复单位球上光滑自映射所诱导复合算子的紧差

献给史济怀教授 80 华诞

戴济能^①, 邓方文^②, 欧阳才衡^{②*}

① 武汉理工大学数学系, 武汉 430070;

② 中国科学院武汉物理与数学研究所, 武汉 430071

E-mail: daijineng@163.com, fwdeng@wipm.ac.cn, ouyang@wipm.ac.cn

收稿日期: 2015-03-30; 接受日期: 2015-06-04; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11301404 和 11271359) 资助项目

摘要 假定复单位球 B_N 上的全纯自映射 φ 与 ψ 在边界处足够光滑, 本文研究了由它们所诱导的复合算子 C_φ 与 C_ψ 在加权 Bergman 空间 $A_\alpha^2(B_N)$ 以及 Hardy 空间 $H^2(B_N)$ 上的紧差问题. 本文关于 φ 与 ψ 有相同的边界数据的结果是单复变情形下相应结论的一个非平凡推广, 它揭示了两个复合算子的诱导映射 φ 与 ψ 在单位球边界处的深层联系.

关键词 复合算子 紧差 Bergman 空间 Hardy 空间

MSC (2010) 主题分类 47B33, 32A36

1 引言

设 $B_N = \{z = (z_1, \dots, z_N) : |z|^2 = \sum_{j=1}^N |z_j|^2 < 1\}$ 以及 $\partial B_N = \{z \in \mathbb{C}^N : |z| = 1\}$ 分别为复 Euclid 空间 $\mathbb{C}^N$ 上的单位球和单位球面. 单位球 B_N 上全纯函数的全体记为 $H(B_N)$. 设 $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ 是 B_N 上的一个全纯自映射, 复合算子 C_φ 定义为 $C_\varphi f = f \circ \varphi$, $f \in H(B_N)$. 在过去几十年中, 各种函数空间上复合算子的性质被人们广泛研究 (参见专著 [1]), 其中复合算子的拓扑结构以及紧差问题是众多学者关注的一个研究课题. 对于一个函数空间 X , 将 X 上全体有界复合算子 C_φ 所构成的集合记为 $C(X)$, 并赋予算子范数 $\|C_\varphi\|$ 的拓扑结构. 1989 年, MacCluer^[2] 证明了如下结论: 如果复单位圆盘加权 Dirichlet 空间上的两个复合算子 C_φ 与 C_ψ 处在同一个道路连通分支或者它们的差是紧算子, 则 φ 与 ψ 有相同的一阶边界数据 (first-order boundary data). 几乎与此同时, Shapiro 和 Sundberg^[3] 提出了一个猜想: 两个复合算子 C_φ 与 C_ψ 处在同一个道路连通分支当且仅当这两个算子的差 $C_\varphi - C_\psi$ 是紧算子. 2003 年, Bourdon^[4] 证明了, 如果 φ 与 ψ 在单位圆周附近二阶连续可微且 $C_\varphi - C_\psi$ 在 Hardy 空间上紧, 那么 φ 与 ψ 有相同的二阶边界数据 (second-order boundary data); 进一步地, 如果 φ 与 ψ 是分式线性映射且它们有相同的一阶边界数据, 则 C_φ 与 C_ψ 必处在同一个道路连通分支. Bourdon 由此给出了两个线性分式复合算子处在同一个道路连通分支但其差非紧的例子, 从而否定了 Shapiro 和 Sundberg 提出的猜想. Moorhouse 和 Toews^[5] 也独立地给出了反例说明该猜想不真.

英文引用格式: Dai J N, Deng F W, Ouyang C H. Compact differences of composition operators induced by smooth self-maps of the complex unit ball (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 1855–1866, doi: 10.1360/N012015-00144

本文假定单位球上的自映射 φ 与 ψ 在边界处足够光滑且 $C_\varphi - C_\psi$ 在加权 Bergman 空间或 Hardy 空间上紧, 我们刻画了 φ 与 ψ 在单位球边界处的性态, 推广了单变量情形下相应的结论 (参见文献 [4, 6]), 主要结果如下:

定理 1.1 设 φ 与 ψ 是 B_N 上的两个全纯自映射. 假定 $\varphi \in C^3(\overline{B_N})$, $\psi \in C^3(\overline{B_N})$, 并且存在 $\zeta, \eta \in \partial B_N$ 使得 $\varphi(\zeta) = \eta$. 若 $C_\varphi - C_\psi$ 在空间 $A_\alpha^2(B_N)$ ($\alpha \geq -1$) 上紧, 则对所有满足条件 $\langle \zeta, \tau \rangle = \langle \zeta, \xi \rangle = \langle \tau, \xi \rangle = 0$ 的 $\tau, \xi \in \partial B_N$, 必有 $\psi(\zeta) = \varphi(\zeta)$, $\psi'(\zeta) = \varphi'(\zeta)$, $D_{\zeta\zeta}\psi_\eta(\zeta) = D_{\zeta\zeta}\varphi_\eta(\zeta)$, $D_{\zeta\tau}\psi_\eta(\zeta) = D_{\zeta\tau}\varphi_\eta(\zeta)$, $D_{\tau\tau}\psi_\eta(\zeta) = D_{\tau\tau}\varphi_\eta(\zeta)$, $D_{\tau\xi}\psi_\eta(\zeta) = D_{\tau\xi}\varphi_\eta(\zeta)$, 其中 $\varphi_\eta(z) = \langle \varphi(z), \eta \rangle$, $D_\zeta\varphi_\eta$ 为 φ_η 沿 ζ 方向的方向导数.

我们通过构造具体的例子表明, 上述定理的结论在某种意义上是最好的. 特别地, 当 $N = 2$ 时, 因为在二维向量空间里不存在三个相互正交的单位向量, 于是, 定理 1.1 的结论变为: 对所有满足条件 $\langle \zeta, \tau \rangle = 0$ 的 $\tau \in \partial B_N$, 有 $\psi(\zeta) = \varphi(\zeta)$, $\psi'(\zeta) = \varphi'(\zeta)$, $D_{\zeta\zeta}\psi_\eta(\zeta) = D_{\zeta\zeta}\varphi_\eta(\zeta)$, $D_{\zeta\tau}\psi_\eta(\zeta) = D_{\zeta\tau}\varphi_\eta(\zeta)$, $D_{\tau\tau}\psi_\eta(\zeta) = D_{\tau\tau}\varphi_\eta(\zeta)$. 当 $N = 1$ 时, 其结论变得更为简单: $\psi(\zeta) = \varphi(\zeta)$, $\psi'(\zeta) = \varphi'(\zeta)$ 以及 $\psi''(\zeta) = \varphi''(\zeta)$, 即 φ 与 ψ 有相同的二阶边界数据.

