四族 (超) 椭圆曲线的 K_2 群刘杭¹, 唐国平², 杨正国^{3*}

1. 陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安 710062;

2. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049;

3. 兰州财经大学信息工程学院, 兰州 730020

E-mail: liuhang@snnu.edu.cn, tanggp@ucas.ac.cn, yzenguo@126.com

收稿日期: 2016-08-22; 接受日期: 2017-03-22; 网络出版日期: 2017-05-03; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371343 和 11626153) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: GK201603011) 资助项目

摘要 本文构造四族任意亏格 g 的 (超) 椭圆曲线 K_2 群中的元素; 设这些曲线定义在数域上, 证明在某些条件下这些元素是整元素; 当曲线参数满足某些条件时, 证明其中一些元素线性无关. 对 $g = 1$ 时的特殊情形, 本文证明这些元素在模去一些普适关系后线性无关. 作为应用, 本文给出分别在两个实二次域上有两个具体的线性无关整元素的一些椭圆曲线族.

关键词 K_2 Beilinson 猜想 (超) 椭圆曲线**MSC (2010) 主题分类** 19F27

1 引言

Bloch^[1] 在他著名的笔记中考虑了定义在 $\mathbb{Q}$ 上的具有复乘的椭圆曲线 E 的 K_2 群. 他构造了 $K_2(E)$ 中的一些元素, 并证明了与 $K_2(E)$ 相关的一个正则子和它的 L 函数在 2 处值的一个关系. 对于数域上的正则射影簇, Beilinson 后来在文献 [2, 猜想 3.4(a)] 中提出了一个更加一般的猜想, 此猜想将它们的一些高阶 K 群的正则子与它们的 L 函数在整数处的值联系起来 (也可参见文献 [3]).

我们对曲线 K_2 群的 Beilinson 猜想给一个简要的综述, 更多具体的细节可以参见文献 [4, 5].

设 C 是定义在域 k 上的一条正则射影不可约曲线, F 是它的函数域. 给定曲线 C 的闭点的集合 $C^{(1)}$ 中的一个点 x , x 处的调顺 (tame) 符号是指定义在 $K_2(F)$ 的生产元上的映射

$$T_x : \{a, b\} \mapsto (-1)^{\text{ord}_x(a) \text{ord}_x(b)} \frac{a^{\text{ord}_x(b)}}{b^{\text{ord}_x(a)}}(x). \quad (1.1)$$

曲线 C 的调顺 K_2 群由下式所定义:

$$K_2^T(C) = \ker \left(K_2(F) \xrightarrow{T} \bigoplus_{x \in C^{(1)}} k(x)^* \right),$$

这里 $T = \bigoplus_{x \in C^{(1)}} T_x$.

英文引用格式: Liu H, Tang G P, Yang Z G. K_2 of four families of (hyper-) elliptic curves (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1011–1022, doi: 10.1360/SCM-2016-0480

设 k 是一个数域, $\mathcal{O}_k$ 是它的代数整数环. 假设 C 的亏格是 g , 并且 C 在 k 上是几何不可约的. 为了正确地叙述 Beilinson 猜想, 需要考虑由 Bloch 和 Grayson [6] 指出的 $K_2^T(C)$ 的一个子群. 设 $\mathcal{C}/\mathcal{O}_k$ 是 C/k 的一个正则 proper 模型. 对 $\mathcal{C}$ 的纤维 $\mathcal{C}_p$ 的任何不可约分支 $\mathcal{D}$, 它都给出 F 的一个离散赋值 $v_{\mathcal{D}}$. 因此可以类似 (1.1) 定义对应于 $\mathcal{D}$ 的调顺符号 $T_{\mathcal{D}}$ 如下:

$$T_{\mathcal{D}} : \{a, b\} \mapsto (-1)^{v_{\mathcal{D}}(a)v_{\mathcal{D}}(b)} \frac{a^{v_{\mathcal{D}}(b)}}{b^{v_{\mathcal{D}}(a)}}(\mathcal{D}),$$

则 C 的整调顺 K_2 群由下式定义:

$$K_2^T(C)_{\text{int}} = \ker \left(K_2^T(C) \xrightarrow{T} \bigoplus_{p \subset \mathcal{O}_k, \mathcal{D} \subset \mathcal{C}_p} \mathbb{F}_p(\mathcal{D})^* \right),$$

其中的和取遍 $\mathcal{O}_k$ 的所有素理想且 $\mathbb{F}_p(\mathcal{D})$ 是在 $\mathcal{D}$ 处的剩余类域. 由文献 [5, 命题 4.1] 知, 群 $K_2^T(C)_{\text{int}}$ 与模型 $\mathcal{C}$ 的选取无关. 这个群里的元素称为整元素.

设 X 是与 $C \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ 对应的复流形, 则 X 是 $[k : \mathbb{Q}]$ 一个亏格为 g 的 Riemann 面的无交并. 在 $K_2^T(C)$ 和 $H_1(X, \mathbb{Z})$ 之间有一个良定义的配对

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H_1(X; \mathbb{Z}) \times K_2^T(C)/\text{torsion} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

复共轭通过作用在 $C \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ 中的 $\mathbb{C}$ 上作用于 X 上. 假设 $H_1(X, \mathbb{Z})^+$ 和 $H_1(X, \mathbb{Z})^-$ 分别是复共轭在 X 上作用的不变和反变的部分, 它们是秩为 $r = g \cdot [k : \mathbb{Q}]$ 的自由 Abel 群. 配对 (1.2) 在 $H_1(X, \mathbb{Z})^+$ 的元素上是平凡的. 因此可以将配对限制到 $H_1(X, \mathbb{Z})^-$ 上, 得到正则子配对

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H_1(X; \mathbb{Z})^- \times K_2^T(C)/\text{torsion} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

如果 $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ 为 $H_1(X; \mathbb{Z})^-$ 的一组基, 且 $M_1, \dots, M_r$ 是 $K_2^T(C)$ 中的元素, 则正则子 $R(M_1, \dots, M_r)$ 定义如下:

$$R(M_1, \dots, M_r) = |\det(\langle \gamma_i, M_j \rangle)|. \quad (1.4)$$

Beilinson 猜想 (由 Bloch 和 Grayson 修正后的) 指出, $K_2^T(C)_{\text{int}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 的 $\mathbb{Q}$ -维数是 r 且对它的一组基 $M_1, \dots, M_r$ 有 $R \neq 0$. 更重要的是, 它将 C 的 L 函数在 2 处的值与 R 联系起来 (参见文献 [4, 猜想 3.11]).

