平面两凸域的 Bonnesen 型对称混合不等式

王鹏富^①, 徐文学^{①③}, 周家足^{①②④*}, 朱保成^①

① 西南大学数学与统计学院, 重庆 400715;

② 凯里学院数学科学学院, 凯里 556011;

③ 西南大学教育学部, 重庆 400715;

④ 黔东南民族职业技术学院, 凯里 556000

E-mail: wpfswu@foxmail.com, xwxjk@163.com, zhoujz@swu.edu.cn, zhubaocheng814@163.com

收稿日期: 2014-04-16; 接受日期: 2014-07-25; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11271302) 和高等学校博士学科点专项科研 (博导类) 基金 (批准号: 20120182110020) 资助项目

摘要 本文利用积分几何中的 Poincaré 运动公式和 Blaschke 运动公式估计平面上两域 K_0 和 K_1 的对称混合等周亏格 $\Delta_2(K_0, K_1)$, 得到了对称混合等周不等式和一些 Bonnesen 型对称混合不等式, 其中一个不等式加强了 Kotlyar 的不等式. 此外我们还得到了一些逆 Bonnesen 型对称混合不等式, 其条件比著名的 Bottema 不等式的弱.

关键词 对称混合等周亏格 对称混合等周不等式 Bonnesen 型对称混合不等式 逆 Bonnesen 型对称混合不等式

MSC (2010) 主题分类 52A10, 52A22

1 引言

设 K 为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的点集, 若对于任意的 $x, y \in K$, 都有 $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), 则 K 称为凸集. K 的凸包 K^* 是所有包含 K 的凸集的交. 两个凸集 K 和 L 的 Minkowski 和定义为

$$K + L = \{x + y : x \in K, y \in L\},$$

凸集 K 的数量积 (scalar product) 定义为

$$\lambda K = \{\lambda x : x \in K, \lambda \geq 0\}.$$

称 $x + \lambda K$ 为凸集 K 的位似, 其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$. 域是具有非空内点的集合, 凸体是紧凸域.

经典的等周问题描述的是: 在平面上所有固定周长的域中, 圆的面积最大. 它的数学表述为

命题 1 (等周不等式) 设 K 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中由简单闭曲线围成的面积为 A 、周长为 P 的域, 则

$$P^2 - 4\pi A \geq 0, \quad (1.1)$$

等号成立当且仅当 K 为圆盘.

经典的等周问题可追溯到古希腊时期, 然而等周不等式的严格的数学证明是在 19 世纪, 人们相信 Euler (1707–1783) 早已解决了经典的等周问题, 可他把功劳归于 Lagrange (1736–1813). Hurwitz 发表

英文引用格式: Wang P F, Xu W X, Zhou J Z, et al. On Bonnesen-style symmetric mixed inequality of two planar convex domains (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 245–254, doi: 10.1360/012014-58

了一个简短的证明, 他用到 Fourier 级数且只要求曲线是可求长的即可而不要求很强的光滑性. 1938 年, Schmidt 把一条光滑的简单闭曲线与一个圆比较并且给出了等周问题的一个优美的直接证明, 他的证明中仅仅用到弧长公式、Green 定理表示的面积公式和 Cauchy-Schwarz 不等式. 有关分析方法的证明可见文献 [1–8], 很多其他简洁而漂亮的证明可见文献 [9–13]. 等周不等式目前已被推广到高维欧氏空间、流形及常曲率平面上 [14–21], 它还被广泛应用于其他数学分支 [12–29].

由 (1.1) 式, 我们可定义 $\mathbb{R}^2$ 中域 K 的等周亏格为

$$\Delta_2(K) = P^2 - 4\pi A. \quad (1.2)$$

$\Delta_2(K)$ 刻画了平面上由简单闭曲线围成的面积为 A 、周长为 P 的域与半径为 $\frac{P}{2\pi}$ 的圆的差别程度.

1921 年, Bonnesen 发现了一系列形如

$$\Delta_2(K) = P^2 - 4\pi A \geq B_K \quad (1.3)$$

的不等式, 其中 B_K 是与 K 相关的非负几何量, 当且仅当 K 为圆盘时 B_K 等于 0.

这类不等式是等周不等式的加强, 称为 Bonnesen 型不等式 [30–37]. 最著名的是如下的 Bonnesen 等周不等式:

命题 2 设 K 为 $\mathbb{R}^2$ 中由简单闭曲线围成的面积为 A 、周长为 P 的域, 则

$$P^2 - 4\pi A \geq \pi^2(R - r)^2, \quad (1.4)$$

其中 r 和 R 分别为 K 的最大内接圆半径和最小外接圆半径, 等号成立当且仅当 K 为圆盘.