2 预备知识

设 $\alpha > -1$, $d\sigma(\zeta)$ 和 $dv(z)$ 分别表示球面上 ∂B_N 规范化的面积测度和球上 B_N 规范化的体积测度. 令 $dv_\alpha(z) = c_\alpha(1 - |z|^2)^\alpha dv(z)$, 其中

$$c_\alpha = \frac{\Gamma(N + \alpha + 1)}{\Gamma(N + 1)\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Hardy 空间和加权 Bergman 空间分别定义为

$$H^p(B_N) = \left\{ f \in H(B_N) : \|f\|_{H^p}^p = \sup_{0 < r < 1} \int_{\partial B_N} |f(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) < \infty \right\},$$

$$A_\alpha^p(B_N) = \left\{ f \in H(B_N) : \|f\|_{A_\alpha^p}^p = \int_{B_N} |f(z)|^p dv_\alpha(z) < \infty \right\},$$

其中 $p > 0$, 本文主要考虑 $p = 2$ 的情形. 有时为了叙述的方便, 我们也用下面的记号:

$$H^2(B_N) = A_{-1}^2(B_N).$$

众所周知, 单复变 Hardy 空间以及加权 Bergman 空间上的复合算子一定是有界算子, 但这个结论在多复变量情形下不再成立. Carleson 测度是刻画多复变函数空间上的复合算子性质的一个重要工具, 但使用验证起来多有不便. 假设 φ 在单位球的边界附近足够光滑, Wogen [7] 给出了复合算子 C_φ 在 Hardy 空间上为有界的一个充要条件. 利用 Wogen 的结果, 再结合一个重要事实 (参见文献 [8, 9]): 复合算子在 Hardy 空间 $H^2(B_N)$ 上有界蕴含着它在加权 Bergman 空间 $A_\alpha^2(B_N)$ ($\alpha > -1$) 上有界, 便可以得到下述命题:

命题 2.1 设 φ 是 B_N 上的一个全纯自映射, 且 $\varphi \in C^3(\overline{B_N})$. 如果对所有满足条件 $\varphi(\zeta) = \eta$, $\langle \zeta, \tau \rangle = 0$ 的 $\zeta, \eta, \tau \in \partial B_N$, 有 $D_\zeta\varphi_\eta(\zeta) > |D_{\tau\tau}\varphi_\eta(\zeta)|$, 则复合算子 C_φ 在加权 Bergman 空间 $A_\alpha^2(B_N)$ ($\alpha > -1$) 上有界.

设 a ($a \neq 0$) 为单位球 B_N 上一点, 定义

$$\varphi_a(z) = \frac{a - P_a z - s_a Q_a z}{1 - \langle z, a \rangle}, \quad z \in B_N,$$

其中 $P_a z = \frac{\langle z, a \rangle}{|a|^2} a$, $Q_a z = z - P_a z$ 以及 $s_a = \sqrt{1 - |a|^2}$. 当 $a = 0$, 记 $\varphi_a(z) = -z$, 则 φ_a 是单位球 B_N 上的一个全纯自同构且满足

$$1 - \langle \varphi_a(z), a \rangle = \frac{1 - |a|^2}{1 - \langle z, a \rangle}, \quad (2.1)$$

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \langle z, a \rangle|^2}. \quad (2.2)$$

若令 $\rho(a, z) = |\varphi_a(z)|$, 则 ρ 是定义在 B_N 上的一个自同构不变度量, 通常称为伪双曲度量.

设 D 为复平面上的单位圆盘, φ 为 D 上的一个全纯自映射. 对于一点 $\zeta \in \partial D$, 如果存在 $\eta \in \partial D$ 使得非切极限 $\lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{\varphi(z) - \eta}{z - \zeta}$ 存在, 则称 φ 在点 ζ 处有角导数. 著名的 Julia-Carathéodory 定理是说, φ 在点 ζ 处有角导数当且仅当 $d_\varphi(\zeta) = \liminf_{z \rightarrow \zeta} \frac{1 - |\varphi(z)|}{1 - |z|} < \infty$, 它也等价于 φ 和 φ' 在点 ζ 处分别有非切极限 η ($|\eta| = 1$) 和 $d_\varphi(\zeta)\bar{\zeta}\eta$. 单变量情形下的 Julia-Carathéodory 定理可以推广到多变量情形.

若单位球上的一条曲线 $\Gamma(t) : [0, 1) \rightarrow B_N$ 在 $t \rightarrow 1$ 时, $\Gamma(t) \rightarrow \zeta \in \partial B_N$, 则称此曲线为 ζ 曲线. 设 $\gamma(t)$ 是 $\Gamma(t)$ 在通过 0 和 ζ 的复线 $[\zeta]$ 上的正交投影: $\gamma(t) = \langle \Gamma(t), \zeta \rangle \zeta$. 如果单位球 B_N 上的全纯函数 f 沿着每条满足以下条件:

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{|\Gamma(t) - \gamma(t)|^2}{1 - |\gamma(t)|^2} = 0, \quad \sup_{0 \leq t < 1} \frac{|\gamma(t) - \zeta|}{1 - |\gamma(t)|} < \infty \quad (2.3)$$

的 ζ 曲线使得极限 $\lim_{t \rightarrow 1} f(\Gamma(t))$ 存在且取同一个值, 则称 f 在点 $\zeta \in \partial B_N$ 处有限制极限. 对于 B_N 上的一个全纯自映射 φ 和一点 $\zeta \in \partial B_N$, 如果存在 $\eta \in \partial B_N$ 使得 $\frac{1 - \langle \varphi(z), \eta \rangle}{1 - \langle z, \zeta \rangle}$ 在点 ζ 处有限制极限, 我们称 φ 在点 ζ 处有角导数. 下面陈述单位球上的 Julia-Carathéodory 定理.

设 $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ 是单位球 B_N 上的一个全纯自映射以及 $\zeta \in \partial B_N$, 则下列陈述等价:

- (i) φ 在点 ζ 处有角导数;
- (ii) $d_\varphi(\zeta) = \liminf_{z \rightarrow \zeta} \frac{1 - |\varphi(z)|}{1 - |z|} < \infty$;
- (iii) φ 和 $\langle \varphi'(z)\zeta, \eta \rangle$ 在点 ζ 处分别有限制极限 $\eta \in \partial B_N$ 和 $d_\varphi(\zeta)$, 其中

$$\varphi'(z) = \begin{pmatrix} D_1 \varphi_1(z) & \cdots & D_N \varphi_1(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 \varphi_N(z) & \cdots & D_N \varphi_N(z) \end{pmatrix},$$

以及 $D_k = \partial/\partial z_k$ ($1 \leq k \leq N$).

利用单位圆盘和单位球上的 Julia-Carathéodory 定理, 我们得到一个十分有趣的结果, 这个结果将会在后面用到.

引理 2.1 设 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ 是单位球 B_N 上的一个全纯自映射, 定义单位圆盘上 D 的一个全纯自映射 $\lambda(z_1) = \varphi_1(z_1 e_1) = \varphi_1(z_1, 0')$.

(i) 如果 φ 在点 e_1 有限制极限 e_1 且有角导数, 则 λ 在点 1 处有非切极限 1 并且有角导数满足 $d_\lambda(1) = d_\varphi(e_1)$;

(ii) 如果 λ 在点 1 处有非切极限 1 且有角导数, 则 φ 在点 e_1 有限制极限 e_1 并且有角导数满足 $d_\varphi(e_1) = d_\lambda(1)$.

证明 (i) 设 $\Lambda(t) : [0, 1) \rightarrow D$ 是任意一条当 $t \rightarrow 1$ 时 $\Lambda(t)$ 非切趋于点 1 的曲线. 容易验证 $\Gamma = \{z = \Lambda(t)e_1 = (\Lambda(t), 0')\}$ 是一条满足条件 (2.3) 的 e_1 曲线. 当 z 沿着曲线 Γ 趋近于 e_1 时, 根据单

位球上的 Julia-Carathéodory 定理, 我们有 $\varphi(z) \rightarrow e_1$ 以及 $D_1\varphi_1(z) \rightarrow d_\varphi(e_1)$. 这就蕴含着, 在点 $z_1 = 1$ 处, $\varphi_1(z_1e_1)$ 和 $D_1\varphi_1(z_1e_1)$ 分别有非切极限 1 和 $d_\varphi(e_1)$. 再利用单位圆盘上的 Julia-Carathéodory 定理, 我们推断 λ 在点 1 处有角导数且满足 $d_\lambda(1) = d_\varphi(e_1)$.