对具有特殊算术性质的曲线, 如椭圆曲线 [1, 7–11]、模曲线 [12] 和 Fermat 曲线 [13, 14] 的 Beilinson 猜想, 人们已经做了大量的研究. 事实上, 对任何定义在 $\mathbb{Q}$ 上的椭圆曲线 E , 由于 Beilinson 在模曲线上的工作以及 Wiles 关于模椭圆曲线的结果, 在 $K_2^T(E)_{\text{int}}$ 中有一个非挠的元素使得此元素的正则子与 $L(E, 2)$ 之间有 Beilinson 猜想预测的关系. 对高亏格的曲线, 也有一些构造 K_2 群上线性无关元素的工作 (参见文献 [4, 5, 15, 16]). 然而, Beilinson 猜想即使对于 $K_2^T(C)_{\text{int}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 的维数依然是个公开问题. 事实上, 对一般的曲线 C 构造 $K_2^T(C)_{\text{int}}$ 中的非平凡元素都是非常困难的.

本文研究四类具有任意亏格的超椭圆曲线的 K_2 群. 我们构造了这些曲线 $K_2^T(C)$ 中的一些元素并且找到了它们之间的普适关系. 在这四类曲线中, 文献 [4, 5] 研究了其中三类, 但是我们将在这三类曲线上构造新的元素. 我们将证明这些元素在某些参数下是整元素. 进一步, 通过对参数满足合适条件时这些元素的正则子建立一个极限公式来证明其中一些元素是线性无关的. 特别地, 这些元素生成 $K_2^T(C)_{\text{int}}$ 的一个秩为 g 的子群, 假设 Beilinson 猜想成立, 这与当基域为 $\mathbb{Q}$ 时 $K_2^T(C)_{\text{int}}/\text{torsion}$ 的秩是相同的. 设 $g = 1$, 当参数满足一定条件时, 我们证明所有这些元素在模去普适关系后线性无关. 作为应用, 我们给出分别在两个实二次域上有两个具体的线性无关整元素的一些椭圆曲线族.

2 四族 (超) 椭圆曲线 K_2^T 中的元素

本节将对四族具有任意亏格 $g \geq 1$ 的 (超) 椭圆曲线构造 K_2^T 中的元素.

设 $h(x)$ 是基域 k 上的一个具有非零常数项的 g 次多项式. 在基域的代数闭包 $\bar{k}$ 上, 我们可以将 $h(x)$ 写为

$$h(x) = \lambda \prod_{i=1}^g (\alpha_i x + 1),$$

这里 $\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_g \neq 0$. 设 C 是由下面方程定义的曲线:

$$y^2 + f(x)y + x^d = 0, \quad (2.1)$$

这里 $f(x)$ 是下列四种情形的一种:

$$\begin{aligned} (a) \quad & d = 2g + 1, \quad f(x) = h(x); \\ (b) \quad & d = 2g + 2, \quad f(x) = h(x); \\ (c) \quad & d = 2g + 2, \quad f(x) = 2x^{g+1} + h(x); \\ (d) \quad & d = 2g + 4, \quad f(x) = 2x^{g+2} + h(x). \end{aligned} \quad (2.2)$$

接下来将用 (a)、(b)、(c) 和 (d) 类曲线分别表示对应于方程 (2.2) 的四种情形. 假设基域的特征不等于 2, 则曲线同构于由 $y^2 = t(x)$ 定义的曲线, 这里

$$t(x) = -4x^d + f(x)^2.$$

假设 $t(x)$ 的次数是 D , 则 $t(x)$ 在 $\bar{k}$ 上可以写为 $\lambda^2 \prod_{j=1}^D (\mu_j x + 1)$. 如果 $\text{char}(k) = 0$, 由于 $t(x)$ 和 $t'(x)$ 的结式是一个关于 λ 的非零多项式, 则对固定的 α_i ($i = 1, \dots, g$), $t(x)$ 仅对有限个 λ 有重根. 因此, 除了有限个 λ 外, 这些曲线为 (超) 椭圆曲线.

注 1 文献 [4] 详细研究了 (a) 和 (c) 类曲线. 文献 [5, 第 5 节] 研究了 (d) 类曲线. 我们在此也考虑这些情形是因为我们将对这些曲线的 K_2 群构造新的元素. 假设 α_i ($i = 1, \dots, g$) 和 λ 为有理数. 很容易构造分别恰好有 1、0、 $g+1$ 和 g 个有理 Weierstrass 点的 (a)、(b)、(c) 和 (d) 类曲线的例子, 同时 (a)、(b)、(c) 和 (d) 类曲线分别至少有 1、0、 $g+1$ 和 g 个有理 Weierstrass 点. 因此, 这四类不同的曲线一般情形下是不同的, 并且 (b) 类曲线是以前并没有研究过的一类新的 (超) 椭圆曲线.

在 $\bar{k}$ 上, 我们可以将 $f(x)$ 写为

$$f(x) = \lambda \prod_{i=1}^{g'} (\beta_i x + 1),$$

这里 g' 是 $f(x)$ 的次数. 考虑 $K_2(\bar{k}(C))$ 中的如下元素:

$$\widehat{M}_i = \epsilon \left\{ -\frac{x^d}{y^2}, \beta_i x + 1 \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, g', \quad (2.3)$$

$$M_j = \left\{ \epsilon \frac{x^d}{y^2}, \mu_j x + 1 \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, D, \quad (2.4)$$

这里对于 (a) 和 (b) 类曲线 ϵ 取 1, 而对于 (c) 和 (d) 类曲线 ϵ 取 2; 对 (b) 类曲线 ϵ 为 -1 , 而对于其他的情形 ϵ 为 1. 我们将证明这些元素的调顺符号平凡, 并且在命题 2 中建立这些元素之间的类似于文献 [5, 命题 5.2] 中的一些关系.

为了正确地陈述命题 2, 还需要一些记号. 当 d 是偶数时, 对 (b)、(c) 和 (d) 类曲线而言, $t(x)$ 可以分解为 $t_1(x)t_2(x)$, 这里 $t_1(x) = -2x^{d/2} + f(x)$, $t_2(x) = 2x^{d/2} + f(x)$. 用 D_1 和 D_2 分别表示 $t_1(x)$ 和 $t_2(x)$ 的次数. 通过重新排列 μ_j ($j = 1, 2, \dots, D$) 的顺序, 假设

$$t_1(x) = \lambda \prod_{k=1}^{D_1} (\mu_k x + 1), \quad t_2(x) = \lambda \prod_{l=D_1+1}^D (\mu_l x + 1).$$

在下面对 (b)、(c) 和 (d) 类曲线将会用到 μ_j 的这个顺序.

