后的隶属度函数计算的 d 改为 dB , 如 (5) 式所示:

$$dB: F(U) \rightarrow [0, 1], \text{ 有 } dB(X) = g\left(\sum_{i=1}^n c_i f_i(\mu_X^B(x_i))\right). \quad (5)$$

命题 8 设 $d_1: F(U) \rightarrow [0, 1]$ 是一严格增函数, 且 $d_1(0, \dots, 0) = 0, d_1(1, \dots, 1) = 1$. 令 $d = d_1(h_1^{(n)}): F(U) \rightarrow [0, 1]$, 则 d 是 $F(U)$ 上满足定义 10 中 (1)–(4) 条件的模糊度. 其中, $h_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (h_1(x_1), \dots, h_1(x_n)), h_1: [0, 1] \rightarrow [0, 1], h_1(x) = 2 \min\{x, 1-x\}$.

证明 对 $A \in P(U)$, 其隶属度函数 $\mu(A)$ 的取值为 1 或 0, 故由 h_1 得 $h_1^{(n)}(\mu(A)) = (0, \dots, 0)$, 又得 $d(\mu(A)) = d_1(h_1^{(n)}(\mu(A))) = d_1(0, \dots, 0) = 0$. 其次, 因为 $\mu(A^C) = 1 - \mu(A)$, 由 h_1 得 $d(\mu(A)) = d_1 h_1^{(n)}(\mu(A)) = d_1(2 \min\{\mu(A), 1 - \mu(A)\}) = d_1(2 \min\{1 - \mu(A^C), \mu(A^C)\}) = d(\mu(A^C))$. 再由 h_1 得 $d_1(h_1(0.5, \dots, 0.5)) = d_1(1, \dots, 1) = 1$. 最后由 d_1 是严格增的, 故得条件 (4) 成立. 证毕.

下面对公式 (5) 进行简单分析, 先设模糊度为下面更一般的形式:

$$d(X) = gh(f_1(\mu_X^B(x_1)), \dots, f_n(\mu_X^B(x_n))), \quad (6)$$

其中 $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 严格单调增, $h: F(U) \rightarrow [0, 1]$ 是 n 元函数, $f_i, i = 1, \dots, n$ 定义在 $[0, 1]$ 上的严格增函数.

定义 11 设 n 元函数 $h(x_1, \dots, x_n): X \times \dots \times X \rightarrow R$, 若满足 $\forall x_i \in X, h(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, 0, \dots, 0) + h(0, x_2, \dots, 0) + \dots + h(0, \dots, x_n)$, 则称 h 满足定义域可加性.

命题 9 给定函数 g_1, g_2 , 设在 $[0, 1]$ 上是严格增, 设用 (6) 式定义对应的模糊度为 d_1, d_2 , 则 d_1, d_2 是同构的.

证明 令 $h(x) = h(x_1, \dots, x_n)$, 设 $d_1(x) = g_1(h(x)) < d_1(y) = g_1(h(y))$, 由 g_1 满足严格单调性, 故有 $h(x) < h(y)$. 再由 g_2 的严格单调性, 得 $d_2(x) = g_2(h(x)) < d_2(y) = g_2(h(y))$. 最后由命题 3 得 d_1, d_2 同构, 证毕.

由命题 9 知, 不同的函数 g , 按公式 (6) 定义的模糊度都是同构的, 因此我们可以选取一个最简单的函数, 比如 $g(x) = cx$. 于是, 公式 (6) 就简化为

$$d(X) = h(f_1(\mu_X^B(x_1)), \dots, f_n(\mu_X^B(x_n))). \quad (7)$$

这样, 模糊度的定义得到极大的简化, 这也是利用结构分析法的好处之一.

进一步我们分析 f 是连续函数的情况.

命题 10 设由公式 (7) 定义的模糊度, 若具有各向同性和定义域可加性, 则

$$d(X) = \sum_i f(\mu_X^B(x_i)). \quad (8)$$

证明 由各向同性, 得 $f_i = f_j = f, i, j = 1, \dots, n$. 又由定义域可加性得 $d(X) = h(f(\mu_X^B(x_1)), 0, \dots, 0) + h(0, f(\mu_X^B(x_2)), 0, \dots, 0) + \dots + h(0, \dots, 0, f(\mu_X^B(x_n)))$. 再由各向同性得 $h(x, 0, \dots, 0) = h(0, x, 0, \dots, 0) = \dots = h(0, \dots, 0, x) = f(x)$. 最后得 $d(X) = \sum_i f(\mu_X^B(x_i))$. 证毕.