(ii) 假定 φ 在点 e_1 处无角导数, 则 $\lim_{z \rightarrow e_1} \frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} = \infty$. 这意味着, 当 $z_1 \rightarrow 1$, 有 $\frac{1-|\varphi(z_1e_1)|}{1-|z_1|} \rightarrow \infty$. 注意到

$$\frac{1-|\varphi(z_1e_1)|}{1-|z_1|} \leq \frac{1-|\varphi_1(z_1e_1)|}{1-|z_1|} = \frac{1-|\lambda(z_1)|}{1-|z_1|},$$

这便推得 λ 在点 1 处无角导数, 是一个矛盾. 因此, 根据单位球上的 Julia-Carathéodory 定理, 在点 e_1 处 φ 有限制极限 $\eta = \lim_{0 < r \rightarrow 1} \varphi(re_1)$, 且 $D_1\varphi_1(z)$ 也有限制极限 $d_\varphi(e_1) = \lim_{0 < r \rightarrow 1} D_1\varphi_1(re_1)$. 又因为 $\lim_{0 < r \rightarrow 1} \lambda(r) = \lim_{0 < r \rightarrow 1} \varphi_1(re_1) = 1$ 和 $|\varphi(z)| < 1$ ($z \in B_N$), 故 $\eta = e_1$. 另一方面, 由单位圆盘上的 Julia-Carathéodory 定理, 我们有 $d_\lambda(1) = \lim_{0 < r \rightarrow 1} D_1\varphi_1(re_1)$, 从而, $d_\lambda(1) = d_\varphi(e_1)$. $\square$

3 主要结论

首先叙述一个关于复合算子的差 $C_\varphi - C_\psi$ 在空间 $A_\alpha^2(B_N)$ 上为紧的必要条件 (参见文献 [6, 10]).

命题 3.1 设 φ 与 ψ 是 B_N 上的两个全纯自映射, 若 $C_\varphi - C_\psi$ 在 $A_\alpha^2(B_N)$ ($\alpha \geq -1$) 上紧, 则

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} \rho(z) \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} + \frac{1-|z|^2}{1-|\psi(z)|^2} \right) = 0, \quad (3.1)$$

其中 $\rho(z) = \rho(\varphi(z), \psi(z))$, 以下同.

注 3.1 当 $N = 1$, (3.1) 同时也是 $C_\varphi - C_\psi$ 在加权 Bergman 空间上 $A_\alpha^2(B_N)$ ($\alpha > -1$) 上紧的一个充分条件 (参见文献 [6]). 当 $N > 1$ 时, 如果要求 C_φ 和 C_ψ 在较小加权 Bergman 空间 $A_\beta^2(B_N)$ ($\alpha > \beta > -1$) 上有界, 则由 (3.1) 可证得 $C_\varphi - C_\psi$ 在 $A_\alpha^2(B_N)$ 上紧 (参见文献 [11]).

下面的命题从另一个角度刻画了 $C_\varphi - C_\psi$ 在 $A_\alpha^2(B_N)$ 上的紧性特征, 它最早出现在文献 [12, 13] 中, 现在利用引理 2.1 给出一个相对较简单的证明.

命题 3.2 设 $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ 与 $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ 是单位球 B_N 上的全纯自映射, 且 φ 在点 $\zeta \in \partial B_N$ 处有角导数. 如果 $C_\varphi - C_\psi$ 在 $A_\alpha^2(B_N)$ ($\alpha \geq -1$) 上紧, 则 ψ 在点 ζ 处也有角导数, 并且有 $\varphi(\zeta) = \psi(\zeta)$ 和 $d_\varphi(\zeta) = d_\psi(\zeta)$, 其中 $\varphi(\zeta)$ 表示 φ 在点 ζ 处的限制极限.

证明 由单位球上的 Julia-Carathéodory 定理, φ 在点 $\zeta \in \partial B_N$ 处有角导数说明 φ 在点 ζ 有限制极限. 不失一般性, 我们可以假设 $\zeta = e_1$ 以及 φ 在点 e_1 有限制极限 e_1 . 定义单位圆盘 D 上的两个全纯自映射 λ 和 μ :

$$\lambda(z_1) = \varphi_1(z_1, 0'), \quad \mu(z_1) = \psi_1(z_1, 0').$$

下面表明 $C_\lambda - C_\mu$ 在空间 $A_{\alpha+N-1}^2(D)$ 上紧. 设 $\{f_k\}$ 是 $A_{\alpha+N-1}^2(D)$ 上的有界函数列且在 D 的紧子集上一致收敛于零. 我们定义新的函数列: $F_k(z_1, z') = f_k(z_1)$. 显然, $\{F_k\}$ 在 B_N 的紧子集上一致收敛于零且 $\|F_k\|_{A_\alpha^2(B_N)} = \|f_k\|_{A_{\alpha+N-1}^2(D)}$. 令 $g_k(z_1) = F_k \circ \varphi(z_1, 0') - F_k \circ \psi(z_1, 0')$, 我们有 (参见文献 [10])

$$\|(C_\varphi - C_\psi)F_k\|_{A_\alpha^2(B_N)} = \|F_k \circ \varphi - F_k \circ \psi\|_{A_\alpha^2(B_N)} \geq \|g_k\|_{A_{\alpha+N-1}^2(D)}.$$

注意到 $g_k(z_1) = f_k \circ \lambda(z_1) - f_k \circ \mu(z_1)$, 于是,

$$\|(C_\varphi - C_\psi)F_k\|_{A_\alpha^2(B_N)} \geq \|(C_\lambda - C_\mu)f_k\|_{A_{\alpha+N-1}^2(D)}. \quad (3.2)$$

$C_\varphi - C_\psi$ 紧蕴含着 $\|(C_\varphi - C_\psi)F_k\|_{A_\alpha^2(B_N)} \rightarrow 0$, 从而, $\|(C_\lambda - C_\mu)f_k\|_{A_{\alpha+N-1}^2(D)} \rightarrow 0$, 这就证明了 $C_\lambda - C_\mu$ 在 $A_{\alpha+N-1}^2(D)$ 上紧. 利用文献 [2] 的结果可知, λ 与 μ 在点 1 处有相同的非切极限和相同的角导数, 再结合引理 2.1, 就可证得所需要的结论. $\square$

在命题 3.2 中, 如果进一步假设全纯自映射 φ 与 ψ 在单位球边界处足够光滑, 则我们可以得到关于 φ 和 ψ 在边界处更为丰富的结论, 参见定理 3.1, 它是定理 1.1 的一个特殊情形. 这里借鉴了文献 [10] 在处理线性分式复合算子问题的有关方法, 但为了处理更一般情形, 即光滑自映射所诱导的复合算子, 我们还需要下面几个非常有用的引理.