命题 2 假设所有的记号如上, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g$ 互不相同. 假设曲线 C 的亏格是 g (等价地, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_D$ 互不相同), 则下式成立:

(1) $\widehat{M}_i$ 和 M_j 都在 $K_2^T(C)$ 中, 并且有

$$\frac{2}{\epsilon} \sum_{i=1}^{g'} \widehat{M}_i = \sum_{j=1}^D M_j. \quad (2.5)$$

(2) 对 (b)、(c) 和 (d) 类曲线, 有

$$\sum_{k=1}^{D_1} M_k = \sum_{l=1}^{D_2} M_{D_1+l}. \quad (2.6)$$

(3) 如果基域为数域, 且 $\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_g$ 是代数整数 ($\lambda \neq 0$), 则对 (a) 和 (b) 类曲线, $2\widehat{M}_i$ ($i = 1, 2, \dots, g$) 属于 $K_2^T(C)_{\text{int}}$; 对 (c) 和 (d) 类曲线, M_j ($j = 1, 2, \dots, g$) 属于 $K_2^T(C)_{\text{int}}$. 更进一步, 如果 λ 是单位元的话, 对 (a) 类曲线, M_j ($j = 1, 2, \dots, D$) 属于 $K_2^T(C)_{\text{int}}$; 对 (b) 类曲线, $2M_j$ ($j = 1, 2, \dots, D$) 属于 $K_2^T(C)_{\text{int}}$; 对 (c) 和 (d) 类曲线, $\widehat{M}_i$ ($i = 1, 2, \dots, g'$) 和 M_j ($j = D_1+1, \dots, D$) 属于 $K_2^T(C)_{\text{int}}$.

注 3 对 (a) 和 (c) 类曲线, 元素 M_j 是由文献 [4] 中的曲线上的挠点构造而来的. 文献 [5] 研究了 (d) 类曲线的元素 M_j . 而以前并没有研究过元素 $\widehat{M}_i$, 它们并不能从曲线的挠点构造出来.

证明 本命题的证明与文献 [5, 命题 5.2] 很类似. 考虑到完整性, 我们仅对 (b) 类曲线给出证明. 为此, 假设 $x = 1/\tilde{x}$ 和 $y = \tilde{y}/\tilde{x}^{g+1}$, 则 C 的方程变为

$$\tilde{y} \left(\tilde{y} + \lambda \tilde{x} \prod_{i=1}^g (\tilde{x} + \alpha_i) \right) + 1 = 0, \quad (2.7)$$

这里有两个无穷远点, 即 $(0, \pm\sqrt{-1})$, 我们分别用 ∞ 和 ∞' 表示.

设 P_{β_i} 和 P'_{β_i} 表示点 $(-\beta_i^{-1}, \pm(\beta_i^{-1})^{g+1}\sqrt{-1})$, P_{μ_j} 表示点 $(-\mu_j^{-1}, (-\mu_j^{-1})^{g+1})$, 并设 O 和 O' 分别表示点 $(0, 0)$ 和 $(0, -\lambda)$, 则有

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(x) &= (O) + (O') - (\infty) - (\infty'), \\ \operatorname{div}(y) &= (2g+2)(O) - (g+1)(\infty) - (g+1)(\infty'), \\ \operatorname{div}(\beta_i x + 1) &= (P_{\beta_i}) + (P'_{\beta_i}) - (\infty) - (\infty'), \\ \operatorname{div}(\mu_j x + 1) &= 2(P_{\mu_j}) - (\infty) - (\infty'), \\ \operatorname{div}\left(-\frac{x^{2g+2}}{y^2}\right) &= (2g+2)(O') - (2g+2)(O). \end{aligned}$$

因为 $-\frac{x^{2g+2}}{y^2}$ 和 $\beta_i x + 1$ 只在 P_{β_i} 、 P'_{β_i} 、 O 、 O' 、 ∞ 和 ∞' 处有零点和极点, $\widehat{M}_j$ 的调顺符号除了在这些点外是平凡的. 对这些点, 我们有

$$\begin{aligned} T_{P_{\beta_i}}(\widehat{M}_i) &= (-1)^0 \left(-\frac{x^{2g+2}}{y^2} \right) \Big|_{P_{\beta_i}} = 1, \\ T_{P'_{\beta_i}}(\widehat{M}_i) &= (-1)^0 \left(-\frac{x^{2g+2}}{y^2} \right) \Big|_{P'_{\beta_i}} = 1, \\ T_O(\widehat{M}_i) &= (-1)^0 \frac{1}{(\beta_i x + 1)^{-(2g+2)}} \Big|_O = 1, \\ T_{O'}(\widehat{M}_i) &= (-1)^0 \frac{1}{(\beta_i x + 1)^{(2g+2)}} \Big|_{O'} = 1, \\ T_{\infty}(\widehat{M}_i) &= (-1)^0 \left(-\frac{y^2}{x^{2g+2}} \right) \Big|_{\infty} = -\tilde{y}^2 = 1, \\ T_{\infty'}(\widehat{M}_i) &= (-1)^0 \left(-\frac{y^2}{x^{g+2}} \right) \Big|_{\infty'} = -\tilde{y}^2 = 1. \end{aligned}$$

类似地可以证明 M_i 的调顺符号也是平凡的.

现在证明关系 (2.5). 注意到

$$\frac{2}{\epsilon} \sum_{i=1}^g \widehat{M}_i = 2 \sum_{i=1}^g \left\{ -\frac{x^d}{y^2}, \beta_i x + 1 \right\} = 2 \left\{ \frac{x^d}{y^2}, \prod_{i=1}^g (\beta_i x + 1) \right\} + 2 \left\{ -1, \prod_{i=1}^g (\beta_i x + 1) \right\} = \left\{ \frac{x^d}{y^2}, \frac{f(x)^2}{\lambda^2} \right\}$$

和

$$\sum_{j=1}^D M_j = \sum_{j=1}^D \left\{ \frac{x^d}{y^2}, \mu_j x + 1 \right\} = \left\{ \frac{x^d}{y^2}, \prod_{j=1}^D (\mu_j x + 1) \right\} = \left\{ \frac{x^d}{y^2}, \frac{-4x^d + f(x)^2}{\lambda^2} \right\},$$

这里用到 $-4x^d + f(x)^2 = \prod_{j=1}^D (\mu_j x + 1)$. 因此有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^D M_j - 2 \sum_{i=1}^g \widehat{M}_i &= \left\{ \frac{x^d}{y^2}, \frac{-4x^d + f(x)^2}{\lambda^2} \right\} - \left\{ \frac{x^d}{y^2}, f(x)^2 \right\} \\ &= \left\{ \frac{x^d}{y^2}, \frac{-4x^d + f(x)^2}{f(x)^2} \right\} = \left\{ \frac{-y(y + f(x))}{y^2}, \frac{-4x^d + f(x)^2}{f(x)^2} \right\} \\ &= \left\{ -\frac{y + f(x)}{y}, \frac{-4x^d + f(x)^2}{f(x)^2} \right\} = \left\{ -\frac{y + f(x)}{y}, \frac{4y(y + f(x)) + f(x)^2}{f(x)^2} \right\} \\ &= \left\{ -\frac{y + f(x)}{y}, \left(\frac{2y + f(x)}{f(x)} \right)^2 \right\} \\ &= \left\{ a - 1, \left(\frac{2 - a}{a} \right)^2 \right\} \quad \left(\text{令 } a = -\frac{f(x)}{y} \right) \\ &= 2\{a - 1, 1 - (a - 1)\} - 2\{a - 1, a\} \\ &= 2\{1 - a, a\} + 2\{-1, a\} = 0. \end{aligned}$$

文献 [4, 命题 6.14] 和 [5, 命题 5.2] 分别证明了 (c) 和 (d) 类曲线的关系式 (2.6). 对 (b) 类曲线的证明是类似的.

