$N = 2$ 超对称 KdV 方程的双线性形研究

张孟霞^{①②}, 刘青平^{①*}, 申亚丽^③, 吴可^②

^① 中国矿业大学(北京)理学院, 北京 100083

^② 首都师范大学数学科学学院, 北京 100037

^③ 运城学院数学系, 运城 044000

* E-mail: qpl@cumtb.edu.cn

收稿日期: 2007-10-22; 接受日期: 2008-09-18

国家自然科学基金(批准号: 10671206, 10231050)、国家重点基础研究发展规划(编号: 2004CB318000)和北京市教委重点基金(编号: KZKZ200810028013)资助项目

摘要 利用双线性方法研究 $N = 2$ 超对称 KdV 方程. 通过适当的相关变换, 将 $N = 2, a = 4$ 和 $N = 2, a = 1$ 超对称 KdV 方程转化成双线性形式, 由此构造了相应方程的解. 对于 $N = 2, a = 1$ 超对称 KdV 方程, 还得到了它的双线性 Bäcklund 变换和 Lax 表示.

关键词 $N = 2$ 超对称 KdV 方程 Hirota 双线性形 孤立子解 Bäcklund 变换 Lax 表示

MSC(2000) 主题分类 35Q58, 37K35, 35Q51

1 引言

近 20 多年来, 超对称可积系统理论得到人们极大的关注和深入的研究. 因此许多孤立子方程相继被超对称化, 而且进一步建立了相应超对称方程丰富的性质, 其中最著名的方程是超对称 Korteweg-de Vries (KdV) 方程^[1,2], 人们已经证明了这个系统是双 Hamilton 系统^[3], 具有 Darboux 变换和 Bäcklund 变换^[4,5], 能够转化成 Hirota 的双线性形式^[7-9], 等等.

KdV 方程有多个超对称推广, 其中最重要的是 Laberge 和 Mathieu^[10,11] 首先提出的 $N = 2$ 超对称 KdV 系统, 即

$$\phi_t = -\phi_{xxx} + 3(\phi \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \phi)_x + \frac{1}{2}(a-1)(\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \phi^2)_x + 3a\phi^2 \phi_x, \quad (1)$$

其中 $\phi = \phi(x, t, \theta_1, \theta_2)$ 是依赖于时间变量 t 、普通空间变量 x 和超空间变量 θ_i ($i = 1, 2$) 的 Bose 函数, $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 是超导数: $\mathcal{D}_1 = \partial_{\theta_1} + \theta_1 \partial_x$, $\mathcal{D}_2 = \partial_{\theta_2} + \theta_2 \partial_x$, a 是普通的参数.

本文将方程 (1) 称为 SKdV _{a} 方程. 带有参数的方程 (1) 只有 a 取特定值时才是可积的. 事实上, Laberge 和 Mathieu 给出了 SKdV₋₂ 方程和 SKdV₄ 方程的 Lax 表示、Hamilton 结构和无穷多守恒量^[10]. Labelle 和 Mathieu 在文献 [11] 中通过分析 SKdV _{a} 方程的守恒律, 发现当 $a = -2, 1, 4$ 时存在非平凡守恒律, 由此得到了第 3 个系统即 SKdV₁ 系统, 并猜测它是可积的. 随后, Popowicz 得到了 SKdV₁ 方程的 Lax 表示^[12], 由此证明了 SKdV₁ 方

引用格式: 张孟霞, 刘青平, 申亚丽, 等. $N = 2$ 超对称 KdV 方程的双线性形研究. 中国科学 A, 2009, 39(3): 306-314
Zhang M X, Liu Q P, Shen Y L, et al. Bilinear approach to $N = 2$ supersymmetric KdV equations. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0014-x

程的可积性. 继而, SKdV_a 方程的其他可积性质也被发现. Kupershmidt^[11] 注意到 SKdV₄ 方程实际上是一个双 Hamilton 系统; Oevel 和 Popowicz^[3] 通过 r 矩阵理论系统地构造了 SKdV₋₂ 方程和 SKdV₄ 方程的双 Hamilton 结构; Bourque 和 Mathieu^[13] 对 $N = 2$ 的超对称 KdV 方程进行了 Painlevé 测试, 发现只有 SKdV_a ($a = -2, 1, 4$) 方程以及所谓的 SKdV_O 方程通过了 Painlevé 测试. 另外, $N = 2$ 超对称方程还具有 $N = 1$ 形式的 Lax 算子^[14, 15].

本文的主要目的是运用 Hirota 的直接方法来研究 SKdV₁ 方程和 SKdV₄ 方程. 众所周知, Hirota 的直接方法是构造孤立子解和导出其他可积性质的一种有效方法. 近年来, 此方法已经成功地应用到诸如超对称 KdV 方程^[6, 9]、超对称 MKdV 方程^[16] 以及超对称经典 Boussinesq 方程^[17](也称 two boson 方程) 等许多方程. 但是, 这些都是 $N = 1$ 超对称可积方程, 而到目前为止, $N = 2$ 的超对称可积系统适当的双线性形式仍未找到. 我们将在本文中构造 SKdV₁ 方程和 SKdV₄ 方程的恰当的双线性形式并进一步探讨其他的可积性质.