定理 3 设 f_1 与 f_2 是 $[0, 1]$ 上两个严格增连续函数, 且 $f_i(0) = 0, f_i(1) = 1, i = 1, 2$, 用公式 (8) 分别对 f_1 与 f_2 定义模糊度 d_1 与 d_2 , 则,

(1) $n = 1$, 对任意的 f_1, f_2, d_1, d_2 同构;

(2) $n > 1, d_1, d_2$ 同构 $\Leftrightarrow \forall x \in [0, 1], f_1(x) = f_2(x)$.

证明 (1) 的证明, $n = 1$, 得 $|X| = 1$, 令 $C_\lambda^i = \{x | d_i(x) = \lambda, x \in F(X), 0 \leq \lambda \leq 1\}, i = 1, 2$. 作变换 $\mu = f_2(f_1^{-1}(\lambda))$, 下面证明 $C_\lambda^1 = C_\mu^2$. 任取 $x \in C_\lambda^1$, 有 $f_1(x) = \lambda, x = f_1^{-1}(\lambda), f_2(x) = f_2(f_1^{-1}(\lambda)) = \mu \Rightarrow x \in C_\mu^2$. 同理可证 $x \in C_\mu^2$, 有 $x \in C_\lambda^1$. 故得 $C_\lambda^1 = C_\mu^2$, 最后得 d_1, d_2 同构 (由 f_1 的严格增和连续性可得, 存在函数 f_1^{-1} 且严格增和连续).

(2) 的证明, 不妨设 $n = 2$, 由模糊度定义, 有 $d_1((0, 0)) = d_2((0, 0)) = 0, d_1((1, 1)) = f_1(1) + f_1(1) = 2f_1(1) = 1 = d_2((1, 1)) = 2f_2(1)$. 得到 $f_1(1) = f_2(1) = 1/2$, 令 a_2 为 $f_1(a_2) = (\frac{1}{2})^2$, 故有 $d_1((a_2, a_2)) = 2f_1(a_2) = 2(\frac{1}{2})^2 = f_1(1)$. 得 $(a_2, a_2), (1, 0) \in C_{(0.5)^1}^1 \Rightarrow (a_2, a_2), (1, 0) \in C_\mu^2$, 再由 $f_2(1) = \frac{1}{2}$, 得 $f_2(a_2) = (\frac{1}{2})^2$. 用归纳法可得 $a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots, f_1(a_i) = f_2(a_i) = 2^{-i}, i = 2, \dots$.

对任意 $i, j > 1$, 取 (a_i, a_j) 有 $d_1((a_i, a_j)) = f_1(a_i) + f_1(a_j) = f_2(a_i) + f_2(a_j) = 2^{-i} + 2^{-j} < 1$, 存在 b , 使得 $0 < b < 1, f_1(b) = 2^{-i} + 2^{-j}$. 于是, $(a_i, a_j), (b, 0) \in C_{(2^{-i}+2^{-j})}^1 = C_\mu^2$. 又因为 $d_2((a_i, a_j)) = 2^{-i} + 2^{-j}$, 得 $\mu = 2^{-i} + 2^{-j}, f_2(b) \in C_\mu^2$, 得 $f_1(b) = f_2(b)$. 这样由 (a_i, a_j) 可以得到 b , 称 b 是 a_i, a_j 的组合. 再由 b 和 a_i 可构成三个 a_i 的组合.

现设 D 是所有有限个 a_i 的组合的数的全体, 容易证明 $f_1(D)$ 在 $[0, 1]$ 上稠密. 由于函数 $f_1, f_2: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 是严格单调与连续, 故函数 f_1^{-1}, f_2^{-1} 也是严格单调与连续. 又因 $\forall x \in D, f_1(x) = f_2(x)$ 与 $f_1(D)$ 在 $[0, 1]$ 上稠密, 得 f_1^{-1} 与 f_2^{-1} 在 $[0, 1]$ 的一个稠密集 $f_1(D)$ 上相等. 由 f_1^{-1}, f_2^{-1} 在 $[0, 1]$ 上连续, 得 f_1^{-1}, f_2^{-1} 在 $[0, 1]$ 上相等, 即在 $[0, 1]$ 上 f_1, f_2 相等. 证毕.