在无穷远点处使用 (2.7) 定义的模型, 有关整性的部分可以用类似于文献 [4, 定理 8.3] 的方法进行证明. $\square$

在命题 2 中, 我们构造了 $K_2^T(C)$ 中的 $g' + D$ 个元素. 对于 (a) 类曲线, 在这些元素之间有关系式 (2.5). 对于 (b)、(c) 和 (d) 类曲线, 这些元素满足两个关系式 (2.5) 和 (2.6). 因此模去这些普适关系, 我们对 (a) 类曲线构造了至多 $g' + D - 1$ 个线性无关的元素, 对 (b)、(c) 和 (d) 类曲线构造了至多 $g' + D - 2$ 个线性无关的元素.

在第 3 节中, 对 $g = 1$, 即曲线是椭圆曲线的情形, 我们将证明在一定的条件下对 (a) 类曲线以及 (b)、(c) 和 (d) 类曲线线性无关的元素个数恰好是 $g' + D - 1$ 和 $g' + D - 2$ 个.

3 元素的线性无关性

本节中, 当基域为复数域 $\mathbb{C}$ 且 $|\lambda| \gg 0$ 时, 我们给出 $H_1(C(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ 的一组基的其中一部分的描述. 对第 2 节中构造的 C 的 K_2 群中的某些元素, 我们通过计算它们与 $H_1(C(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ 中这些元素的正则子配对 (1.3) 的极限证明这些元素一般情形下线性无关. 如果曲线的所有参数都是实数, 那么这些元素在 $H_1(C(\mathbb{C}); \mathbb{Z})^-$ 中, 而且我们可以得到正则子的极限公式. 特别地, 如果基域为有理数域 $\mathbb{Q}$, 除了文献 [4, 5] 中的例子之外, 我们得到在 $K_2^T(C)_{\text{int}}$ 中有与 Beilinson 猜想预测的相同个线性无关元素的更多超椭圆曲线的例子. 此外, 设曲线 C 的亏格为 1, 我们证明, 当参数满足某些条件时, 第 2 节中构造的所有元素都是整元素, 而且在模去命题 2 中的关系后, 这些元素线性无关.

注意到 (a) 和 (b) 类曲线上 $\widehat{M}_i = \{-\frac{x^d}{y^2}, \alpha_i x + 1\}$, $i = 1, 2, \dots, g$, 而 (c) 和 (d) 类曲线上 $M_i = \{\frac{x^d}{y^2}, \alpha_i x + 1\}$, $i = 1, 2, \dots, g$, 记这些元素为 M_{α_i} . 对 (c) 和 (d) 类曲线, M_{α_i} 的线性无关性是文献 [5, 推论 6.7] 的特殊情形. 我们现在研究 (a) 和 (b) 类曲线上 M_{α_i} 的线性无关性. 首先将 (b) 类曲线变换为文献 [5, 引理 6.4] 可以应用的形式.

令 $x \mapsto \omega x$ 和 $\alpha_i \mapsto \omega^{-1} \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, g$), 这里 $\omega^{2g+2} + 1 = 0$, 这样可以用如下方程定义的曲线代替 (b) 类曲线

$$y^2 + h(x)y - x^{2g+2} = 0. \quad (3.1)$$

将 x 用 $\frac{1}{x}$ 替换, y 用 $\frac{\lambda(y-1)x \prod_{i=1}^g (x+\alpha_i) + 2}{2x^{g+1}}$ 替换, (3.1) 定义的曲线的方程变换为

$$\lambda(y-1)(y+1)x \prod_{i=1}^g (x+\alpha_i) + 4y = 0. \quad (3.2)$$

于是得到 (b) 类曲线和方程 (3.2) 定义的曲线的同构.

在此变换下, 元素 M_{α_i} 变为

$$\begin{aligned} M_{\alpha_i} &= \left\{ \frac{4}{(\lambda(y-1)x \prod_{i=1}^g (x+\alpha_i) + 2)^2}, \alpha_i \frac{1}{x} + 1 \right\} \\ &= \left\{ \frac{4}{(-\frac{4y}{y+1} + 2)^2}, \frac{x+\alpha_i}{x} \right\} \\ &= \left\{ \left(\frac{y+1}{y-1} \right)^2, \frac{x+\alpha_i}{x} \right\}. \end{aligned}$$

对固定的 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g$, 由 (3.2) 给出的曲线的射影闭包的正规化构成一族以 $t = 1/\lambda$ 为参数的曲线族 C_t . C_t 的仿射部分由如下方程定义:

$$(y-1)(y+1)x \prod_{i=1}^g (x+\alpha_i) + 4yt = 0. \quad (3.3)$$

设 D 是以 $t=0$ 为圆心的小圆盘, D^* 是去心圆盘 $D \setminus \{t=0\}$. 若设 X 是由点 $\{C_t(\mathbb{C})\}_{t \in D}$ 构成的复流形, 则在任意点 $t \in D^*$ 处的纤维 $X_t = C_t(\mathbb{C})$ 是亏格为 g 的 Riemann 面, 在 $t=0$ 处的纤维是一组直线.

在本节的以下部分中, 我们作下面的假设:

假设 4 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g$ 各不相同且不为 0.

设 π 为 X 的仿射部分到 $\mathbb{C}$ 的由 $(x, y, t) \mapsto x$ 给出的映射. 在任意点 $x = -\alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, g$) 处, 取环绕它的简单环路 $\gamma'_i = \{z \in \mathbb{C} : |z + \alpha_i| = r\}$. 如果 r 足够小, 则 π 是 γ'_i 的非分歧覆盖. 对足够小的 t , γ'_i 可以提升为 X 中环绕 $(-\alpha_i, 1, 0)$ 的 X_t 上的一族环路 $\gamma_i = \gamma_{i,t}$ (对此构造的细节, 读者可以参见文献 [5, 第 6 节]). 如果 t 在上下文中可以明确, 则我们将 $\gamma_{i,t}$ 也记为 γ_i . 这样就得到 X_t 中的 g 个环路 $\gamma_i, i = 1, 2, \dots, g$. 因为 (3.1) 定义的曲线同构于 (3.2) 定义的曲线, 且 (b) 类曲线通过 α_i ($i = 1, 2, \dots, g$) 的一个变换同构于 (3.1) 定义的曲线, 所以, 当 $\lambda \gg 0$ 时, 可以得到 (b) 类曲线和 (3.1) 定义的曲线上的 g 个环路, 我们将这些环路也记为 γ_i ($i = 1, 2, \dots, g$).