2 SKdV₄ 方程

本节研究 SKdV₄ 方程并给出它的 Hirota 双线性形式. 首先, 将此方程写成 $N = 1$ 的形式, 然后经过变量变换将它转化为超对称经典 Boussinesq 方程族 (sCB) 的 t_3 流, 最后于 sCB 方程族的 t_2 流的双线性形式得到 SKdV₄ 方程的双线性形式. 另外, 我们将利用所得到的双线性形式构造 SKdV₄ 系统的特殊形式的解.

2.1 双线性形式

由 (1) 式知, SKdV₄ 方程为

$$\phi_t = \left[-\phi_{xx} + 3\phi\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\phi + \frac{3}{2}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\phi^2 + 4\phi^3 \right]_x, \quad (2)$$

令

$$\phi = v + \theta_2\beta,$$

其中 $v = v(t, x, \theta_1)$ 是 Bose 函数, $\beta = \beta(t, x, \theta_1)$ 是 Fermi 函数, 则上述方程可写为

$$v_t = [-v_{xx} + 6v\mathcal{D}\beta + 3(\mathcal{D}v)\beta + 4v^3]_x, \quad (3a)$$

$$\beta_t = [-\beta_{xx} - 6v\mathcal{D}v_x - 3v_x\mathcal{D}v + 3\beta\mathcal{D}\beta + 12v^2\beta]_x, \quad (3b)$$

为简便起见, 我们用了 $\mathcal{D}=\mathcal{D}_1$, 并在后文中沿用这一约定.

假设

$$v = \frac{1}{2}iu, \quad \beta = -\alpha + \frac{1}{2}\mathcal{D}u,$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, 则系统 (3a)–(3b) 转化为

$$u_t = [-u_{xx} + 3\alpha\mathcal{D}u - 6u\mathcal{D}\alpha - u^3 + 3uu_x]_x, \quad (4a)$$

$$\alpha_t = [-\alpha_{xx} - 3\alpha\mathcal{D}\alpha - 3u^2\alpha - 3u\alpha_x]_x. \quad (4b)$$

文献 [15] 已经证明上述系统和 sCB (也称超对称 two-boson) 系统属于同一个族. 系统 (4a)–(4b) 事实上是 sCB 族的 t_3 流. 下面先回顾 sCB 方程^[18]:

$$u_{t_2} = (-u_x + u^2 + 2\mathcal{D}\alpha)_x, \quad (5a)$$

$$\alpha_{t_2} = (\alpha_x + 2u\alpha)_x. \quad (5b)$$

在文献 [17] 中作者给出了系统 (5a) 和 (5b) 的双线性形式. 事实上, 通过如下形式的相关变量变换

$$u = -\left(\ln \frac{f}{g}\right)_x = -\varphi_x, \quad \alpha = (\mathcal{D} \ln g)_x = \mathcal{D}\rho_x, \quad (6)$$

系统 (5a) 和 (5b) 可以转化成双线性形式

$$(D_{t_2} + D_x^2)f \cdot g = 0, \quad (7a)$$

$$S(D_{t_2} + D_x^2)f \cdot g = 0, \quad (7b)$$

其中 Hirota 超导数 $SD_t^m D_x^n f \cdot g$ 的定义为

$$SD_t^m D_x^n f \cdot g = (\mathcal{D}_{\theta_1} - \mathcal{D}_{\theta_2}) \left(\frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^n f(x_1, t_1, \theta_1) g(x_2, t_2, \theta_2) \Big|_{\substack{x_1=x_2=x \\ t_1=t_2=t \\ \theta_1=\theta_2=\theta}}$$

将相关变量变换 (6) 代入方程 (5a) 和 (5b) 得

$$\varphi_{t_2} = -\varphi_{xx} - \varphi_x^2 - 2\rho_{xx}, \quad (8a)$$

$$\rho_{t_2} = \rho_{xx} - 2\mathcal{D}^{-1}(\varphi_x \mathcal{D}\rho_x). \quad (8b)$$

通过观察, 我们发现方程 (5a)–(5b) (或者 (8a)–(8b)) 是 sCB 族的 t_2 流, 方程 (4a)–(4b) 是相应的 t_3 流, 下面将方程 (4a)–(4b) 转化成双线性形式.