引理 3.1 设 $r > 0$, $E = \{z \in D : 1 - |z|^2 = r|1 - z|^2\}$ 是单位圆盘 D 的一个子集, 则

$$1 - \operatorname{Re} z = \frac{(1+r)|1-z|^2}{2}, \quad z \in E, \quad \lim_{E \ni z \rightarrow 1} \frac{(1-z)^2}{|1-z|^2} = -1.$$

证明 从 $1 - |z|^2 = r|1 - z|^2 = r(1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2)$ 可推得

$$1 - \operatorname{Re} z = \frac{(1+r)(1-|z|^2)}{2r} = \frac{1+r}{2}|1-z|^2.$$

当 $z \rightarrow 1$, 我们有

$$\begin{aligned} (\operatorname{Im} z)^2 &= |z|^2 - (\operatorname{Re} z)^2 = \frac{2r\operatorname{Re} z + 1 - r}{r+1} - (\operatorname{Re} z)^2 \\ &= \frac{[(r+1)(\operatorname{Re} z - 1) + 2](1 - \operatorname{Re} z)}{r+1} \\ &= \frac{2}{r+1}(1 - \operatorname{Re} z) + o(1 - \operatorname{Re} z). \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} (1-z)^2 &= (1 - \operatorname{Re} z)^2 - 2i\operatorname{Im} z(1 - \operatorname{Re} z) - (\operatorname{Im} z)^2 \\ &= -\frac{2}{r+1}(1 - \operatorname{Re} z) + o(1 - \operatorname{Re} z) \\ &= -|1-z|^2 + o(|1-z|^2). \end{aligned}$$

结论得证. $\square$

引理 3.2 设 $\rho(a, b) = |\varphi_a(b)|$, 则 $\rho(a, b) \rightarrow 0$ 当且仅当

$$\frac{\langle a, a-b \rangle}{1-|a|^2} \rightarrow 0, \quad \frac{\langle b, b-a \rangle}{1-|b|^2} \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

证明 由 (2.1) 知,

$$1 - \langle \varphi_a(b), a \rangle = \frac{1 - |a|^2}{1 - \langle b, a \rangle}, \quad 1 - \langle \varphi_b(a), b \rangle = \frac{1 - |b|^2}{1 - \langle a, b \rangle}.$$

若 $\rho(a, b) \rightarrow 0$, 则 $\varphi_a(b) \rightarrow 0, \varphi_b(a) \rightarrow 0$, 从而,

$$\frac{1 - \langle b, a \rangle}{1 - |a|^2} \rightarrow 1, \quad \frac{1 - \langle a, b \rangle}{1 - |b|^2} \rightarrow 1. \quad (3.4)$$

这就推得 (3.3). 反过来, 若 (3.3) 成立, 自然有 (3.4) 成立, 再利用恒等式 (2.2) 即可知 $\rho(a, b) \rightarrow 0$. $\square$

下面简单的结论在定理 3.1 的证明中多次使用.

引理 3.3 设 $\sum_{i=1}^n \overline{a_i}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n \overline{b_i}(a_i - b_i)$, 则对于所有 $1 \leq i \leq n$, $a_i = b_i$.

定理 3.1 设 $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ 是 B_N 上的全纯自映射. 假定 $\varphi \in C^3(\overline{B_N})$, $\psi \in C^3(\overline{B_N})$ 且 $\varphi(e_1) = e_1$. 若 $C_\varphi - C_\psi$ 在 $A_\alpha^2(B_N)$ ($\alpha \geq -1$) 上紧, 则 $\psi(e_1) = \varphi(e_1)$, $\psi'(e_1) = \varphi'(e_1)$, 且对所有 $1 \leq i, j \leq N$, $D_{ij}\psi_1(e_1) = D_{ij}\varphi_1(e_1)$.

证明 由于证明较长, 我们分为 5 个步骤.

第 1 步 证明 $\varphi(e_1) = \psi(e_1)$, $D_j\varphi_1(e_1) = D_j\psi_1(e_1)$ ($1 \leq j \leq N$), $D_{11}\varphi_1(e_1) = D_{11}\psi_1(e_1)$.

因为 φ 在 $\overline{B_N}$ 上光滑且 $\varphi(e_1) = e_1$, 由 B_N 上的 Julia-Carathéodory 定理可知, φ 在 e_1 处有角导数 $d_\varphi(e_1) = D_1\varphi_1(e_1)$. 再由命题 3.2 便知, $\psi(e_1) = \varphi(e_1)$ 以及 $D_1\varphi_1(e_1) = D_1\psi_1(e_1)$. 令 $\lambda(z_1) = \varphi_1(z_1, 0')$, $\mu(z_1) = \psi_1(z_1, 0')$. 正如命题 3.2 中的证明那样, $C_\lambda - C_\mu$ 在 $A_{\alpha+N-1}^2(D)$ 上紧. 由 Bourdon 和 Moorhouse 的结果可知, λ 与 μ 在 1 处有相同的二阶导数, 即 $D_{11}\varphi_1(e_1) = D_{11}\psi_1(e_1)$. 另一方面, 由 Wogen 的结果 (参见文献 [1, 引理 6.6]), 我们有 $D_j\varphi_1(e_1) = D_j\psi_1(e_1) = 0$ ($2 \leq j \leq N$).

第 2 步 证明 $D_1\varphi_j(e_1) = D_1\psi_j(e_1)$ ($2 \leq j \leq N$).

选取道路 $\Gamma_1 \equiv \{z = (z_1, 0') : 1 - |z_1|^2 = |1 - z_1|^2\}$. 注意到当 $2 \leq j \leq N$, $\varphi_j(e_1) = 0$, 于是, φ 的坐标函数在 $z_1 = 1$ 附近有如下 Taylor 展开式:

$$\begin{aligned}\varphi_j(z_1, 0') &= D_1\varphi_j(e_1)(z_1 - 1) + \frac{D_{11}\varphi_j(e_1)}{2}(z_1 - 1)^2 + o(|z_1 - 1|^2), \\ \varphi_1(z_1, 0') &= 1 + D_1\varphi_1(e_1)(z_1 - 1) + \frac{D_{11}\varphi_1(e_1)}{2}(z_1 - 1)^2 + o(|z_1 - 1|^2).\end{aligned}$$

ψ 的坐标函数也有类似的展开式. 由单位球上的 Julia-Carathéodory 定理可知, $D_1\varphi_1(e_1) > 0$. 这样, 当 $z = (z_1, 0') \in \Gamma_1$, 我们有

$$\begin{aligned}1 - |\varphi(z)|^2 &= 1 - \sum_{j=1}^N |\varphi_j(z)|^2 \\ &= -D_1^2\varphi_1(e_1)|z_1 - 1|^2 + 2D_1\varphi_1(e_1)(1 - \operatorname{Re}z_1) \\ &\quad - \operatorname{Re}[D_{11}\varphi_1(e_1)(1 - z_1)^2] - |z_1 - 1|^2 \sum_{j=2}^N |D_1\varphi_j(e_1)|^2 + o(|z_1 - 1|^2)\end{aligned}$$

和

$$\langle \varphi - \psi, \varphi \rangle = \sum_{j=2}^N \overline{D_1\varphi_j(e_1)}(D_1\varphi_j(e_1) - D_1\psi_j(e_1))|z_1 - 1|^2 + o(|z_1 - 1|^2).$$

由引理 3.1 可得

$$1 - |\varphi(z)|^2 = A|z_1 - 1|^2 + o(|z_1 - 1|^2),$$

其中

$$A = 2D_1\varphi_1(e_1) + \operatorname{Re}D_{11}\varphi_1(e_1) - \sum_{j=1}^N |D_1\varphi_j(e_1)|^2.$$

故当 z 沿着 Γ_1 趋于 e_1 时,

$$\frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \rightarrow \frac{1}{A} > 0.$$

由著名的 Schwarz-Pick 不等式可知, $A \neq 0$. 类似地, $\frac{1-|z|^2}{1-|\psi(z)|^2} \rightarrow \frac{1}{B} > 0$, 其中

$$B = 2D_1\psi_1(e_1) + \operatorname{Re}D_{11}\psi_1(e_1) - \sum_{j=1}^N |D_1\psi_j(e_1)|^2.$$

因为 $C_\varphi - C_\psi$ 紧蕴含着 (3.1), 于是, 当 $z \rightarrow e_1$ ($z \in \Gamma_1$), 有 $\rho(z) = \rho(\varphi, \psi) \rightarrow 0$. 另一方面, 当 z 沿着 Γ_1 趋于 e_1 时,

$$\begin{aligned} \frac{\langle \varphi - \psi, \varphi \rangle}{1 - |\varphi|^2} &\rightarrow \frac{\sum_{j=2}^N \overline{D_1\varphi_j(e_1)}(D_1\varphi_j(e_1) - D_1\psi_j(e_1))}{A}, \\ \frac{\langle \varphi - \psi, \psi \rangle}{1 - |\psi|^2} &\rightarrow \frac{\sum_{j=2}^N \overline{D_1\psi_j(e_1)}(D_1\varphi_j(e_1) - D_1\psi_j(e_1))}{B}. \end{aligned}$$

根据引理 3.2, 我们便知上述极限均为零. 因此,

$$\sum_{j=2}^N \overline{D_1\varphi_j(e_1)}(D_1\varphi_j(e_1) - D_1\psi_j(e_1)) = 0 = \sum_{j=2}^N \overline{D_1\psi_j(e_1)}(D_1\varphi_j(e_1) - D_1\psi_j(e_1)).$$

再由引理 3.3 可得 $D_1\varphi_j(e_1) = D_1\psi_j(e_1)$ ($2 \leq j \leq N$).