将 (a) 类曲线看作 $\mathbb{C}$ 上的 Riemann 面, 现在通过 (b) 类曲线上的环路构造其上的 g 个环路. 设 C' 是如下方程定义的曲线:

$$y^2 + \lambda \prod_{i=1}^g (\alpha_i x^2 + 1) y + x^{4g+2} = 0.$$

注意到, 如果将 $h(x)$ 写成如下形式:

$$h(x) = \lambda \prod_{i=1}^g (\alpha_i x^2 + 1) = \lambda \prod_{i=1}^g (\sqrt{-\alpha_i} x + 1) \prod_{i=1}^g (-\sqrt{-\alpha_i} x + 1),$$

则 C' 是 (b) 类曲线. 设 $|\lambda| \gg 0$, γ'_i 是 $C'(\mathbb{C})$ 上环绕 $x = 1/\sqrt{-\alpha_i}$ 的环路, 则有 C' 到 C 的映射 $f: C' \rightarrow C, (x, y) \mapsto (x^2, y)$. 这 g 个环路 γ'_i ($i = 1, 2, \dots, g$) 在 f 下的像给出 $C(\mathbb{C})$ 上的 g 个环路. 我们将 g 个环路也记为 γ_i ($i = 1, 2, \dots, g$).

为了使用 (超) 椭圆曲线拓扑的结果, 我们需要确定 (a)、(b) 类和 (3.1) 定义的曲线的 Weierstrass 点的分布. 我们将 (a)、(b) 类和 (3.1) 定义的曲线的方程变换为 $y^2 = t(x)$ 的形式, 其中 (a) 类曲线为 $t(x) = -4x^{2g+1} + h(x)^2$, (b) 类曲线为 $t(x) = -4x^{2g+2} + h(x)^2$, 对 (3.1) 定义的曲线为 $t(x) = 4x^{2g+2} + h(x)^2$.

引理 5 设 $t(x)$ 如上, α_i ($i = 1, 2, \dots, g$) 固定, 则

(1) 当 $|\lambda| \gg 0$ 时, 对任意的 $x = -1/\alpha_i$, $t(x)$ 都有两个任意趋近于它的不同根, 而 $t(x)$ 的其他根趋于无穷.

(2) 若 $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, g$) 且 $|\lambda| \gg 0$, 连接这两个根, 我们得到线段 L . 如果这两个根为实根, 则 L 在实轴上, 并且对 L 上的点 x , 有 $t(x) \leq 0$. 如果这两个根是共轭复根, 则 L 与实轴相交于一点 $x \in \mathbb{R}$ 且 $t(x) > 0$.

证明 固定环绕 $-1/\alpha_i$ 且 $-1/\alpha_j$ ($j \neq i$) 都不在其中的简单闭环路 γ . 当 $|\lambda| \gg 0$ 时, 对环路上的 z , 有 $t(z) \sim h(z)$ 和 $t'(z) \sim h'(z)$, 因此,

$$\frac{t'(z)}{t(z)} \sim 2 \frac{h'(z)}{h(z)} = 2 \sum_{k=1}^g \frac{\alpha_k}{\alpha_k z + 1}.$$

根据辐角原理, 该环路环绕的根的个数为

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{t'(z)}{t(z)} \sim \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} 2 \frac{\alpha_i}{\alpha_i z + 1} = 2.$$

因为根数为整数, 所以这只能为 2. 缩小这个环路就证明了当 $|\lambda| \gg 0$ 时, 这两个根任意趋近于 $-1/\alpha_i$. 对 $t(x)$ 的其他根, 我们可以考虑 $x^{\deg t(x)} t(\frac{1}{x})$ 并使用同样的技巧.

现在对 $t(x) = -4x^{2g+1} + h(x)^2$ 证明第 (2) 部分, 其他情形的证明类似. 如果 $-4(-\frac{1}{\alpha_i})^{2g+1} > 0$, 则对靠近 $-1/\alpha_i$ 的 $x \in \mathbb{R}$, 有 $t(x) > 0$, 因此, 靠近 $-1/\alpha_i$ 的两个根是复根. 线段 L 与实轴相交于靠近 $-1/\alpha_i$ 的点 x , 因此 $t(x) \geq -4x^{2g+1} > 0$.

另一方面, 如果 $-4(-\frac{1}{\alpha_i})^{2g+1} < 0$, 当 $|\lambda| \gg 0$ 时, 对靠近 $-1/\alpha_i$ 的固定的 x , 有 $t(x) > 0$, 因此靠近 $-1/\alpha_i$ 的两个根为实根且一个大于 $-1/\alpha_i$ 一个小于 $-1/\alpha_i$. 因为 $t(-\frac{1}{\alpha_i}) = -4(-\frac{1}{\alpha_i})^{2g+1} < 0$, 所以, 对任意的 $x \in L$, 有 $t(x) \leq 0$. $\square$

下面证明当 $|\lambda| \gg 0$ 时, (a) 和 (b) 类曲线上的 g 个环路给出 $H_1(C(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ 的一组基的一部分.

引理 6 设记号和假设如上, 当 $|\lambda| \gg 0$ 时,

- (1) 在 (a) 和 (b) 类曲线 C 上, g 个环路 γ_i ($i = 1, 2, \dots, g$) 可以扩充为 $H_1(C(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ 的一组基;
- (2) 在 (a)、(b) 类和 (3.1) 定义的曲线上, 如果 α_i ($i = 1, 2, \dots, g$) 和 λ 都是实数, 则 γ_i ($i = 1, 2, \dots, g$) 给出 $H_1(C(\mathbb{C}); \mathbb{Z})^-$ 的一组基.

证明 由引理 5 知, 每个 γ_i 都是由复平面上环绕两个 Weierstrass 点的环路提升得到. 众所周知, 这些环路可以扩充为 $H_1(C(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ 的一组基 (如文献 [4, 第 9 节]). 这就证明了第 (1) 部分.