应用相关变量变换 (6), 方程 (4a)–(4b) 可以改写为

$$[\varphi_t + \varphi_{xxx} + 3(\mathcal{D}\varphi_x)(\mathcal{D}\rho_x) + 6\varphi_x \rho_{xx} + \varphi_x^3 + 3\varphi_x \varphi_{xx}]_x = 0,$$

$$(\mathcal{D}\rho_t + \mathcal{D}\rho_{xxx} + 3\varphi_x^2 \mathcal{D}\rho_x - 3\varphi_x \mathcal{D}\rho_{xx} + 3\rho_{xx} \mathcal{D}\rho_x)_x = 0,$$

上式对 x 积分一次, 并取积分常数为零, 得

$$\varphi_t + \varphi_{xxx} + 3(\mathcal{D}\varphi_x)(\mathcal{D}\rho_x) + 6\varphi_x \rho_{xx} + \varphi_x^3 + 3\varphi_x \varphi_{xx} = 0, \quad (9a)$$

$$\mathcal{D}\rho_t + \mathcal{D}\rho_{xxx} + 3\varphi_x^2 \mathcal{D}\rho_x - 3\varphi_x \mathcal{D}\rho_{xx} + 3\rho_{xx} \mathcal{D}\rho_x = 0. \quad (9b)$$

对于式 (9a), 由于

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_t + \frac{1}{4}(\varphi_x^3 + 3\varphi_x \varphi_{xx} + 6\varphi_x \rho_{xx} + \varphi_{xxx}) \\ &\quad + \frac{3}{4}[\varphi_x^3 + 3\varphi_x \varphi_{xx} + 6\varphi_x \rho_{xx} + \varphi_{xxx} + 4(\mathcal{D}\varphi_x)(\mathcal{D}\rho_x)] \\ &= \varphi_t + \frac{1}{4}(\varphi_x^3 + 3\varphi_x \varphi_{xx} + 6\varphi_x \rho_{xx} + \varphi_{xxx}) \\ &\quad - \frac{3}{4} \{ \varphi_x(-\varphi_{xx} - \varphi_x^2 - 2\rho_{xx}) + (-\varphi_{xx} - \varphi_x^2 - 2\rho_{xx})_x + 2[\rho_{xx} - 2\mathcal{D}^{-1}(\varphi_x \mathcal{D}\rho_x)]_x \} \\ &\stackrel{(8a),(8b)}{=} \varphi_t + \frac{1}{4}(\varphi_x^3 + 3\varphi_x \varphi_{xx} + 6\varphi_x \rho_{xx} + \varphi_{xxx}) - \frac{3}{4}(\varphi_x \varphi_{t_2} + \varphi_{xt_2} + 2\rho_{xt_2}) \\ &= \frac{1}{fg} \left(D_t - \frac{3}{4} D_x D_{t_2} + \frac{1}{4} D_x^3 \right) f \cdot g, \end{aligned} \quad (10)$$

而对于式 (9b), 由于

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{1}{2} \left\{ -[\varphi_x^3 + 3\varphi_x\varphi_{xx} + 6\varphi_x\rho_{xx} + \varphi_{xxx} + 3(\mathcal{D}\varphi_x)(\mathcal{D}\rho_x)]\mathcal{D}\varphi \right. \\
 & - \mathcal{D}[\varphi_x^3 + 3\varphi_x\varphi_{xx} + 6\varphi_x\rho_{xx} + \varphi_{xxx} + 3(\mathcal{D}\varphi_x)(\mathcal{D}\rho_x)] + 2\mathcal{D}\rho_t \\
 & + \frac{3}{4}[\varphi_x^3 + 3\varphi_x\varphi_{xx} + 6\varphi_x\rho_{xx} + \varphi_{xxx} + 4(\mathcal{D}\varphi_x)(\mathcal{D}\rho_x)]\mathcal{D}\varphi \\
 & + \frac{3}{4}(\varphi_{xx} + \varphi_x^2 + 2\rho_{xx})\mathcal{D}\varphi_x + \frac{3}{4}\varphi_x\mathcal{D}(\varphi_{xx} + \varphi_x^2 + 2\rho_{xx}) \\
 & - \frac{3}{2}\varphi_x\mathcal{D}[\rho_{xx} - 2\mathcal{D}^{-1}(\varphi_x\mathcal{D}\rho_x)] + \frac{3}{2}(\varphi_{xx} + \varphi_x^2 + 2\rho_{xx})\mathcal{D}\rho_x \\
 & + \frac{3}{4}\mathcal{D}(\varphi_{xx} + \varphi_x^2 + 2\rho_{xx})_x + \frac{1}{4}[(\varphi_x^3 + 3\varphi_x\varphi_{xx} + 6\varphi_x\rho_{xx} + \varphi_{xxx})\mathcal{D}\varphi \\
 & + 3\varphi_x\mathcal{D}\varphi_{xx} + \mathcal{D}\varphi_{xxx} + 2\mathcal{D}\rho_{xxx} + 3(\varphi_{xx} + \varphi_x^2 + 2\rho_{xx})\mathcal{D}\varphi_x \\
 & \left. + 6(\varphi_{xx} + \varphi_x^2 + 2\rho_{xx})\mathcal{D}\rho_x] \right\} \\
 \stackrel{(8a)-(9a)}{=} & \frac{1}{2} \left\{ \varphi_t\mathcal{D}\varphi + \mathcal{D}\varphi_t + 2\mathcal{D}\rho_t - \frac{3}{4}[(\varphi_x\varphi_{t_2} + \varphi_{xt_2} + 2\rho_{xt_2})\mathcal{D}\varphi \right. \\
 & \left. + \varphi_{t_2}\mathcal{D}\varphi_x + \varphi_x\mathcal{D}\varphi_{t_2} + 2\varphi_x\mathcal{D}\rho_{t_2} + 2\varphi_{t_2}\mathcal{D}\rho_x + \mathcal{D}\varphi_{xt_2}] + \frac{1}{4}\frac{SD_x^3f \cdot g}{fg} \right\} \\
 = & \frac{1}{2fg}S\left(D_t - \frac{3}{4}D_xD_{t_2} + \frac{1}{4}D_x^3\right)f \cdot g, \tag{11}
 \end{aligned}$$