第 3 步 证明 $D_k\varphi_j(e_1) = D_k\psi_j(e_1)$, $D_{kk}\varphi_1(e_1) = D_{kk}\psi_1(e_1)$ ($2 \leq k, j \leq N$).

选取路径 $\Gamma_2(t) = te_1 + \sqrt{1-t}e_k$ ($0 < t < 1$). 当 $2 \leq j \leq N$, 我们有

$$\begin{aligned} \varphi_j(te_1 + \sqrt{1-t}e_k) &= \left[D_1\varphi_j(e_1) - \frac{1}{2}D_{kk}\varphi_j(e_1) \right] (t-1) + D_k\varphi_j(e_1)\sqrt{1-t} + o(t-1), \\ \varphi_1(te_1 + \sqrt{1-t}e_k) &= 1 + \left[D_1\varphi_1(e_1) - \frac{1}{2}D_{kk}\varphi_1(e_1) \right] (t-1) + o(t-1). \end{aligned}$$

类似的展开式对 ψ 的坐标函数也成立. 因此, 当 $z \in \Gamma_2$,

$$\begin{aligned} 1 - |\varphi(z)|^2 &= \left\{ 2D_1\varphi_1(e_1) - \operatorname{Re}[D_{kk}\varphi_1(e_1)] - \sum_{j=2}^N |D_k\varphi_j(e_1)|^2 \right\} (1-t) + o(t-1), \\ \langle \varphi - \psi, \varphi \rangle &= \sum_{j=2}^N \overline{D_k\varphi_j(e_1)}(D_k\varphi_j(e_1) - D_k\psi_j(e_1))(1-t) \\ &\quad + \frac{1}{2}(D_{kk}\varphi_1(e_1) - D_{kk}\psi_1(e_1))(1-t) + o(1-t). \end{aligned}$$

由于 $z \in \Gamma_2$, $1 - |z|^2 = t(1-t)$, 从而, 当 z 沿着 Γ_2 趋于 e_1 时, $\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}$ 趋于一个有限的正值. 由 (3.1) 可知, $\rho(\varphi, \psi) \rightarrow 0$, 再根据引理 3.2 得 $\frac{\langle \varphi - \psi, \varphi \rangle}{1-|\varphi|^2} \rightarrow 0$ 以及 $\frac{\langle \varphi - \psi, \psi \rangle}{1-|\psi|^2} \rightarrow 0$. 于是有

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^N \overline{D_k\varphi_j(e_1)}(D_k\varphi_j(e_1) - D_k\psi_j(e_1)) + \frac{1}{2}(D_{kk}\varphi_1(e_1) - D_{kk}\psi_1(e_1)) &= 0, \\ \sum_{j=2}^N \overline{D_k\psi_j(e_1)}(D_k\varphi_j(e_1) - D_k\psi_j(e_1)) + \frac{1}{2}(D_{kk}\varphi_1(e_1) - D_{kk}\psi_1(e_1)) &= 0, \end{aligned}$$

也即是

$$\sum_{j=2}^N \overline{D_k\varphi_j(e_1)}(D_k\varphi_j(e_1) - D_k\psi_j(e_1)) = \sum_{j=2}^N \overline{D_k\psi_j(e_1)}(D_k\varphi_j(e_1) - D_k\psi_j(e_1))$$

$$= -\frac{1}{2}(D_{kk}\varphi_1(e_1) - D_{kk}\psi_1(e_1)).$$

根据引理 3.3 即得 $D_k\varphi_j(e_1) = D_k\psi_j(e_1)$, $D_{kk}\varphi_1(e_1) = D_{kk}\psi_1(e_1)$.

第 4 步 证明 $D_{1k}\varphi_1(e_1) = D_{1k}\psi_1(e_1)$ ($2 \leq k \leq N$).

令 $\Gamma_3 \equiv \{z = z_1 e_1 + (z_1 - 1)e_k : 1 - |z|^2 = 2|1 - z_1|^2\}$. 易见

$$\begin{aligned}\varphi_1(z_1 e_1 + (z_1 - 1)e_k) &= 1 + D_1\varphi_1(e_1)(z_1 - 1) + \frac{1}{2}D_{11}\varphi_1(e_1)(z_1 - 1)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}D_{kk}\varphi_1(e_1)(z_1 - 1)^2 + D_{1k}\varphi_1(e_1)(z_1 - 1)^2 + o(|z_1 - 1|^2), \\ \varphi_j(z_1 e_1 + (z_1 - 1)e_k) &= D_1\varphi_j(e_1)(z_1 - 1) + D_k\varphi_j(e_1)(z_1 - 1) + O(|z_1 - 1|^2), \quad 2 \leq j \leq N.\end{aligned}$$

对 ψ 的坐标函数也有类似的展开式, 于是,

$$\begin{aligned}1 - |\varphi(z)|^2 &= 2D_1\varphi_1(e_1)(1 - \operatorname{Re}z_1) - D_1^2\varphi_1(e_1)|z_1 - 1|^2 \\ &\quad - \operatorname{Re}\{[D_{11}\varphi_1(e_1) + D_{kk}\varphi_1(e_1) + 2D_{1k}\varphi_1(e_1)](z_1 - 1)^2\} \\ &\quad - |z_1 - 1|^2 \sum_{j=2}^N |D_1\varphi_j(e_1) + D_k\varphi_j(e_1)|^2 + o(|z_1 - 1|^2)\end{aligned}$$

且

$$\langle \varphi - \psi, \varphi \rangle = [D_{1k}\varphi_1(e_1) - D_{1k}\psi_1(e_1)](z_1 - 1)^2 + o(|z_1 - 1|^2).$$

注意到当 $z \in \Gamma_3$, $1 - |z|^2 = |1 - z_1|^2$. 再由引理 3.1 可知, 当 z 沿着 Γ_3 趋于 e_1 时, $\frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi(z)|^2}$ 趋于一个有穷的极限. 根据紧性条件 (3.1) 以及引理 3.2 可得 $\langle \varphi - \psi, \varphi \rangle / (1 - |\varphi|^2) \rightarrow 0$, 这便推出 $D_{1k}\varphi_1(e_1) = D_{1k}\psi_1(e_1)$.

第 5 步 证明 $D_{kl}\varphi_1(e_1) = D_{kl}\psi_1(e_1)$ ($2 \leq k \neq l \leq N$).