公式 (8) 将一个 n 维空间上的函数变换成一维空间上的函数. 定理 3 说明, 尽管将公式 (6) 简化为公式 (8), 原有函数结构的多样性依然保持. 因为不同的 f 将产生不同构的模糊度, 故模糊度可以通过 (8) 式进行研究.

定义 12 如果可微函数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ 满足 $\forall x, y \in X, f(xy) = f(x)f(y)$, 则称 f 是可乘的.

命题 10 说明具有定义域可加性和各向同性的模糊度, 可以采用公式 (8) 的简化形式, 但 f 的具体形式仍未能确定, 为了确定 f 的具体形式, 再加上一个可乘性的限制.

定理 4 若模糊度满足各向同性、定义域可加以及可乘性, 则

$$d(X) = \sum_i (\mu_X^B(x_i))^\alpha, \quad (9)$$

α 是常数.

证明 由命题 8 得 $d(X) = \sum_i f(\mu_X^B(x_i))$. 由分析学中的有关性质容易证明可乘函数必有 $f(x) = x^\alpha$ 形式, 最后得 $d(X) = \sum_i (\mu_X^B(x_i))^\alpha$, 证毕.

从上面分析可知, 模糊度的最主要两个性质是, 模糊单调性和粒度单调性. 下面给出模糊度具有这两个性质的充分必要条件.

定理 5 (基本定理) 用公式 (8) 定义的模糊度具有模糊单调性和粒度单调性的充分必要条件 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 上严格增, 其导数 f' 是单调降连续函数.

证明 先证明充分性.

由命题 8 可知, 所定义的模糊度满足模糊单调性, 下面证明满足粒度单调性条件.

设 B_1, B_2 是论域 U 的属性集, $B_1 \subset B_2$, 令 U/B_i 是由 $B_i, i = 1, 2$ 定义的商空间, 且有 $U/B_2 \prec U/B_1$, 令 $d_1(X) = \sum_i f(\mu_X^{B_1}(x_i)), d_2(X) = \sum_i f(\mu_X^{B_2}(x_i))$,

下证 $d_1(X) \geq d_2(X)$.

不妨设存在 x_1 使得 $[x_1]_{B_1} = [x_1]_{B_2} \cup [x_2]_{B_2}$, 其它的粒度均有 $[x_i]_{B_1} = [x_i]_{B_2}, i = 3, \dots, n$. 令 $a_1 = 2(|X \cap [x_1]_{B_2}|), b_1 = 2(|X^C \cap [x_1]_{B_2}|), a_2 = 2(|X \cap [x_2]_{B_2}|), b_2 = 2(|X^C \cap [x_2]_{B_2}|)$, 及 $a_1 + b_1 = a, a_2 + b_2 = b$.

由于

$$\begin{aligned} \mu_X^{B_1}(x_1) &= \frac{2 \min\{|X \cap [x_1]_{B_1}|, |X^C \cap [x_1]_{B_1}|\}}{|[x_1]_{B_1}|} \\ &= \frac{2 \min\{|X \cap ([x_1]_{B_1} \cup [x_2]_{B_2})|, |X^C \cap ([x_1]_{B_1} \cup [x_2]_{B_2})|\}}{|[x_1]_{B_1} \cup [x_2]_{B_2}|} \\ &= \frac{\min\{a_1 + a_2, b_1 + b_2\}}{a + b}, \end{aligned} \quad (10)$$

得

$$\sum_{x \in [x_1]_{B_1}} f(\mu_X^{B_1}(x)) = \sum_{x \in [x_1]_{B_1}} f\left(\min\left\{\frac{a_1 + a_2}{a + b}, \frac{b_1 + b_2}{a + b}\right\}\right), \quad (11)$$

$$\sum_{x \in [x_1]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x)) + \sum_{x \in [x_2]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x)) = \sum_{x \in [x_1]_{B_2}} f\left(\min\left\{\frac{a_1}{a}, \frac{b_1}{a}\right\}\right) + \sum_{x \in [x_2]_{B_2}} f\left(\min\left\{\frac{a_2}{b}, \frac{b_2}{b}\right\}\right), \quad (12)$$

下面分几种情况讨论:

(1) 若 $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2$, 则 $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$, 于是 (11), (12) 式分别简化为 (13), (14) 式:

$$\sum_{x \in [x_1]_{B_1}} f(\mu_X^{B_1}(x)) = (a + b)f\left(\frac{a_1 + a_2}{a + b}\right), \quad (13)$$

$$\sum_{x \in [x_1]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x)) = a\left(f\left(\frac{a_1}{a}\right)\right), \quad \sum_{x \in [x_2]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x)) = b\left(f\left(\frac{a_2}{b}\right)\right), \quad (14)$$

得 $\sum_{x \in [x_1]_{B_1}} f(\mu_X^{B_1}(x)) - \sum_{x \in [x_1]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x)) - \sum_{x \in [x_2]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x)) = (a + b)f\left(\frac{a_1 + a_2}{a + b}\right) - a\left(f\left(\frac{a_1}{a}\right)\right) - b\left(f\left(\frac{a_2}{b}\right)\right) = a(f(c) - f(c_1)) + b(f(c) - f(c_2))$, 其中 $c = \frac{a_1 + a_2}{a + b}, c_1 = \frac{a_1}{a}, c_2 = \frac{a_2}{b}$.

不妨设 $c_1 \leq c_2$, 则 $c_1 \leq c \leq c_2$, 由第二中值定理得, 存在 e_1, e_2 使得 $c_1 \leq e_1 \leq c, c \leq e_2 \leq c_2$.

$$\begin{aligned} a(f(c) - f(c_1)) + b(f(c) - f(c_2)) &= a(f'(e_1)(c - c_1)) + b(f'(e_2)(c - c_2)) \\ &= f'(e_1)[a(c - c_1) + b(c - c_2)] + b(f'(e_2) - f'(e_1))(c - c_2), \end{aligned} \quad (15)$$

由 f' 的单调降得当 $e_2 \geq e_1$ 时, 有 $f'(e_2) - f'(e_1) \leq 0$, 将 $c = \frac{a_1 + a_2}{a + b}, c_1 = \frac{a_1}{a}, c_2 = \frac{a_2}{b}$ 代入 $a(c - c_1) + b(c - c_2)$, 直接计算得 $a(c - c_1) + b(c - c_2) = 0$, 代入 (15) 式得 $\sum_{x \in [x_1]_{B_1}} f(\mu_X^{B_1}(x)) -$

$\sum_{x \in [x_1]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x)) - \sum_{x \in [x_2]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x)) = b(f'(e_2) - f'(e_1))(c - c_2) \geq 0$. 即 $\sum_{x \in [x_1]_{B_1}} f(\mu_X^{B_1}(x)) \geq \sum_{x \in [x_1]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x)) + \sum_{x \in [x_2]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x))$.

(2) 若 $a_1 \leq b_1, a_2 \geq b_2$, 且 $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$, 有 $a_1 + a_2 \geq a_1 + b_2$, 由 f 是严格增, 得 $f(\frac{a_1+a_2}{a+b}) \geq f(\frac{a_1+b_2}{a+b})$. 故

$$\begin{aligned} \sum_{x \in [x_1]_{B_1}} f(\mu_X^{B_1}(x)) &= \sum_{x \in [x_1]_{B_1}} f\left(\frac{a_1+a_2}{a+b}\right) \geq \sum_{x \in [x_1]_{B_1}} f\left(\frac{a_1+b_2}{a+b}\right) \\ &\geq \sum_{x \in [x_1]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x)) + \sum_{x \in [x_2]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x)). \end{aligned}$$

(3) 若 $a_1 \leq b_1, a_2 \geq b_2$, 且 $b_1 + b_2 \leq a_1 + a_2$, 有 $b_1 + b_2 \leq a_1 + a_2$, 得

$$\begin{aligned} \sum_{x \in [x_1]_{B_1}} f(\mu_X^{B_1}(x)) &= \sum_{x \in [x_1]_{B_1}} f\left(\frac{b_1+b_2}{a+b}\right) \geq \sum_{x \in [x_1]_{B_1}} f\left(\frac{a_1+b_2}{a+b}\right) \\ &\geq \sum_{x \in [x_1]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x)) + \sum_{x \in [x_2]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x)). \end{aligned}$$

其他情况, 同理可得 $\sum_{x \in [x_1]_{B_1}} f(\mu_X^{B_1}(x)) \geq \sum_{x \in [x_1]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x)) + \sum_{x \in [x_2]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x))$.

最后得 $\forall X \subset U, d_1(X) \geq d_2(X)$, 即满足粒度单调性.