因此, 由方程 (10) 和 (11) 可得 SKdV₄ 方程的双线性形式为:

$$\left(D_t - \frac{3}{4}D_xD_{t_2} + \frac{1}{4}D_x^3\right)f \cdot g = 0, \tag{12a}$$

$$S\left(D_t - \frac{3}{4}D_xD_{t_2} + \frac{1}{4}D_x^3\right)f \cdot g = 0. \tag{12b}$$

2.2 一类特殊解

由于 SKdV₄ 系统有双线性形式 (12a)–(12b), 因此我们可以利用 Hirota 的微扰法来构造该系统的解. 下面构造系统 SKdV₄ 的一类解.

设

$$f = \varepsilon f_1, \quad g = 1 + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \varepsilon^3 g_3 + \cdots,$$

其中 ε 是一个参数. 将上式代入方程 (12a) 和 (12b), 并整理 ε 的幂次得

$$\varepsilon^1: \left(D_t - \frac{3}{4}D_xD_{t_2} + \frac{1}{4}D_x^3\right)(f_1 \cdot 1) = 0, \tag{13}$$

$$S\left(D_t - \frac{3}{4}D_xD_{t_2} + \frac{1}{4}D_x^3\right)(f_1 \cdot 1) = 0,$$

对于 $i \geq 1$,

$$\varepsilon^{i+1}: \left(D_t - \frac{3}{4}D_xD_{t_2} + \frac{1}{4}D_x^3\right)(f_1 \cdot g_i) = 0, \tag{14}$$

$$S\left(D_t - \frac{3}{4}D_xD_{t_2} + \frac{1}{4}D_x^3\right)(f_1 \cdot g_i) = 0.$$

由方程 (13) 得

$$f_{1t} - \frac{3}{4}f_{1xt_2} + \frac{1}{4}f_{1xxx} = 0, \quad \mathcal{D}\left(f_{1t} - \frac{3}{4}f_{1xt_2} + \frac{1}{4}f_{1xxx}\right) = 0. \tag{15}$$

由方程 (7a) 和 (7b), 我们可以取^[17]

$$f_{1t_2} = -f_{1xx}, \quad g_{i,t_2} = g_{i,xx} - 2kg_{i,x}. \quad (16)$$

将上式代入方程 (15) 得 $f_{1t} = -f_{1xxx}$. 因此, 可以取 f_1 为

$$f_1 = e^{kx - k^2 t_2 - k^3 t + \theta \xi}, \quad (17)$$

其中 k 为普通常数, ξ 是 Fermi 常数. 将方程 (16) 和 (17) 代入方程 (14), 得

$$\begin{aligned} g_{i,t} + 3k^2 g_{i,x} - 3kg_{i,xx} + g_{i,xxx} &= 0, \\ (\mathcal{D} - \xi - \theta k)(g_{i,t} + 3k^2 g_{i,x} - 3kg_{i,xx} + g_{i,xxx}) &= 0. \end{aligned}$$

由上式可取

$$g_i = e^{k_i x + k_i(k_i - 2k)t_2 + k_i(3kk_i - k_i^2 - 3k^2)t + \theta \xi_i},$$

因此, 可得

$$f = e^{kx - k^2 t_2 - k^3 t + \theta \xi}, \quad g = 1 + \sum_{i=1}^N e^{k_i x + k_i(k_i - 2k)t_2 + k_i(3kk_i - k_i^2 - 3k^2)t + \theta \xi_i}. \quad (18)$$

由此我们得到了 SKdV₄ 系统的一类特殊解, 它们有很特殊的性质 (参见文献 [7, 8]).

3 SKdV₁ 方程

上一节成功地构造了 SKdV₄ 方程的双线性形式和它的一类特殊解. 这一节将利用 Hirota 的双线性方法研究 SKdV₁ 方程的可积性质, 我们将会看到 SKdV₁ 方程也可以转化成双线性形式, 并构造它的双线性 Bäcklund 变换、Lax 表示和孤立子解.