现在考虑 α_i ($i = 1, 2, \dots, g$) 和 λ 都是实数的情形. 环路 γ_i 同伦于由连接靠近 $x = -1/\alpha_i$ 的两个 Weierstrass 点的线段 L 提升而得的环路 $\tilde{\gamma}_i$. 由引理 5 的第 (2) 部分, 如果这两个 Weierstrass 点的 x 坐标是实数, 则 L 在实轴上且 $x \in L$ 时 $t(x) \leq 0$; 如果这两个 Weierstrass 点的 x 坐标是一对共轭复数, 则 L 与实轴相交于点 x 且 $t(x) > 0$. 在任何一种情形下, $\tilde{\gamma}_i$ 在复共轭下都变为它的逆 (参见文献 [4, 第 9 节]). 因此, γ_i 在 $H_1(C(\mathbb{C}); \mathbb{Z})^-$ 中, 而 $H_1(C(\mathbb{C}); \mathbb{Z})^-$ 的秩为 g , 于是第 (1) 部分推出第 (2) 部分. $\square$

注 7 对 (3.3) 给出的曲线族, 引理 6 可以用类似于文献 [5, 引理 6.2] 中的技巧来证明. 但是, 这里的证明更具体和直观.

定理 8 设曲线 C 由方程 (2.1) 定义, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g$ 各不相同且不为 0, 则

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{\det(\langle \gamma_i, M_{\alpha_j} \rangle)}{\log^g |\lambda|} = \pm 2^g.$$

证明 对 (c) 和 (d) 类曲线, 本定理是文献 [5, 定理 6.6] 的特殊情形.

要对 (b) 类曲线证明本定理, 只需要对由 (3.1) 定义的曲线证明本定理, 该曲线同构于 X_t , 其中 $t = 1/\lambda$. 由 $C(\mathbb{C})$ 和 X_t 上的 γ_i 的构造, 我们只需要在 X_t 上计算 $\langle \gamma_i, M_{\alpha_j} \rangle$. 在 $(-a_i, 1, 0)$ 的一个邻域中, 曲线族 X_t 同构于 $xyu(x, y) - t = 0$, 其中在作变换 $x \rightarrow x - \alpha_i, y \rightarrow y + 1$ 后 $u(x, y) \neq 0$ 为 $(0, 0)$ 点附近的全纯函数. 因此, 由文献 [5, 引理 6.4] 知,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle \gamma_i, M_{\alpha_j} \rangle}{\log |t|} = \begin{cases} \pm 2, & \text{若 } i = j, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

这就对 (b) 类曲线证明了本定理.

对 (a) 类曲线, 有 $\langle \gamma_i, M_{\alpha_j} \rangle = \langle f(\gamma'_i), M_{\alpha_j} \rangle = \langle \gamma'_i, f^*(M_{\alpha_j}) \rangle$, 这里映射 f 和 C' 上的环路 γ'_i 在引理 5 前定义且

$$f^*(M_{\alpha_i}) = \left\{ \left(\frac{y+1}{y-1} \right)^2, \frac{x^2 + \alpha_i}{x^2} \right\} = \left\{ \left(\frac{y+1}{y-1} \right)^2, \frac{(x + \sqrt{-\alpha_i})(x - \sqrt{-\alpha_i})}{x^2} \right\}.$$

由文献 [5, 引理 6.4] 知,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle \gamma_i, M_{\alpha_j} \rangle}{\log |t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle f(\gamma'_j), M_{\alpha_i} \rangle}{\log |t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle \gamma'_j, f^*(M_{\alpha_i}) \rangle}{\log |t|} = \begin{cases} \pm 2, & \text{若 } i = j, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

这就对 (b) 类曲线证明了本定理. $\square$

推论 9 设 C 为 (2.1) 定义的曲线. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g$ 固定、各不相同且非零, 则 M_{α_i} ($i = 1, 2, \dots, g$) 在 $K_2^T(C)$ 中线性无关. 特别地, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g, \lambda$ 是代数整数, 则有 $K_2^T(C)_{\text{int}}$ 中的 g 个线性无关的元素.

证明 对 (a) 和 (b) 类曲线, 这是定理 8 的直接推论. 对 (c) 和 (d) 类曲线, 这是文献 [5, 推论 6.7] 的特殊情形. $\square$

推论 10 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g \in \mathbb{Q}$ 固定且 $\lambda \in \mathbb{Q}$. 对 (2.1) 和 (3.1) 定义的曲线, M_{α_i} ($i = 1, 2, \dots, g$) 的正则子 $R = R(\lambda)$ 的极限满足

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{R(\lambda)}{\log^g |\lambda|} = 2^g.$$

证明 对 (c) 和 (d) 类曲线, 本定理是文献 [5, 定理 6.6] 的特殊情形. 对 (a)、(b) 类和 (3.1) 定义的曲线, 本定理容易用定理 8 和引理 6 的第 (2) 部分推出. $\square$

下面对 $g = 1$ 的特殊情形用 a 来记 α_1 , 我们要证明 $|a| \gg 0$ 时第 2 节中构造的元素在模去命题 2 的 (1) 和 (2) 中的关系后线性无关, 且当 $\lambda = \pm 1$ 时, 这些元素是整元素. 首先, 我们需要一个引理.

引理 11 设 $t_1(x)$ 和 $t_2(x)$ 是下面情形中的多项式:

$$(1) \ t_1(x) = -2x^2 + a(x+1), \ t_2(x) = 2x^2 + a(x+1);$$

$$(2) \ t_1(x) = 2x^2 \pm a(x+1), \ t_2(x) = 4x^2 \pm a(x+1);$$

$$(3) \ t_1(x) = 2x^3 \pm a(x+1), \ t_2(x) = 4x^3 \pm a(x+1),$$

这里 $a \in \mathbb{Z}$. 设 k_1 和 k_2 分别是 $t_1(x)$ 和 $t_2(x)$ 的分裂域. 若 $|a| \gg 0$, 则 $t_1(x)$ 和 $t_2(x)$ 不可约且 $k_1 \cap k_2 = \mathbb{Q}$.

证明 当 $|a| \gg 0$ 时, t_1 和 t_2 显然不可约. 若 $k_1 \cap k_2 = \mathbb{Q}$, 则 t_1 和 t_2 的判别式之商是有理数的平方. 容易看出这只对有限多个 a 成立. $\square$

命题 12 设 C 是 (2.1) 定义的曲线且 $g = 1$. 如果 $\lambda = \pm 1$ 且 $a \in \mathbb{Z}$, $|a| \gg 0$, 则 (2.3) 和 (2.4) 中的元素 $\widehat{M}_i$ 和 M_j 在模去命题 2 中的关系 (2.5) 和 (2.6) 后线性无关. 此外, 对 (a) 类曲线, $2\widehat{M}_i$ 在 $K_2^T(C)_{\text{int}}$ 中; 对 (b) 类曲线, $2\widehat{M}_i$ 和 $2M_j$ 在 $K_2^T(C)_{\text{int}}$ 中; 对其他情形, 这些元素本身在 $K_2^T(C)_{\text{int}}$ 中.