现证明必要性. 用反证法, 不然设 f 在 $(e_1, e_2) \subset [0, 1]$ 上是单调下降, 取适当的 n, a, k 使满足 (16) 式. 令 $U = \{1, \dots, n\}$, $U/B = [U] = \{[x_1] = \{1, \dots, a\}, [x_2] = \{a+1\}, \dots, [x_{n-a-1}] = \{n\}\}$, $X_1 = \{1, \dots, k\}$, $X_2 = \{1, \dots, k+1\}$, 且

$$e_1 < \frac{2k}{a} < \frac{2(k+1)}{a} < e_2, \quad 2k+2 < a. \quad (16)$$

于是按公式 (3) 得

$$\begin{aligned} \mu_{X_1}^B(x_i) &= \frac{2 \min\{|X_1 \cap [x_1]|, |X_1^C \cap [x_1]|\}}{|[x_1]|} = \frac{2k}{a}, \quad i = 1, \dots, a; \\ \mu_{X_1}^B(x_i) &= 0, \quad i = a+1, \dots, n; \\ \mu_{X_2}^B(x_i) &= \frac{2 \min\{|X_2 \cap [x_1]|, |X_2^C \cap [x_1]|\}}{|[x_1]|} = \frac{2k+2}{a}, \quad i = 1, \dots, a+1; \\ \mu_{X_2}^B(x_i) &= 0, \quad i = a+2, \dots, n. \end{aligned}$$

得 $\mu_{X_1}^B \prec \mu_{X_1}^B$ 且 $\mu_{X_1}^B \neq \mu_{X_1}^B$, 但

$$d(\mu_{X_1}^B) = \sum_i f(\mu_{X_1}^B(x_i)) = af\left(\frac{2k}{a}\right), d(\mu_{X_2}^B) = \sum_i f(\mu_{X_2}^B(x_i)) = af\left(\frac{2k+2}{a}\right).$$

由 f 在 (e_1, e_2) 内是单调下降, 得 $f(\frac{2k}{a}) \geq f(\frac{2(k+1)}{a})$, 得 $d(\mu_{X_1}^B) \geq d(\mu_{X_2}^B)$. 这与模糊度的严格单调性矛盾, 故得 f 是严格增.

再证 f' 的单调降. 用反证, 若 f' 不单调降, 由 f' 的连续性, 得存在 $(d_1, d_2) \subset [0, 1]$, f' 在 (d_1, d_2) 上严格增. 适当取 U 的划分 B_1, B_2 和集合 X , 使得 $c = \frac{a_1+a_2}{a+b}, c_1 = \frac{a_1}{a}, c_2 = \frac{a_2}{b}, a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, a_1 \leq a_2$, 且 $d_1 < c_1 \leq c \leq c_2 < d_2$, 其中 $c = \frac{2|X \cap [x_1]_{B_1}|}{|[x_1]_{B_1}|}, c_1 = \frac{2|X \cap [x_1]_{B_2}|}{|[x_1]_{B_2}|}, c_2 = \frac{2|X \cap [x_2]_{B_2}|}{|[x_2]_{B_2}|}$.

由 (11) 式得

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in [x_1]_{B_1}} f(\mu_X^{B_1}(x)) - \sum_{x \in [x_1]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x)) - \sum_{x \in [x_2]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x)) \\ &= a(f(c) - f(c_1)) + b(f(c) - f(c_2)) = a(f'(e_1)(c - c_1)) + b(f'(e_2)(c - c_2)) \\ &= f'(e_1)[a(c - c_1) + b(c - c_2)] + b(f'(e_2) - f'(e_1))(c - c_2), \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $c_1 \leq e_1 \leq c \leq e_2 \leq c_2$.

由 f' 在 (d_1, d_2) 上严格增, 有 $f'(e_1) < f'(e_2)$, 代入 (17) 式, 得

$$\sum_{x \in [x_1]_{B_1}} f(\mu_X^{B_1}(x)) - \sum_{x \in [x_1]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x)) - \sum_{x \in [x_2]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x)) < 0,$$

得

$$\sum_{x \in [x_1]_{B_1}} f(\mu_X^{B_1}(x)) < \sum_{x \in [x_1]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x)) + \sum_{x \in [x_2]_{B_2}} f(\mu_X^{B_2}(x)),$$

得 $d(\mu_{X_1}^B) < d(\mu_{X_2}^B)$. 矛盾, 得 f' 在 $[0, 1]$ 上单调降. 证毕.