设 K 为 $\mathbb{R}^2$ 中由简单闭曲线围成的面积为 A 、周长为 P 的域, 由于它的凸包 K^* 的面积 A^* 、周长 P^* 满足 $A^* \geq A$, $P^* \leq P$, 则 $P^2 - 4\pi A \geq P^{*2} - 4\pi A^*$, 即 $\Delta_2(K) \geq \Delta_2(K^*)$. 因此在 $\mathbb{R}^2$ 中, 如果等周不等式和 Bonnesen 型不等式对于凸域成立, 则对所有的域都成立.

与 Bonnesen 型不等式相应的是逆 Bonnesen 型不等式, 即

$$\Delta_2(K) = P^2 - 4\pi A \leq U_K, \quad (1.5)$$

其中 U_K 是与 K 相关的非负几何量, 当且仅当 K 为圆盘时 U_K 等于 0.

人们对等周亏格的研究有很长的历史, 以前的工作主要是下界的估计 [25], 但等周亏格上界的研究结果却很少 [28, 29, 33, 34, 38].

1933 年, 对边界至少 C^2 光滑的严格凸域 K , 即边界 ∂K 的曲率 $\kappa > 0$, Bottema [5] 得到如下的一个著名的上界:

命题 3 设 K 为 $\mathbb{R}^2$ 中边界 ∂K 至少 C^2 光滑的严格凸域, 其面积为 A 、周长为 P . 记 ρ_m 和 ρ_M 分别为 K 的边界 ∂K 的曲率半径 ρ 的最小值和最大值, 则

$$P^2 - 4\pi A \leq \pi^2(\rho_M - \rho_m)^2, \quad (1.6)$$

等号成立当且仅当 $\rho_M = \rho_m$, 即 K 为圆盘.

1955 年, Pleijel [22] 加强了 Bottema 的结果.

命题 4 设 K 为 $\mathbb{R}^2$ 中边界 ∂K 至少 C^2 光滑的严格凸域, 其面积为 A 、周长为 P . 记 ρ_m 和 ρ_M 分别为 K 的边界 ∂K 的曲率半径 ρ 的最小值和最大值, 则

$$P^2 - 4\pi A \leq \pi(4 - \pi)(\rho_M - \rho_m)^2, \quad (1.7)$$

等号成立当且仅当 $\rho_M = \rho_m$, 即 K 为圆盘.

Howard, Gao, Pan 等人用分析及曲率流的方法得到一些逆 Bonnesen 型不等式 [39–42].

命题 5 设 K 为 $\mathbb{R}^2$ 中边界 ∂K 至少 C^2 光滑的严格凸域, 其面积为 A 、周长为 P . $\tilde{K}$ 是由 K 的边界 ∂K 的曲率中心的轨迹所围成的域, 其面积为 $\tilde{A}$. 则 [42, 43]

$$P^2 - 4\pi A \leq c|\tilde{A}|, \quad (1.8)$$

其中 c 是一个常数, 等号成立当且仅当 K 是一个圆盘, 即 $\tilde{K}$ 是一个点.

命题 5 中的 $\tilde{A}$ 可能非正. 文献 [35] 给出了一些常曲率曲面中的逆 Bonnesen 型不等式, 最新的结果由 Zhou 等人 [38, 44, 45] 得到.

设 K_k ($k = 0, 1$) 为 $\mathbb{R}^2$ 中由简单闭曲线围成的面积为 A_k 、周长为 P_k 的域, 则 K_0 和 K_1 的对称混合等周亏格 $\Delta_2(K_0, K_1)$ 定义为

$$\Delta_2(K_0, K_1) = P_0^2 P_1^2 - 16\pi^2 A_0 A_1. \quad (1.9)$$

受 Schmidt 将简单闭曲线与圆比较的思想的启发, 我们将直接比较两个由简单闭曲线围成的域 K_0 和 K_1 . 本文中, 我们利用积分几何中的 Poincaré 运动公式和 Blaschke 运动公式估计平面上两域 K_0 和 K_1 的对称混合等周亏格 $\Delta_2(K_0, K_1)$, 得到了对称混合等周不等式 (推论 2) 和一些 Bonnesen 型对称混合不等式 (定理 3 和 4), 这些 Bonnesen 型对称混合不等式是 Bonnesen 型不等式的推广. 特别地, 其中有一个结果 (定理 3) 加强了 Kotlyar 的不等式 (推论 3). 此外我们还得到了一些逆 Bonnesen 型对称混合不等式 (定理 5 和 6), 其条件比 Bottema 的严格凸的条件弱.