记 $\Gamma_4 \equiv \{z = z_1 e_1 + (z_1 - 1)e_k + (z_1 - 1)e_l : 1 - |z|^2 = 3|1 - z_1|^2\}$. 当 $z \in \Gamma_4$, 显然有 $1 - |z|^2 = |1 - z_1|^2$. 同时, 对于 $2 \leq j \leq N$, 我们有

$$\begin{aligned}\varphi_j[z_1 e_1 + (z_1 - 1)e_k + (z_1 - 1)e_l] &= [D_1\varphi_j(e_1) + D_k\varphi_j(e_1) + D_l\varphi_j(e_1)](z_1 - 1) + O(|z_1 - 1|^2), \\ \varphi_1[z_1 e_1 + (z_1 - 1)e_k + (z_1 - 1)e_l] &= 1 + D_1\varphi_1(e_1)(z_1 - 1) + c(z_1 - 1)^2 + o(|z_1 - 1|^2),\end{aligned}$$

其中

$$c = \frac{1}{2}[D_{11}\varphi_1(e_1) + D_{kk}\varphi_1(e_1) + D_{ll}\varphi_1(e_1)] + D_{1k}\varphi_1(e_1) + D_{1l}\varphi_1(e_1) + D_{kl}\varphi_1(e_1).$$

类似的展开式对 ψ 的坐标函数也成立, 因此,

$$\begin{aligned}\langle \varphi - \psi, \varphi \rangle &= [D_{kl}\varphi_1(e_1) - D_{kl}\psi_1(e_1)](z_1 - 1)^2 + o(|z_1 - 1|^2), \\ 1 - |\varphi(z)|^2 &= 2D_1\varphi_1(e_1)(1 - \operatorname{Re}z_1) - D_1^2\varphi_1(e_1)|z_1 - 1|^2 - 2\operatorname{Re}[c(z_1 - 1)^2] \\ &\quad - |z_1 - 1|^2 \sum_{j=2}^N |D_1\varphi_j(e_1) + D_k\varphi_j(e_1) + D_l\varphi_j(e_1)|^2 + o(|z_1 - 1|^2).\end{aligned}$$

剩下的证明过程与第 4 步类似, 不难得到 $D_{kl}\varphi_1(e_1) = D_{kl}\psi_1(e_1)$, 证毕. $\square$

注 3.2 若 φ 与 ψ 是 B_N 的分式线性映射且 $C_\varphi - C_\psi$ 在 $A_\alpha^2(B_N)$ 上紧, 则通过定理 3.1, 我们容易得出如下结论: 要么 C_φ 与 C_ψ 都是紧的, 要么 $\varphi = \psi$. 这个结果曾在文献 [12, 13] 中被独立证明.

引理 3.4 设 $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ 与 $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ 是 B_N 上的全纯自映射, 并且 $\varphi \in C^3(\overline{B_N})$, $\psi \in C^3(\overline{B_N})$, $\varphi(e_1) = \psi(e_1) = e_1$, $\varphi'(e_1) = \psi'(e_1)$, $D_{ij}\varphi_1(e_1) = D_{ij}\psi_1(e_1)$ ($1 \leq i, j \leq N$). 如果在 e_1 附近存在某个正常数 C 一致地有

$$\frac{|z - e_1|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \leq C, \quad \frac{|z - e_1|^2}{1 - |\psi(z)|^2} \leq C, \quad (3.5)$$

则当 $z \rightarrow e_1$, 有 $\rho(z) \rightarrow 0$.

证明 注意到当 $2 \leq j \leq N$, $D_j\varphi_1(e_1) = 0$. φ 的坐标函数在 e_1 附近有展开式

$$\begin{aligned} \varphi_j(z) &= 1 + D_1\varphi_1(e_1)(z_1 - 1) + \frac{1}{2} \left((z_1 - 1)D_1 + \sum_{k=2}^N z_k D_k \right)^2 \varphi_1(e_1) \\ &\quad + o(|z_1 - 1|^2 + |z'|^2), \quad 2 \leq j \leq N \end{aligned}$$

和

$$\varphi_j(z) = D_1\varphi_j(e_1)(z_1 - 1) + \sum_{k=2}^N D_k\varphi_j(e_1)z_k + O(|z_1 - 1|^2 + |z'|^2).$$

由假设条件可得

$$\langle \varphi(z) - \psi(z), \varphi(z) \rangle = o(|z - e_1|^2).$$

这样, 当 $z \rightarrow e_1$ 时,

$$\frac{|\langle \varphi(z) - \psi(z), \varphi(z) \rangle|}{1 - |\varphi(z)|^2} = \frac{|\langle \varphi(z) - \psi(z), \varphi(z) \rangle|}{|z - e_1|^2} \frac{|z - e_1|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \rightarrow 0.$$

类似地, 也有

$$\lim_{z \rightarrow e_1} \frac{|\langle \varphi(z) - \psi(z), \psi(z) \rangle|}{1 - |\psi(z)|^2} = 0.$$

再由引理 3.2 即知 $\rho(z) \rightarrow 0$. □

在附加一些条件之后, 相对于定理 3.1, 我们有下面的定理.

定理 3.2 设 $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ 与 $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ 是 B_N 上的全纯自映射, 并且 $\varphi \in C^3(\overline{B_N})$, $\psi \in C^3(\overline{B_N})$. 同时假设 $\varphi(e_1) = \psi(e_1) = e_1$, $\psi'(e_1) = \varphi'(e_1)$, $D_{ij}\psi_1(e_1) = D_{ij}\varphi_1(e_1)$ ($1 \leq i, j \leq N$), 且对所有满足条件 $\langle e_1, \tau \rangle = 0$ 的 $\tau \in \partial B_N$ 有 $D_1\varphi_1(e_1) > |D_{\tau\tau}\varphi_1(e_1)|$. 进一步假定 e_1 是满足 $|\varphi(z)| = 1$ ($z \in \overline{B_N}$) 的唯一一点, 同时也是使得 $|\psi(z)| = 1$ 成立的唯一一点. 如果 (3.5) 成立, 则 $C_\varphi - C_\psi$ 在加权 Bergman 空间 $A_\alpha^2(B_N)$ ($\alpha > -1$) 上紧.

证明 由命题 2.1 可知, C_φ 在加权 Bergman 空间上有界. 注意到 $\psi'(e_1) = \varphi'(e_1)$, $D_{ij}\psi_1(e_1) = D_{ij}\varphi_1(e_1)$ ($1 \leq i, j \leq N$), 则对所有满足条件 $\langle e_1, \tau \rangle = 0$ 的 $\tau \in \partial B_N$ 必有 $D_1\psi_1(e_1) > |D_{\tau\tau}\psi_1(e_1)|$, 这表明 C_ψ 也在加权 Bergman 空间上有界. 其次, 当 $z \rightarrow e_1$ 时, 由引理 3.4 可知, $\rho(z) \rightarrow 0$, 于是, (3.1) 成立. 再由注 3.1 我们就可以推出 $C_\varphi - C_\psi$ 在加权 Bergman 空间 $A_\alpha^2(B_N)$ 上紧. □

在定理 3.1 的假设条件下, 我们自然想问: 当 $N \geq k \geq 2$ 时, $D_{ij}\psi_k(e_1) = D_{ij}\varphi_k(e_1)$ ($1 \leq i, j \leq N$) 成立吗? 通过下面的例子我们对此给出否定的回答.