从证明中可知, f 的严格增性质保证了模糊度的模糊单调性, 而 f' 的单调降性质保证了模糊度的粒度单调性. 定理 5 将这两个模糊度的最主要性质与 f 的解析性质联系起来, 使我们对模糊度的结构有更深刻的认识.

定理 6 令 $f_1(x) = x^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, $f_2(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ 与 $f_3(x) = \ln(1+x)/\ln 2$, 设用 $f_i (i = 1, 2, 3)$ 按 (8) 式定义的模糊度为 $d_i, i = 1, 2, 3$, 则 d_i 具有模糊单调性和粒度单调性.

证明 由定理 5, 只要验证函数在 $[0, 1]$ 上一阶导数 $f' > 0$, 二阶导数 $f'' \leq 0$, 即可. 证明略.

定理 7 若 $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1], f(0) = g(0) = 0, f(1) = g(1) = 1$, 严格增, 其导数单调降, 则 $af(x) + bg(x) (a, b > 0)$ 及 $f(g(x))$ 在 $[0, 1]$ 上也是严格增, 其导数单调降. 证明略.

于是, 用定理 6 中的 3 种函数经复合、(正) 线性组合, 将产生出无数满足函数严格增, 导数单调降的初等函数, 这给构造具有模糊单调性和粒度单调性的模糊度, 提供一个非常方便的方法.

5 结论

本文从粒计算出发, 侧重模糊度的结构分析, 由此得出以下结论: (1) 模糊度是模糊集簇在某个全序商空间上的度量, 反之亦然. (2) 对于有限完备半序集, 其模糊度若满足各向同性, 则是同构的. (3) 讨论了模糊度与空间粒度、底空间粒度的关系. (4) 给出模糊数学中模糊度同构的充分必要条件, (5) 给出模糊度具有模糊单调性和粒度单调性的充分必要条件. 这些结果将模糊度与粒计算联系起来, 既加深了对模糊度本质的理解, 又推动了粒计算的发展, 使模糊度的研究更具理论意义与实用价值.

参考文献

- 1 Zadeh L A. Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic. *Fuzzy Sets Syst*, 1997, 90: 111–127
- 2 Hobbs J R. Granularity. In: *Proc IJCAI*. Los Angeles, 1985. 432–435
- 3 Zadeh L A. Probability measures of fuzzy events. *J Math Anal Appl*, 1968, 23: 421–427