3.1 双线性形式

如同 SKdV₄ 方程, 我们先将 SKdV₁ 方程改写为 $N = 1$ 的形式. 为此, 令

$$\phi = v + \theta_2 \beta,$$

则由式 (1) 可知, SKdV₁ 方程可以写成分量形式为:

$$v_t = [-v_{xx} + 3v\mathcal{D}\beta + v^3]_x, \quad (19a)$$

$$\beta_t = [-\beta_{xx} - 3v\mathcal{D}v_x + 3\beta\mathcal{D}\beta + 3v^2\beta]_x. \quad (19b)$$

引入相关变量变换

$$v = i \left(\ln \frac{f}{g} \right)_x = i\varphi_x, \quad \beta = -(\mathcal{D} \ln fg)_x = -\mathcal{D}\rho_x, \quad (20)$$

将上式代入方程 (19a)-(19b) 得

$$\varphi_t + \varphi_{xxx} + 3\varphi_x \rho_{xx} + \varphi_x^3 = 0, \quad (21a)$$

$$\mathcal{D}\rho_t + \mathcal{D}\rho_{xxx} + 3\varphi_x \mathcal{D}\varphi_{xx} + 3\rho_{xx} \mathcal{D}\rho_x + 3\varphi_x^2 \mathcal{D}\rho_x = 0, \quad (21b)$$

对于方程 (21a), 由于

$$\varphi_t + \varphi_x^3 + \varphi_{xxx} + 3\varphi_x \rho_{xx} = \frac{1}{fg} (D_t + D_x^3) f \cdot g = 0, \quad (22)$$

对于方程 (21b), 由于

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{D}\rho_t + \mathcal{D}\rho_{xxx} + 3\varphi_x \mathcal{D}\varphi_{xx} + 3\rho_{xx} \mathcal{D}\rho_x + 3\varphi_x^2 \mathcal{D}\rho_x \\ &\stackrel{(21a)}{=} \mathcal{D}\rho_t + \mathcal{D}\rho_{xxx} + 3\varphi_x \mathcal{D}\varphi_{xx} + 3\rho_{xx} \mathcal{D}\rho_x + 3\varphi_x^2 \mathcal{D}\rho_x + (\varphi_t + \varphi_{xxx} + 3\varphi_x \rho_{xx} + \varphi_x^3) \mathcal{D}\varphi \\ &= \frac{1}{fg} S(D_t + D_x^3) f \cdot g. \end{aligned} \quad (23)$$

由 (22) 和 (23) 式知, SKdV₁ 方程的双线性形式为

$$(D_t + D_x^3)f \cdot g = 0, \quad (24a)$$

$$S(D_t + D_x^3)f \cdot g = 0. \quad (24b)$$

注 这个双线性形式的结构很简单, 可以看作 sCB 系统双线性形式 (7a)–(7b) 的直接推广, 然而有趣的是, 这两个系统不属于同一个可积方程族.

3.2 Bäcklund 变换

一个可积系统往往拥有 Bäcklund 变换, 而且从 Bäcklund 变换出发可以构造多孤子解. 有时人们也把具有 Bäcklund 变换的系统认为都是可积的. 这一小节将从双线性形式 (24a)–(24b) 以及文献 [16] 中构造的 Bäcklund 变换出发, 构造 SKdV₁ 系统的双线性 Bäcklund 变换. 我们的结果如下:

定理 1 如果 (f, g) 是方程 (24a)–(24b) 的解, 则满足

$$D_x g \cdot f' - D_x f \cdot g' = \mu g f' - \mu f g', \quad (25a)$$

$$S D_x g \cdot f' + S D_x f \cdot g' = \mu S g \cdot f' + \mu S f \cdot g', \quad (25b)$$

$$(D_t + D_x^3 - 3\mu D_x^2 + 3\mu^2 D_x)g \cdot g' = 0, \quad (25c)$$

$$(D_t + D_x^3 - 3\mu D_x^2 + 3\mu^2 D_x)f \cdot f' = 0 \quad (25d)$$

的 (f', g') 也是方程 (24a)–(24b) 的解, 这里的 μ 是任意的普通常数.

证明 构造函数

$$\mathbb{P}_1 \equiv [(D_t + D_x^3)f \cdot g]f'g' - fg[(D_t + D_x^3)f' \cdot g'],$$

$$\mathbb{P}_2 \equiv [S(D_t + D_x^3)f \cdot g]f'g' - fg[S(D_t + D_x^3)f' \cdot g'].$$