2 包含测度和 Bonnesen 型对称混合不等式

设 K_k ($k = 0, 1$) 为 $\mathbb{R}^2$ 中由简单闭曲线围成的面积为 A_k 、周长为 P_k 的域, G_2 为 $\mathbb{R}^2$ 中的刚体运动群 [2, 20, 24], dg 为 G_2 的运动密度, 则 Poincaré 运动公式可表示为

$$\int_{\{g \in G_2: \partial K_0 \cap \partial(t(gK_1)) \neq \emptyset\}} n\{\partial K_0 \cap \partial(t(gK_1))\} dg = 4tP_0P_1, \quad (2.1)$$

其中 $n\{\partial K_0 \cap \partial(t(gK_1))\}$ 为 $\partial K_0 \cap \partial(t(gK_1))$ 的交点数.

设 $\chi(K_0 \cap t(gK_1))$ 为 $K_0 \cap t(gK_1)$ 的 Euler-Poincaré 示性数, 则 Blaschke 运动公式可表示为

$$\int_{\{g \in G_2: K_0 \cap t(gK_1) \neq \emptyset\}} \chi(K_0 \cap t(gK_1)) dg = 2\pi(t^2 A_0 + A_1) + tP_0P_1. \quad (2.2)$$

若记 μ 为所有使得 $t(gK_1) \subset K_0$ 或 $t(gK_1) \supset K_0$ 的 g 的集合, 即 $\mu = \{g \in G_2: t(gK_1) \subset K_0 \text{ 或 } t(gK_1) \supset K_0\}$, 则 (2.2) 式可写成

$$\int_{\mu} dg + \int_{\{g \in G_2: \partial K_0 \cap \partial(t(gK_1)) \neq \emptyset\}} \chi(K_0 \cap t(gK_1)) dg = 2\pi(t^2 A_1 + A_0) + tP_0P_1. \quad (2.3)$$

当 $\partial K_0 \cap \partial(t(gK_1)) \neq \emptyset$ 时, $K_0 \cap t(gK_1)$ 的每一连通分支的边界至少由 ∂K_0 和 $\partial(t(gK_1))$ 的一段弧组成, 因此 $\chi(K_0 \cap t(gK_1)) \leq n\{\partial K_0 \cap \partial(t(gK_1))\}/2$. 由 Poincaré 运动公式 (2.1) 和 Blaschke 运动公式 (2.3) 立即可得

$$\int_{\mu} dg \geq 2\pi A_1 t^2 - P_0 P_1 t + 2\pi A_0. \quad (2.4)$$

由不等式 (2.4) 立即可得一域包含另一域的充分条件 [46]:

引理 1 设 K_k ($k = 0, 1$) 为 $\mathbb{R}^2$ 中由简单闭曲线围成的面积为 A_k 、周长为 P_k 的域, 则 tK_1 包含或包含于 K_0 的一个充分条件是

$$2\pi A_1 t^2 - P_0 P_1 t + 2\pi A_0 > 0. \quad (2.5)$$

此外, 如果 $t^2 A_1 \geq A_0$, 则 tK_1 包含 K_0 .

令 $t_m = \max\{t : t(gK_1) \subseteq K_0; g \in G_2\}$, $t_M = \min\{t : t(gK_1) \supseteq K_0; g \in G_2\}$, 显然有 $t_m \leq t_M$ (图 1). 因此, 若 $t \in [t_m, t_M]$, 则 tK_1 既不包含也不包含于 K_0 , 即 $\int_{\mu} dg = 0$, 由不等式 (2.5) 得 [45, 46]:

定理 1 设 K_k ($k = 0, 1$) 为 $\mathbb{R}^2$ 中由简单闭曲线围成的面积为 A_k 、周长为 P_k 的域, 其中 K_1 为凸域, 则

$$2\pi A_1 t^2 - P_0 P_1 t + 2\pi A_0 \leq 0; \quad t \in [t_m, t_M], \quad (2.6)$$

等号成立当且仅当 K_0 和 K_1 为圆盘.

设 K_1 为单位圆盘, 立即得到著名的 Bonnesen 不等式 [4, 19, 24, 34]:

推论 1 设 K 为 $\mathbb{R}^2$ 中由简单闭曲线围成的面积为 A 、周长为 P 的域, 记 r 和 R 分别为 K 的最大内接圆半径和最小外接圆半径, 则

$$\pi t^2 - Pt + A \leq 0; \quad t \in [r, R], \quad (2.7)$$

等号成立当且仅当 K 为圆盘.