- 4 Sugeno M. Theory of fuzzy integrals and its application. PhD Dissertation. Tokyo: Tokyo Institute of Technology, 1974
- 5 Sugeno M, Murofushi T. Pseudo-additive measures and integrals. *J Math Anal Appl*, 1987, 122: 197–222
- 6 Zhang D L, Guo C M. On the convergence of sequence of fuzzy measures and generalized convergence theorems of fuzzy integrals. *Fuzzy Sets Syst*, 1995, 72: 349–356
- 7 Wang Z Y, Klir G J, Wang W. Fuzzy measures defined by fuzzy Integral and their absolute continuity. *J Math Anal Appl*, 1996, 203: 150–165
- 8 Mesiar R. Possibility measures, integration and fuzzy possibility measures. *Fuzzy Sets Syst*, 1997, 92: 191–196
- 9 Klir G J, Wang Z Y, Harman D. Constructing fuzzy measures in expert systems. *Fuzzy Sets Syst*, 1997, 92: 231–264
- 10 Ha M H, Wang X Z, Wu C X. Fundamental convergence of sequences of measurable functions on fuzzy measure space. *Fuzzy Sets Syst*, 1998, 95: 77–81
- 11 Li X Q, Wang H, Li R X, et al. Extensions of a class of semi-continuous fuzzy measures. *Fuzzy Sets Syst*, 1998, 94: 397–401
- 12 Liu Y K, Zhang G Q. On the completeness of fuzzy measure space. *Fuzzy Sets Syst*, 1999, 102: 345–351
- 13 Jiang Q S, Suzuki H. Fuzzy measures on metric space. *Fuzzy Sets Syst*, 1999, 102: 345–351
- 14 Mesiar R. Generalizations of k -order additive discrete fuzzy measures. *Fuzzy Sets Syst*, 1999, 102: 423–428
- 15 Mesiar R. Fuzzy measures and integrations. *Fuzzy Sets Syst*, 2005, 156: 365–370
- 16 Ban A I, Gal S G. On the defect of complementarity of fuzzy measures. *Fuzzy Sets Syst*, 2002, 127: 353–362
- 17 Ban A I, Gal S G. On the defect of additivity of fuzzy measures. *Fuzzy Sets Syst*, 2002, 131: 365–380
- 18 Krasdhmer V. When fuzzy measures are upper envelopes of probability measures. *Fuzzy Sets Syst*, 2003, 138: 455–468
- 19 Guo C M, Zhang D L. On set-valued fuzzy measures. *Inf Sci*, 2004, 160: 13–25
- 20 Chakrabarty K, Biswas R, Nanda S. Fuzziness in rough sets. *Fuzzy Sets Syst*, 2000, 110: 247–251
- 21 He Y Q. New method for measuring fuzziness in rough sets. *Trans Nanjing Univ Aeronaut Astronaut*, 2004, 21: 31–34
- 22 Wang G Y, Zhang Q H. On the uncertainty of fuzzy sets under different knowledge granularities (in Chinese). *J Comput Sci Tech*, 2008, 31: 1588–1596
- 23 Liang J Y, Chin K S, Dang C Y. A new method for measuring uncertainty and fuzziness in rough set theory. *Int J Gen Syst*, 2002, 31: 331–342
- 24 Liang J Y, Shi Z Z. The information entropy, rough entropy and knowledge granulation in rough set theory. *Int J Uncertainty Fuzz Knowl Based Syst*, 2004, 12: 37–46
- 25 Liang J Y, Li D Y. The Uncertainty and Knowledge Acquisition of Information Systems (in Chinese). Beijing: Science Press, 2005
- 26 Zhao X F, Wei L L. The uncertainty measures of fuzzy rough sets (in Chinese). *Trans Ninxia Univ*, 2007, 28: 206–209
- 27 Qi X D, Liu Q S, Mi J S. The uncertainty measures of general fuzzy rough sets. *Fuzzy Syst Math*, 2007, 21: 136–139
- 28 Miao D Q. Information entropy and granular computing. In: Miao D Q, ed. *Granular Computing: Past, Present and Future* (in Chinese). Beijing: Science Press, 2007. 142–178
- 29 Delgado M, Moral S. Upper and lower fuzzy measures. *Fuzzy Sets Syst*, 1989, 33: 191–200
- 30 Banerjee M, Pal S K. Roughness of a fuzzy set. *Inf Sci*, 1996, 93: 235–246
- 31 Hu B Q. The Foundation of Fuzzy Theory (in Chinese). 2nd ed. Wuhan: Transaction of Wuhan University, 2005
- 32 Yang L B, Gao Y Y. The Principle and Application of Fuzzy Mathematics (in Chinese). Guangzhou: South China University of Technology Publishing Company, 2004
- 33 Zhang L, Zhang B. The fuzzy quotient space theory (in Chinese). *J Softw*, 2003, 14: 770–776
- 34 Zhang L, Zhang B. The Theory and Applications of Problem Solving-The Theory and Applications of Quotient Space Based Granular Computing (in Chinese). 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Publishing Company, 2007

The structural analysis of fuzzy measures

ZHANG Ling¹, ZHANG Bo^{2*} & ZHANG YanPing¹

1 Computer Science College, Anhui University, Hefei 230039, China;

2 State Key Lab of Intelligent Technology & Systems; Tsinghua National Lab for Information Science & Technology; Information Science & Technology College, Computer Science & Technology Department, Tsinghua University, Beijing 100084, China

*E-mail: dcszb@tsinghua.edu.cn

Abstract From the quotient space based granular computing theory we explore the fuzzy measures of fuzzy sets. Based on the structural analysis of fuzzy sets, we present an “isotropism” assumption. Under the assumption we have the following results, (1) the uniqueness of the fuzzy measure having isotropic on a finite complete semi-order set; (2) the necessary and sufficient condition of the isomorphism of fuzzy measure functions in fuzzy mathematics; (3) the necessary and sufficient condition that fuzzy measures have fuzzy and granular monotony; (4) under a certain assumption, the analytic expression of fuzzy measures. The results clarify the relation between the fuzzy measure and granular computing, open out the essence of fuzzy measures, and provide a simple way of constructing fuzzy measures.

Keywords quotient space, fuzzy set, fuzzy measure, rough set, structural analysis