下面将证明由方程 (25a)–(25d) 可以得到 $\mathbb{P}_1 \equiv 0$ 和 $\mathbb{P}_2 \equiv 0$, 由此也就证明了 (f', g') 也是方程 (24a)–(24b) 的解. 其中 $\mathbb{P}_1 \equiv 0$ 的证明在文献 [16] 中已有, 因此主要证明 $\mathbb{P}_2 = 0$. 证明过程中用到的双线性恒等式见附录.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_2 &\stackrel{(A.1),(A.2)}{=} S[(D_t g \cdot g') \cdot f f' - g g' \cdot (D_t f \cdot f')] + (S f \cdot g)(D_t f' \cdot g') - (D_t f \cdot g)(S f' \cdot g') \\ &\quad - 3D_x[(S D_x f \cdot g') \cdot (D_x g \cdot f') + (S D_x g \cdot f') \cdot (D_x f \cdot g')] + (S f \cdot g)(D_x^3 f' \cdot g') \\ &\quad - (D_x^3 f \cdot g)(S f' \cdot g') + S[(D_x^3 f \cdot f') \cdot g g' - f f' \cdot (D_x^3 g \cdot g')] \\ &= -3D_x[(S D_x f \cdot g') \cdot (D_x g \cdot f') + (S D_x g \cdot f') \cdot (D_x f \cdot g')] \\ &\quad + S\{[(D_t + D_x^3)g \cdot g'] \cdot f f' + [(D_t + D_x^3)f \cdot f'] \cdot g g'\} \\ &\quad + (S f \cdot g)[(D_t + D_x^3)f' \cdot g'] - (S f' \cdot g)[(D_t + D_x^3)f \cdot g] \\ &\stackrel{(25c),(25d)}{=} -3D_x[(S D_x f \cdot g') \cdot (D_x g \cdot f') + (S D_x g \cdot f') \cdot (D_x f \cdot g')] \\ &\quad + 3\mu S[(D_x^2 g \cdot g') \cdot f f' - g g' \cdot (D_x^2 f \cdot f')] - 3\mu^2 S[(D_x g \cdot g') \cdot f f' - g g' \cdot (D_x f \cdot f')] \\ &\quad + (S f \cdot g)[(D_t + D_x^3)f' \cdot g'] - (S f' \cdot g)[(D_t + D_x^3)f \cdot g] \\ &\stackrel{(A.3),(A.4)}{=} -3D_x[(S D_x f \cdot g') \cdot (D_x g \cdot f') + (S D_x g \cdot f') \cdot (D_x f \cdot g')] \\ &\quad + 3\mu D_x[(S D_x g \cdot f') \cdot f g' + (D_x g \cdot f') \cdot (S g' \cdot f) - (S g \cdot f') \cdot (D_x g' \cdot f)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -gf' \cdot (SD_x g' \cdot f)] - 3\mu^2 D_x [(Sg \cdot f') \cdot fg' + gf' \cdot (Sg' \cdot f)] \\
& + (Sf \cdot g)[(D_t + D_x^3)f' \cdot g'] - (Sf' \cdot g')[(D_t + D_x^3)f \cdot g] \\
\stackrel{(25a)}{=} & -3D_x [(SD_x f \cdot g') \cdot (D_x f \cdot g' + \mu gf' - \mu fg')] + (SD_x g \cdot f')(D_x g \cdot f' - \mu gf' + \mu fg') \\
& + 3\mu D_x [(SD_x g \cdot f') \cdot fg' + (D_x f \cdot g' + \mu gf' - \mu fg') \cdot (Sg' \cdot f)] \\
& + (Sg \cdot f') \cdot (D_x g \cdot f' - \mu gf' + \mu fg') - gf' \cdot (SD_x g' \cdot f)] \\
& - 3\mu^2 D_x [(Sg \cdot f') \cdot fg' + gf' \cdot (Sg' \cdot f)] \\
& + (Sf \cdot g)[(D_t + D_x^3)f' \cdot g'] - (Sf' \cdot g')[(D_t + D_x^3)f \cdot g] \\
= & 3D_x [(D_x f \cdot g' - \mu fg') \cdot (SD_x - \mu S)f \cdot g'] \\
& + 3D_x [(D_x g \cdot f' - \mu gf') \cdot (SD_x - \mu S)g \cdot f'] \\
& + (Sf \cdot g)[(D_t + D_x^3)f' \cdot g'] - (Sf' \cdot g')[(D_t + D_x^3)f \cdot g] \\
\stackrel{(25a)}{=} & 3D_x [(D_x g \cdot f' - \mu gf') \cdot (SD_x f \cdot g' - \mu Sf \cdot g' + SD_x g \cdot f' - \mu Sg \cdot f')] \\
& + (Sf \cdot g)[(D_t + D_x^3)f' \cdot g'] - (Sf' \cdot g')[(D_t + D_x^3)f \cdot g] \\
\stackrel{(25b)}{=} & (Sf \cdot g)[(D_t + D_x^3)f' \cdot g'] - (Sf' \cdot g')[(D_t + D_x^3)f \cdot g].
\end{aligned}$$

因为 (f, g) 是方程 (24a) 的一个解, 满足方程 $(D_t + D_x^3)f \cdot g = 0$; 又 $\mathbb{P}_1 \equiv 0$, 所以有 $(D_t + D_x^3)f' \cdot g' = 0$, 由此证得 $\mathbb{P}_2 \equiv 0$.

下面将利用 SKdV₁ 方程的双线性 Bäcklund 变换 (25a)–(25d) 来推导 SKdV₁ 方程的 Lax 表示. 为此, 假设

$$m = f'/f, \quad n = g'/g,$$

将相关变量变换 (20) 以及上式代入方程 (25a)–(25b) 并化简可得

$$(m - n)_x + (m + n)\varphi_x + \mu(m - n) = 0, \quad (26a)$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{D}(m + n)_x + \mu\mathcal{D}(m + n) + (m + n)\mathcal{D}\rho_x + \varphi_x\mathcal{D}(m - n) \\
& + \mu(m - n)\mathcal{D}\varphi + (m - n)_x\mathcal{D}\varphi + (m + n)\varphi_x\mathcal{D}\varphi = 0,
\end{aligned} \quad (26b)$$

$$n_t - 3n_x\varphi_{xx} + 3n_x\rho_{xx} + n_{xxx} - 3\mu n\varphi_{xx} + 3\mu n\rho_{xx} + 3\mu n_{xx} + 3\mu^2 n_x = 0, \quad (26c)$$

$$m_t + 3m_x\varphi_{xx} + 3m_x\rho_{xx} + m_{xxx} + 3\mu m\varphi_{xx} + 3\mu m\rho_{xx} + 3\mu m_{xx} + 3\mu^2 m_x = 0. \quad (26d)$$