证明 由命题 2 的第 (3) 部分可以得到元素的整性. 由命题 2 的第 (1) 和 (2) 部分, 我们只需要对 (a)、(b) 和 (c) 类曲线证明元素 $\widehat{M}_1$ 、 M_1 和 M_3 线性无关, 对 (d) 类曲线证明元素 $\widehat{M}_1$ 、 $\widehat{M}_2$ 、 M_1 、 M_2 和 M_3 线性无关.

令 $x \rightarrow x/a$, $y \rightarrow \pm y/a^{\frac{3}{2}}$ 且 $\tilde{a} = a^{\frac{3}{2}}$, (a) 类曲线同构于如下方程定义的曲线 $\tilde{C}$:

$$y^2 + \tilde{a}(x+1)y + x^3 = 0.$$

设 $t(x) = -4x^3 + \tilde{a}^2(x+1)^2 = \tilde{a}^2(\mu_1 x + 1)(\mu_2 x + 1)(\mu_3 x + 1)$. 由引理 5 第 (1) 部分, 我们可以设 $\lim_{|\tilde{a}| \rightarrow \infty} \mu_1 = 1$, $\lim_{|\tilde{a}| \rightarrow \infty} \mu_2 = 0$ 且 $\lim_{|\tilde{a}| \rightarrow \infty} \mu_3 = 1$. 设 σ 是 $t(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的 Galois 群的生成元, 且 $\sigma(\mu_1) = \mu_2$, $\sigma(\mu_2) = \mu_3$. 元素 $\widehat{M}_1$ 、 M_1 和 M_3 变为 $\{-\frac{x^3}{y^2}, x+1\}$ 、 $\{\frac{x^3}{y^2}, \mu_1 x + 1\}$ 和 $\{\frac{x^3}{y^2}, \mu_3 x + 1\}$.

设 γ 是本节开始定义的 $\tilde{C}$ 上环绕 $x = -1$ 的环路. 对 $\int_{\gamma} \eta(M_i)$ 取极限, 可看出, 在 $\lim_{|\tilde{a}| \rightarrow \infty} \frac{\langle \gamma, M_i \rangle}{\log |\tilde{a}|}$ 中可以用 μ_i 的极限将其取代. 考虑如下矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} \langle \gamma, \widehat{M}_1 \rangle & \langle \gamma, \sigma(\widehat{M}_1) \rangle & \langle \gamma, \sigma^2(\widehat{M}_1) \rangle \\ \langle \gamma, M_1 \rangle & \langle \gamma, \sigma(M_1) \rangle & \langle \gamma, \sigma^2(M_1) \rangle \\ \langle \gamma, M_3 \rangle & \langle \gamma, \sigma(M_3) \rangle & \langle \gamma, \sigma^2(M_3) \rangle \end{pmatrix}.$$

由定理 8, 有

$$\lim_{|\tilde{a}| \rightarrow \infty} \frac{|\det(A)|}{(2 \log |\tilde{a}|)^3} = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = 1.$$

这就推出这些元素在 $|a| \gg 0$ 时线性无关.

对 (b) 类曲线, 令 $x \rightarrow x/a$, $y \rightarrow \pm y/a^2$ 且 $\tilde{a} = a^2$, 则其同构于由如下方程定义的曲线 $\tilde{C}$:

$$y^2 + \tilde{a}(x+1)y + x^4 = 0.$$

设 $t_1(x) = -2x^2 + \tilde{a}(x+1) = \tilde{a}(\mu_1 x + 1)(\mu_2 x + 1)$ 和 $t_2(x) = 2x^2 + \tilde{a}(x+1) = \tilde{a}(\mu_3 x + 1)(\mu_4 x + 1)$, 我们可以假设 $\lim_{|\tilde{a}| \rightarrow \infty} \mu_1 = 1$, $\lim_{|\tilde{a}| \rightarrow \infty} \mu_2 = 0$, $\lim_{|\tilde{a}| \rightarrow \infty} \mu_3 = 1$ 和 $\lim_{|\tilde{a}| \rightarrow \infty} \mu_4 = 0$. 元素 $\widehat{M}_1$ 、 M_1 和 M_3 分别变为 $\{-\frac{x^3}{y^2}, x+1\}$ 、 $\{\frac{x^3}{y^2}, \mu_1 x + 1\}$ 和 $\{\frac{x^3}{y^2}, \mu_3 x + 1\}$.

设 k_1 和 k_2 分别是 $t_1(x)$ 和 $t_2(x)$ 的分裂域. 由引理 11 知, 当 $|a| \gg 0$ 时, $k_1 \cap k_2 = \mathbb{Q}$. 因此, 在 $\text{Gal}(k_1 k_2 / \mathbb{Q})$ 中可以取 σ 为在 k_1 上平凡作用而在 k_2 上非平凡作用的元素, 而 τ 为在 k_2 上平凡作用而在 k_1 上非平凡作用的元素.

如上, 设 γ 是环绕 $x = -1$ 的 $\tilde{C}$ 上的环路. 考虑如下矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} \langle \gamma, \widehat{M}_1 \rangle & \langle \gamma, \sigma(\widehat{M}_1) \rangle & \langle \gamma, \tau(\widehat{M}_1) \rangle \\ \langle \gamma, M_1 \rangle & \langle \gamma, \sigma(M_1) \rangle & \langle \gamma, \tau(M_1) \rangle \\ \langle \gamma, M_3 \rangle & \langle \gamma, \sigma(M_3) \rangle & \langle \gamma, \tau(M_3) \rangle \end{pmatrix}.$$

由定理 8, 有

$$\lim_{|\tilde{a}| \rightarrow \infty} \frac{|\det(A)|}{(2 \log |\tilde{a}|)^3} = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = 1.$$

这就推出这些元素在 $|a| \gg 0$ 时线性无关.

对 (c) 和 (d) 类曲线, 可以类似地证明本命题. 例如, 对 (d) 类曲线, 设 σ 和 τ 分别是 $t_1(x) = 2x^3 \pm \tilde{a}(x+1)$ 和 $t_2(x) = 4x^3 \pm \tilde{a}(x+1)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的 Galois 群中的 3 阶元素. 类似于上面, 我们可以考虑如下矩阵:

$$\begin{pmatrix} \langle \gamma, \widehat{M}_1 \rangle & \langle \gamma, \sigma(\widehat{M}_1) \rangle & \langle \gamma, \sigma^2(\widehat{M}_1) \rangle & \langle \gamma, \tau(\widehat{M}_1) \rangle & \langle \gamma, \tau^2(\widehat{M}_1) \rangle \\ \langle \gamma, \widehat{M}_2 \rangle & \langle \gamma, \sigma(\widehat{M}_2) \rangle & \langle \gamma, \sigma^2(\widehat{M}_2) \rangle & \langle \gamma, \tau(\widehat{M}_2) \rangle & \langle \gamma, \tau^2(\widehat{M}_2) \rangle \\ \langle \gamma, M_1 \rangle & \langle \gamma, \sigma(M_1) \rangle & \langle \gamma, \sigma^2(M_1) \rangle & \langle \gamma, \tau(M_1) \rangle & \langle \gamma, \tau^2(M_1) \rangle \\ \langle \gamma, M_2 \rangle & \langle \gamma, \sigma(M_2) \rangle & \langle \gamma, \sigma^2(M_2) \rangle & \langle \gamma, \tau(M_2) \rangle & \langle \gamma, \tau^2(M_2) \rangle \\ \langle \gamma, M_3 \rangle & \langle \gamma, \sigma(M_3) \rangle & \langle \gamma, \sigma^2(M_3) \rangle & \langle \gamma, \tau(M_3) \rangle & \langle \gamma, \tau^2(M_3) \rangle \end{pmatrix}.$$

□

利用命题 12, 在一些椭圆曲线族上, 我们可以得到 $K_2^T(C)_{\text{int}}$ 分别在两个实二次域上的两个具体元素. 这推广了文献 [5] 中命题 6.9 的第 1 部分.