例 3.1 令

$$\varphi(z_1, z_2) = (z_1, 0), \quad \psi(z_1, z_2) = \left(z_1, \frac{z_2^2}{2} \right).$$

显然, φ 与 ψ 是 B_2 的全纯自映射. 而且, $\psi_1 = \varphi_1$, $\varphi(e_1) = \psi(e_1) = e_1$ 以及 $\psi'(e_1) = \varphi'(e_1)$. 容易看到

$$\frac{|z - e_1|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} = \frac{|1 - z_1|^2 + |z_2|^2}{1 - |z_1|^2}$$

在集合 $\Gamma \equiv \{z = (z_1, 0) : 1 - |z_1|^2 = |1 - z_1|^3\}$ 上无界. 另一方面, 当 $|z_1| \rightarrow 1$ 时, $|z_2|^4/(1 - |z_1|^2) < 1 - |z_1|^2 \rightarrow 0$ ($|z_1| \rightarrow 1$), 因此, 我们有

$$\frac{(1 - |\varphi(z)|^2)(1 - |\varphi(z)|^2)}{|1 - \langle \varphi(z), \varphi(z) \rangle|^2} = \frac{1 - |z_1|^2 - \frac{|z_2|^4}{4}}{1 - |z_1|^2} \rightarrow 1.$$

于是, $\rho(z) \rightarrow 0$ ($|z_1| \rightarrow 1$). 这也表明引理 3.4 中的条件 (3.5) 不是必要的. 直接计算可知, $|\psi(z)| = 1$ 当且仅当 $z = (z_1, 0)$, 其中 $|z_1| = 1$. 对于 $\varphi(z)$ 也是如此, 因此 (3.1) 成立. 通过命题 2.1 易验证 C_φ 与 C_ψ 在加权 Bergman 空间上均有界. 再由注 3.1 即知, $C_\varphi - C_\psi$ 在加权 Bergman 空间上紧. 然而, $D_{22}\varphi_2(e_1) = 0 \neq D_{22}\psi_2(e_1) = 1$.

例 3.2 令

$$\varphi(z_1, z_2) = \left(\frac{z_1 + 1}{2}, 0\right), \quad \psi(z_1, z_2) = \left(\frac{z_1 + 1}{2}, \frac{(1 - z_1)^2}{8}\right),$$

则对任何 $z \in B_2$, 我们有

$$1 - |\varphi(z)|^2 = \frac{|1 - z_1|^2}{4} + \frac{1 - |z_1|^2}{2} \geq \frac{|1 - z_1|^2}{4} + \frac{|z_2|^2}{2} \geq \frac{|z - e_1|^2}{4}$$

以及

$$1 - |\psi(z)|^2 = \frac{1 - |z_1|^2}{2} + \frac{|1 - z_1|^2}{4} - \frac{|1 - z_1|^4}{64} \geq \frac{|z_2|^2}{2} + \frac{|1 - z_1|^2}{4} - \frac{|1 - z_1|^2}{16} \geq \frac{3|z - e_1|^2}{16}.$$

显然, φ 与 ψ 是 B_2 的全纯自映射. 另外, $\varphi(e_1) = \psi(e_1) = e_1$, $|\varphi(z)| = 1$ ($|\psi(z)| = 1$) 当且仅当 $z = e_1 = (1, 0)$. 简单计算表明, φ 与 ψ 满足引理 3.4 的所有条件, 因此, 当 $z \rightarrow e_1$ 时, $\rho(z) \rightarrow 0$, 从而 (3.1) 成立. 另一方面, 由命题 2.1 易知, C_φ 与 C_ψ 在加权 Bergman 空间有界. 于是, 由注 3.1 知, $C_\varphi - C_\psi$ 在加权 Bergman 空间上紧. 但是 $D_{11}\varphi_2(e_1) = 0 \neq D_{11}\psi_2(e_1) = 1/4$.

例 3.3 设

$$\varphi(z_1, z_2) = \left(\frac{z_1 + 1}{2}, 0\right), \quad \psi(z_1, z_2) = \left(\frac{z_1 + 1}{2}, \frac{(1 - z_1)z_2}{4}\right),$$

则对任意 $z \in B_2$,

$$1 - |\psi(z)|^2 = \frac{|1 - z_1|^2}{4} + \frac{1 - |z_1|^2}{2} - \frac{|(1 - z_1)z_2|^2}{16} \geq \frac{|1 - z_1|^2}{4} + \frac{|z_2|^2}{2} - \frac{|z_2|^2}{4} = \frac{|z - e_1|^2}{4}.$$

类似于例 3.2 中的讨论, 我们也能推出 $C_\varphi - C_\psi$ 在 $A_\alpha^2(B_2)$ ($\alpha > -1$) 上紧. 但 $D_{12}\varphi_2(e_1) = 0 \neq D_{12}\psi_2(e_1) = -1/4$.

定理 1.1 的证明 显然存在酉矩阵 U 和 V 使得 $e_1 U = \zeta$ 且 $\eta V = e_1$. 令 $\Phi(z) = \varphi(zU)V$, $\Psi(z) = \psi(zU)V$, 则 $\Phi(e_1) = e_1$ 且 $C_\Phi - C_\Psi$ 在 $A_\alpha^2(B_N)$ 上紧. 由定理 3.1 得 $\Psi(e_1) = \Phi(e_1)$, $\Psi'(e_1) = \Phi'(e_1)$ 且 $D_{ij}\Psi_1(e_1) = D_{ij}\Phi_1(e_1)$ ($1 \leq i, j \leq N$). 因为 $\Phi'(z) = \varphi'(zU)UV$, 故 $\psi(\zeta) = \varphi(\zeta)$, $\psi'(\zeta) = \varphi'(\zeta)$. 令 $\varphi_\eta(z) = \langle \varphi(z), \eta \rangle$, 则有

$$\Phi_1(z) = \langle \Phi(z), e_1 \rangle = \langle \varphi(zU)V, e_1 \rangle = \langle \varphi(zU), \eta \rangle = \varphi_\eta(zU).$$

简单计算表明,

$$D_j \Phi_1(z) = D_{e_j U} \varphi_\eta(zU), \quad D_{ij} \Phi_1(z) = D_{e_i U} D_{e_j U} \varphi_\eta(zU).$$

特别地, $D_{ij} \Phi_1(e_1) = D_{e_i U} D_{e_j U} \varphi_\eta(\zeta)$. 这样就有 $D_{11} \Phi_1(e_1) = D_{\zeta \zeta} \varphi_\eta(\zeta)$ 和 $D_{\zeta \zeta} \psi_\eta(\zeta) = D_{\zeta \zeta} \varphi_\eta(\zeta)$. 另一方面, 对任何满足条件 $\langle \zeta, \tau \rangle = 0$ 的 $\tau \in \partial B_N$, 一定存在酉矩阵 U , 使得 $e_1 U = \zeta$ 且 $e_j U = \tau$ ($j > 1$). 于是, 由 $D_{1j} \Phi_1(e_1) = D_{\zeta \tau} \varphi_\eta(\zeta)$ 和 $D_{jj} \Phi_1(e_1) = D_{\tau \tau} \varphi_\eta(\zeta)$ 可得 $D_{\zeta \tau} \psi_\eta(\zeta) = D_{\zeta \tau} \varphi_\eta(\zeta)$ 和 $D_{\tau \tau} \psi_\eta(\zeta) = D_{\tau \tau} \varphi_\eta(\zeta)$. 类似地, 对所有满足条件 $\langle \zeta, \tau \rangle = \langle \zeta, \xi \rangle = \langle \tau, \xi \rangle = 0$ 的 $\tau, \xi \in \partial B_N$, 有 $D_{\tau \xi} \psi_\eta(\zeta) = D_{\tau \xi} \varphi_\eta(\zeta)$. $\square$

定理 3.2 也可一般化, 这里从略. 下面给出 C_φ 与 C_ψ 在 $C(A_\alpha^2(B_N))$ 中属于同一个道路连通分支的必要条件.

定理 3.3 设 $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ 与 $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ 是 B_N 上的全纯自映射. 如果 φ 在点 $\zeta \in \partial B_N$ 处有角导数, 并且 C_φ 与 C_ψ 在 $C(A_\alpha^2(B_N))$ ($\alpha \geq -1$) 中是道路连通的, 则 ψ 在点 ζ 处也有角导数, 并且 $\varphi(\zeta) = \psi(\zeta)$, $d_\varphi(\zeta) = d_\psi(\zeta)$.