为得到更紧凑的形式, 引入新的变量

$$U = m - n, \quad V = m + n,$$

将上式代入方程 (26a)–(26d), 通过简单的计算可得

$$U_x + \varphi_x V + \mu U = 0, \quad (27a)$$

$$\varphi_x \mathcal{D}U + \mathcal{D}V_x + \mu \mathcal{D}V + V \mathcal{D}\rho_x = 0, \quad (27b)$$

$$V_t + 3\mu\rho_{xx}V + 3\mu\varphi_{xx}U + V_{xxx} + 3\varphi_{xx}U_x + 3\rho_{xx}V_x + 3\mu V_{xx} + 3\mu^2 V_x = 0, \quad (27c)$$

$$U_t + 3\mu\rho_{xx}U + 3\mu\varphi_{xx}V + U_{xxx} + 3\varphi_{xx}V_x + 3\rho_{xx}U_x + 3\mu U_{xx} + 3\mu^2 U_x = 0. \quad (27d)$$

由此可以得到下面的结论:

定理 方程 (27a)–(27d) 的相容性条件是 SKdV₁ 方程 (19a)–(19b).

直接计算即可得到上述结论, 证明从略.

3.3 孤立子解

由于 SKdV₁ 系统 (19a)–(19b) 有双线性形式 (24a)–(24b), 因此可以利用 Hirota 标准的微扰法来构造孤立子解. 本节将省略繁杂的计算过程, 直接给出 SKdV₁ 系统的 1-孤立子解、2-孤立子解和 3-孤立子解.

1-孤立子解为

$$\begin{aligned} f &= 1 + e^{\eta+\theta\xi}, \\ g &= 1 - e^{\eta+\theta\xi}, \end{aligned}$$

其中 $\eta = kx - k^3t + c_0$.

2-孤立子解为

$$\begin{aligned} f &= 1 + e^{\eta_1+\theta\xi_1} + e^{\eta_2+\theta\xi_2} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2+\theta(\xi_1+\xi_2)}, \\ g &= 1 - e^{\eta_1+\theta\xi_1} - e^{\eta_2+\theta\xi_2} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2+\theta(\xi_1+\xi_2)}. \end{aligned}$$

3-孤立子解为

$$\begin{aligned} f &= 1 + e^{\eta_1+\theta\xi_1} + e^{\eta_2+\theta\xi_2} + e^{\eta_3+\theta\xi_3} \\ &\quad + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2+\theta(\xi_1+\xi_2)} + A_{13}e^{\eta_1+\eta_3+\theta(\xi_1+\xi_3)} + A_{23}e^{\eta_2+\eta_3+\theta(\xi_2+\xi_3)} \\ &\quad + (m_{13}m_{23}A_{12} + m_{12}m_{32}A_{13} + m_{12}m_{13}A_{23})e^{\eta_1+\eta_2+\eta_3+\theta(\xi_1+\xi_2+\xi_3)}, \\ g &= 1 - e^{\eta_1+\theta\xi_1} - e^{\eta_2+\theta\xi_2} - e^{\eta_3+\theta\xi_3} \\ &\quad + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2+\theta(\xi_1+\xi_2)} + A_{13}e^{\eta_1+\eta_3+\theta(\xi_1+\xi_3)} + A_{23}e^{\eta_2+\eta_3+\theta(\xi_2+\xi_3)} \\ &\quad - (m_{13}m_{23}A_{12} + m_{12}m_{32}A_{13} + m_{12}m_{13}A_{23})e^{\eta_1+\eta_2+\eta_3+\theta(\xi_1+\xi_2+\xi_3)}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \eta_i &= k_i x - k_i^3 t + c_i, \quad m_{ij} = \frac{k_i - k_j}{k_i + k_j}, \\ A_{ij} &= \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \right) \left(\frac{k_j - k_i + 2\xi_i \xi_j}{k_i + k_j} + 2\theta \frac{k_i \xi_j - k_j \xi_i}{k_i + k_j} \right). \end{aligned}$$

4 结论

利用 Hirota 双线性方法, 本文将两个 $N=2$ 超对称 KdV 方程双线性化, 得到了它们各自的双线性形式, 由此构造了相应方程的解. 对于 $N=2, a=1$ 超对称 KdV 方程, 我们得到了它的 Bäcklund 变换以及 Lax 表示.

本文研究 $N=2$ 超对称可积方程的思想是将其转化为 $N=1$ 的情形, 然后再将其双线性化, 所以直接将 $N=2$ 超对称方程转化成合适的双线性形式仍然是一个未解决问题. 另外, 寻找 SKdV₋₂ 方程的双线性形式以及在双线性的框架下探讨 SKdV₄ 方程的如 Bäcklund 变换等其他可积性质是有待研究的课题.