推论 13 设 k_1 和 k_2 是两个实二次域, a 是整数且 $|a| > 5$.

(1) 令 C 是由 $y^2 + (2x^2 + ax + 1)y + x^4 = 0$ 定义的椭圆曲线. 设 k_1 为 $\mathbb{Q}(\sqrt{a^2 - 16})$, k_2 为 $\mathbb{Q}(\sqrt{a^2 - 8})$, 则定义在 k_1 上的元素 M_2 和 M_3 在 $K_2^T(C)_{\text{int}}$ 中且当 $|a| \gg 0$ 时线性无关, 定义在 k_2 上的元素 $\widehat{M}_1$ 和 $\widehat{M}_2$ 在 $K_2^T(C)_{\text{int}}$ 中且当 $|a| \gg 0$ 时线性无关.

(2) 令 C 是由 $y^2 + (ax + 1)y + x^4 = 0$ 定义的椭圆曲线. 设 k_1 为 $\mathbb{Q}(\sqrt{a^2 + 8})$, k_2 为 $\mathbb{Q}(\sqrt{a^2 - 8})$. 则定义在 k_1 上的元素 $2M_1$ 和 $2M_2$ 在 $K_2^T(C)_{\text{int}}$ 中且当 $|a| \gg 0$ 时线性无关, 定义在 k_2 上的元素 $2M_3$ 和 $2M_4$ 在 $K_2^T(C)_{\text{int}}$ 中且当 $|a| \gg 0$ 时线性无关.

(3) 对第 (1) 部分中的曲线, 每个实二次域都出现无限多次, 且对固定的 k_1 有无限多个 k_2 .

证明 将命题 12 分别应用到 (c) 和 (b) 类曲线上可以分别得到第 (1) 和 (2) 部分.

对第 (3) 部分, 因为 Pell 方程有无穷多个解, 所以, k_1 出现无限次. 设 D_1 和 D_2 分别是 k_1 和 k_2 的判别式. 对固定的 D_1 和 D_2 , 如下方程组定义出 $\mathbb{A}_3$ 中的一条椭圆曲线:

$$a^2 - 16 = D_1 b^2,$$

$$a^2 - 8 = D_2 c^2.$$

由 Siegel 定理 (参见文献 [17] 第 IX 章推论 3.2.2) 知, 该方程组只有有限多个整数解 (a, b, c) . 因此, 对固定的 k_1 和 k_2 , 只有有限多个 a . 然而 k_1 出现无限多次, 因此, 对固定的 k_1 有无限多个 k_2 . $\square$

致谢 感谢 Rob de Jeu 教授对本文的意见和建议.

参考文献

- 1 Bloch S. Higher Regulators, Algebraic K -Theory, and Zeta Functions of Elliptic Curves. Providence: Amer Math Soc, 2000
- 2 Beilinson A. Higher regulators and values of L -functions. J Math Sci, 1985, 30: 2036–2070
- 3 Schneider P. Introduction to the Beilinson conjectures. In: Perspectives in Mathematics, vol. 4. Boston: Academic Press, 1988, 1–35
- 4 Dokchitser T, de Jeu R, Zagier D. Numerical verification of Beilinson's conjecture for K_2 of hyperelliptic curves. Compos Math, 2006, 142: 339–373
- 5 Liu H, de Jeu R. On K_2 of certain families of curves. Int Math Res Not IMRN, 2015, 2015: 10929–10958
- 6 Bloch S, Grayson D. K_2 and L -functions of elliptic curves: Computer calculations. In: Contemporary Mathematics, vol. 55. Providence: Amer Math Soc, 1986, 79–88
- 7 Deninger C. Higher regulators and Hecke L -series of imaginary quadratic fields, I. Invent Math, 1989, 96: 1–69
- 8 Deninger C. Higher regulators and Hecke L -series of imaginary quadratic fields, II. Ann of Math (2), 1990, 132: 131–158
- 9 Ji Q Z, Qin H R. Rank of K_2 of elliptic curves. Sci China Ser A, 2009, 52: 2107–2120
- 10 Rolshausen K, Schappacher N. On the second K -group of an elliptic curve. J Reine Angew Math, 1998, 495: 61–77
- 11 Ross R. K_2 of elliptic curves with sufficient torsion over $\mathbb{Q}$. Compos Math, 1992, 81: 211–221
- 12 Beilinson A. Higher regulators of modular curves. In: Contemporary Mathematics, vol. 55. Providence: Amer Math Soc, 1986, 1–34
- 13 Otsubo N. On the regulator of Fermat motives and generalized hypergeometric functions. J Reine Angew Math, 2011, 660: 27–82
- 14 Ross R. K_2 of Fermat curves with divisorial support at infinity. Compos Math, 1994, 91: 223–240
- 15 Kimura K. K_2 of a Fermat quotient and the value of its L -function. K -Theory, 1996, 10: 73–82
- 16 Kühn U, Müller S. A geometric approach to constructing elements of K_2 of curves. ArXiv:1504.01755, 2015
- 17 Silvermann J. The Arithmetic of Elliptic Curves, 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics, vol. 106. Berlin: Springer-Verlag, 2009

K_2 of four families of (hyper-) elliptic curves

LIU Hang, TANG GuoPing & YANG ZhengGuo

Abstract We construct elements in the K_2 group on four families of (hyper-) elliptic curves of arbitrary genus g . If the curves are defined over number fields, we show that these elements are integral under certain condition. We prove that some of these elements are linearly independent for suitable parameters. For the special case of $g = 1$, we show that all the elements are linearly independent modulo some universal relations for certain parameters. As an application, we give families of elliptic curves with two explicit independent integral elements over two real quadratic fields respectively.

Keywords K_2 , Beilinson's conjecture, (hyper-) elliptic curve

MSC(2010) 19F27

doi: 10.1360/SCM-2016-0480