证明 不失一般性, 假定 $\zeta = e_1$, φ 在点 e_1 有限制极限 e_1 . 令 $\lambda(z_1) = \varphi_1(z_1, 0')$, $\mu(z_1) = \psi_1(z_1, 0')$. 下面证明 C_λ 与 C_μ 在 $C(A_{\alpha+N-1}^2(D))$ 中道路连通. 由于 C_φ 与 C_ψ 在 $C(A_\alpha^2(B_N))$ 中道路连通, 则存在一个关于 s 连续的复合算子族 C_{φ_s} , $s \in [0, 1]$, 它将 $C_\varphi = C_{\varphi_0}$ 与 $C_\psi = C_{\varphi_1}$ 连接起来, 这里对于每个 s , $\varphi_s = (\varphi_{1s}, \dots, \varphi_{Ns})$ 是 B_N 上的全纯自映射. 令 $\lambda_s(z_1) = \varphi_{1s}(z_1, 0')$, 则我们可以构造 $C(A_{\alpha+N-1}^2(D))$ 中的一个复合算子族 C_{λ_s} ($s \in [0, 1]$), 它满足 $C_\lambda = C_{\lambda_0}$ 且 $C_\mu = C_{\lambda_1}$. 类似于 (3.2) 的证明, 我们有

$$\|C_{\varphi_s} - C_{\varphi_t}\|_{A_\alpha^2(B_N)} \geq \|C_{\lambda_s} - C_{\lambda_t}\|_{A_{\alpha+N-1}^2(D)}, \quad s, t \in [0, 1].$$

由于 $t \rightarrow s$, 有 $\|C_{\varphi_s} - C_{\varphi_t}\|_{A_\alpha^2(B_N)} \rightarrow 0$, 所以, $\|C_{\lambda_s} - C_{\lambda_t}\|_{A_{\alpha+N-1}^2(D)} \rightarrow 0$, 即 C_{λ_s} 关于 s 连续. 这就是说 C_λ 与 C_μ 在 $C(A_{\alpha+N-1}^2(D))$ 中道路连通. 由文献 [2] 的结果, λ 与 μ 在 1 处有相同的非切极限和角导数. 结合引理 2.1 即知定理结论成立. $\square$

在定理 3.3 中, 若要求 φ 与 ψ 充分光滑且 $N \geq 2$, 则 $\varphi'(\zeta) = \psi'(\zeta)$ 成立吗? 下面的例子给出了否定的回答. 这与定理 3.1 形成了鲜明对比, 同时也说明了算子的紧差与其道路连通有很大的不同.

例 3.4 对任意 $f \in A_\alpha^2(B_2)$ ($\alpha > -1$), 有 Taylor 展开式

$$f(z_1, z_2) = \sum_{m_1, m_2} a_m z_1^{m_1} z_2^{m_2}.$$

于是,

$$\|f\|_{A_\alpha^2}^2 = \sum_m \frac{m! \Gamma(N + \alpha + 1)}{\Gamma(N + |m| + \alpha + 1)} |a_m|^2,$$

这里对于多重指标 $m = (m_1, m_2)$, 我们采用标准记号 $|m| = m_1 + m_2$ 以及 $m! = m_1! m_2!$. 令

$$\varphi(z_1, z_2) = \left(z_1, \frac{1}{2} z_2\right), \quad \psi(z_1, z_2) = (z_1, 0).$$

定义单位球 B_2 上的全纯自映射族 $\{\varphi_t\}$ ($0 \leq t \leq 1$),

$$\varphi_t(z_1, z_2) = t\varphi(z_1, z_2) + (1-t)\psi(z_1, z_2) = \left(z_1, \frac{1}{2} t z_2\right).$$

容易看出 $C_{\varphi_t} f \in A_\alpha^2(B_2)$ 且 $\|C_{\varphi_t} f\|_{A_\alpha^2} \leq \|f\|_{A_\alpha^2}$. 进一步地, 对任意 $t, s \in [0, 1]$,

$$\|C_{\varphi_t} f - C_{\varphi_s} f\|_{A_\alpha^2}^2 = \sum_m \frac{m! \Gamma(N + \alpha + 1)}{\Gamma(N + |m| + \alpha + 1)} |a_m|^2 \left| \left(\frac{1}{2} t\right)^{m_2} - \left(\frac{1}{2} s\right)^{m_2} \right|^2.$$

易见存在不依赖 m_2 的正常数 C , 使得

$$\left| \left(\frac{1}{2}t \right)^{m_2} - \left(\frac{1}{2}s \right)^{m_2} \right| \leq C|t-s|.$$

于是, $\|C_{\varphi_t} - C_{\varphi_s}\|_{A_\alpha^2} \leq C|t-s|$. 这表明 C_{φ_t} 关于 t 是连续的, 即 C_φ 与 C_ψ 在 $C(A_\alpha^2(B_2))$ 中道路连通. 然而 $D_2\varphi_2(e_1) = 1/2 \neq D_2\psi_2(e_1) = 0$, 故 $\varphi'(e_1) \neq \psi'(e_1)$.

致谢 感谢审稿人提出的修改意见.

参考文献

- 1 Cowen C, MacCluer B. Composition Operators on Spaces of Analytic Functions. Boca Raton: CRC Press, 1995
- 2 MacCluer B. Components in the space of composition operators. Integral Equations Operator Theory, 1989, 12: 725–738
- 3 Shapiro J, Sundberg C. Isolation amongst the composition operators. Pacific J Math, 1990, 145: 117–152
- 4 Bourdon P. Components of linear-fractional composition operators. J Math Anal Appl, 2003, 279: 228–245
- 5 Moorhouse J, Toews C. Differences of composition operators. Contemp Math, 2003, 321: 207–213
- 6 Moorhouse J. Compact differences of composition operators. J Funct Anal, 2005, 219: 70–92
- 7 Wogen W. The smooth mappings which preserve the Hardy space $H_{B_n}^2$. Oper Theory Adv Appl, 1988, 35: 249–267
- 8 Clahane D. Compact composition operators on weighted Bergman spaces of the unit ball. J Operator Theory, 2001, 45: 335–355
- 9 Cowen C, MacCluer B. Linear fractional maps of the ball and their composition operators. Acta Sci Math (Szeged), 2000, 66: 351–376
- 10 MacCluer B, Weir R. Linear-fractional composition operators in several variables. Integral Equations Operator Theory, 2005, 53: 373–402
- 11 Choe B, Koo H, Park I. Compact differences of composition operators on the Bergman spaces over the ball. Potential Anal, 2014, 40: 81–102
- 12 Heller K, MacCluer B, Weir R. Compact differences of composition operators in several variables. Integral Equations Operator Theory, 2011, 69: 247–268
- 13 Jiang L, Ouyang C. Compact differences of composition operators on holomorphic function spaces in the unit ball. Acta Math Sci, 2011, 31: 1679–1693

Compact differences of composition operators induced by smooth self-maps of the complex unit ball

DAI JiNeng, DENG FangWen & OUYANG CaiHeng

Abstract Let φ and ψ be holomorphic self-maps of the unit ball B_N , which are sufficiently smooth on the sphere ∂B_N . In this paper, the compact differences of composition operators induced by φ and ψ on the weighted Bergman spaces or Hardy spaces are studied. The main result concerning φ and ψ with the same boundary data is a nontrivial generalization of the corresponding results in the case of one complex variable. It reveals the deep connection between the induced maps φ and ψ on the sphere.

Keywords composition operators, compact difference, Bergman space, Hardy space

MSC(2010) 47B33, 32A36

doi: 10.1360/N012015-00144