致谢 作者感谢胡星标研究员和楼森岳教授有益的讨论和宝贵建议, 同时也感谢审稿人的评审意见.

参考文献

- 1 Manin Y I, Radul A O. A supersymmetric extension of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy. *Commun Math Phys*, **98**: 65–77 (1985)

- 2 Mathieu P. Supersymmetric extension of the Korteweg-de Vries equation. *J Math Phys*, **29**: 2499–2506 (1988)
- 3 Oevel W, Popowicz Z. The bi-Hamiltonian structure of fully supersymmetric Korteweg-de Vries systems. *Commun Math Phys*, **139**: 441–460 (1991)
- 4 Liu Q P, Mañas M. In Supersymmetry and Integrable Systems. Aratyn H, et al. Eds. *Lect Notes Phys*, **502**: 268–281 (1998)
- 5 Liu Q P, Xie Y F. Nonlinear superposition formula for $N=1$ supersymmetric KdV equation. *Phys Lett A*, **325**: 139–143 (2004)
- 6 Liu Q P, Hu X B. Bilinearization of $N = 1$ supersymmetric Korteweg-de Vries equation revisited. *J Phys A: Math & Gen*, **38**: 6371–6378 (2005)
- 7 McArthur I N, Yung C M. Hirota bilinear form for the super-KdV hierarchy. *Mod Phys Lett A*, **8**: 1739–1745 (1993)
- 8 Carstea A S. Extension of the bilinear formalism to supersymmetric KdV-type equations. *Nonlinearity*, **13**: 1645–1656 (2000)
- 9 Carstea A S, Ramani A, Grammaticos B. Constructing the soliton solutions for the $N = 1$ supersymmetric KdV hierarchy. *Nonlinearity*, **14**: 1419–1423 (2001)
- 10 Laberge C A, Mathieu P. $N = 2$ superconformal algebra and integrable $O(2)$ fermionic extensions of the Korteweg-de Vries equation. *Phys Lett B*, **215**: 718–722 (1988)
- 11 Labelle P, Mathieu P. A new $N=2$ supersymmetric Korteweg-de Vries equation. *J Math Phys*, **32**: 923–927 (1991)
- 12 Popowicz Z. The Lax formulation of the “new” $N=2$ SUSY KdV equation. *Phys Lett A*, **174**: 411–415 (1993)
- 13 Bourque S, Mathieu P. The Painlevé analysis for $N = 2$ super KdV equations. *J Math Phys*, **42**: 3517–3539 (2001)
- 14 Inami T, Kanno H. $N=2$ super KdV super sine-Gordon equations based on Lie super algebra $A(1,1)^{(1)}$. *Nuc Phys B*, **359**: 201–217 (1991)
- 15 Liu Q P. On the integrable hierarchies associated with $N=2$ super W_n algebra. *Phys Lett A*, **235**: 335–340 (1997)
- 16 Liu Q P, Hu X B, Zhang M X. Supersymmetric modified Korteweg-de Vries equation: Bilinear approach. *Nonlinearity*, **18**: 1597–1603 (2005)
- 17 Liu Q P, Yang X X. Supersymmetric two-boson equation: bilinearization and solutions. *Phys Lett A*, **351**: 131–135 (2006)
- 18 Brunelli J C, Das A. The supersymmetric two boson hierarchies. *Phys Lett B*, **337**: 303–307 (1994)

附录: 双线性恒等式

在这个附录里, 我们列出相关的双线性恒等式. 其中 a 、 b 、 c 、 d 是依赖于时间变量 t 、普通空间变量 x 和超空间变量 θ 的 Bose 函数.

$$(SD_x a \cdot b)cd - ab(SD_x c \cdot d) = S[(D_x b \cdot d) \cdot ac - bd \cdot (D_x a \cdot c)] \\ + (Sa \cdot b)(D_x c \cdot d) - (D_x a \cdot b)(Sc \cdot d), \quad (\text{A.1})$$

$$(SD_x^3 a \cdot b)cd - ab(SD_x^3 c \cdot d) = -3D_x[(SD_x a \cdot d) \cdot (D_x b \cdot c) + (SD_x b \cdot c) \cdot (D_x a \cdot d)] \\ + S[(D_x^3 a \cdot c) \cdot bd - ac \cdot (D_x^3 b \cdot d)] \\ + (Sa \cdot b)(D_x^3 c \cdot d) - (D_x^3 a \cdot b)(Sc \cdot d), \quad (\text{A.2})$$

$$S[(D_x^2 a \cdot b) \cdot cd - ab \cdot (D_x^2 c \cdot d)] = D_x[(SD_x a \cdot c) \cdot bd + (D_x a \cdot c) \cdot (Sb \cdot d)] \\ + D_x[-(Sa \cdot c) \cdot (D_x b \cdot d) - ac \cdot (SD_x b \cdot d)], \quad (\text{A.3})$$

$$S[(D_x a \cdot b) \cdot cd - ab \cdot (D_x c \cdot d)] = D_x[(Sa \cdot d) \cdot bc + ad \cdot (Sb \cdot c)]. \quad (\text{A.4})$$