我们考虑多项式:

$$B_{K_0, K_1}(t) = 2\pi A_1 t^2 - P_0 P_1 t + 2\pi A_0. \quad (2.8)$$

显然 $B_{K_0, K_1}(0) > 0$ 和 $B_{K_0, K_1}(+\infty) > 0$. 不等式 (2.6) 保证了方程 $B_{K_0, K_1}(t) = 0$ 存在实根, 即该方程的根的判别式非负. 因此我们得到如下的对称混合等周不等式:

推论 2 设 K_k ($k = 0, 1$) 为 $\mathbb{R}^2$ 中由简单闭曲线围成的面积为 A_k 、周长为 P_k 的域, 则

$$P_0^2 P_1^2 - 16\pi^2 A_0 A_1 \geq 0, \quad (2.9)$$

等号成立当且仅当 K_0 和 K_1 为圆盘.

图 1 $t_m(gK_1)$ 和 $t_M(gK_1)$

受 Bonnesen 型不等式的启发, 我们考虑是否存在一个与 K_0 和 K_1 相关的几何量 B_{K_0, K_1} , 使得

$$P_0^2 P_1^2 - 16\pi^2 A_0 A_1 \geq B_{K_0, K_1}. \quad (2.10)$$

当且仅当 K_0 和 K_1 为圆盘时 B_{K_0, K_1} 等于 0. 我们称这类不等式为 Bonnesen 型对称混合不等式.

设 K_k ($k = 0, 1$) 为 $\mathbb{R}^2$ 中由简单闭曲线围成的面积为 A_k 、周长为 P_k 的域, 由于它们的凸包 K_k^* 的面积 A_k^* 、周长 P_k^* 满足 $A_k^* \geq A_k$, $P_k^* \leq P_k$, 则 $P_0^2 P_1^2 - 16\pi^2 A_0 A_1 \geq P_0^{*2} P_1^{*2} - 16\pi^2 A_0^* A_1^*$, 即 $\Delta_2(K_0, K_1) \geq \Delta_2(K_0^*, K_1^*)$. 因此在 $\mathbb{R}^2$ 中, 如果对称混合等周不等式和 Bonnesen 型对称混合不等式对于凸域成立, 则对所有的域都成立. 因此从现在起, 我们可假设所考虑的域均为凸域.

为了得到 Bonnesen 型对称混合不等式, 我们需要如下结果:

引理 2 设 K_k ($k = 0, 1$) 为 $\mathbb{R}^2$ 中面积为 A_k 、周长为 P_k 的凸域, 则

$$t_m \leq \frac{4\pi A_0}{P_0 P_1} \leq \sqrt{\frac{A_0}{A_1}} \leq \frac{P_0 P_1}{4\pi A_1} \leq t_M, \quad (2.11)$$

其中每一个等号成立当且仅当 K_0 和 K_1 为圆盘.

证明 由对称混合等周不等式 $P_0^2 P_1^2 - 16\pi^2 A_0 A_1 \geq 0$, 可以直接得到

$$\frac{4\pi A_0}{P_0 P_1} \leq \sqrt{\frac{A_0}{A_1}} \leq \frac{P_0 P_1}{4\pi A_1},$$

其中每一个等号成立当且仅当 K_0 和 K_1 为圆盘.

设 p_k ($k = 0, 1$) 为 K_k 的支持函数, s_{K_k} 为 ∂K_k 的弧长参数, 则 K_k 的周长 P_k , 面积 A_k 可分别表示为

$$A_k = \frac{1}{2} \int_{\partial K_k} p_k ds_{K_k}, \quad P_k = \int_{\partial K_k} ds_{K_k}.$$

由 $K_0 \supseteq t_m K_1$ 和 $K_0 \subseteq t_M K_1$, 得到 $p_0 \geq t_m p_1$ 和 $p_0 \leq t_M p_1$. 因此

$$4\pi A_0 = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\partial K_0} p_0 ds_{K_0} \right) d\theta \geq \int_0^{2\pi} \left(\int_{\partial K_0} t_m p_1 ds_{K_0} \right) d\theta = t_m P_0 P_1.$$

这个不等式中的等号成立当且仅当 $p_0 = t_m p_1$, 即 $K_0 = t_m K_1$. 立即得 $4\pi A_0 = t_m P_0 P_1 = P_0^2$, 即 K_0 和 K_1 均为圆盘.

又因为

$$4\pi A_1 = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\partial K_1} p_1 ds_{K_1} \right) d\theta \geq \int_0^{2\pi} \left(\int_{\partial K_1} \frac{1}{t_M} p_0 ds_{K_1} \right) d\theta = \frac{1}{t_M} P_0 P_1.$$

这个不等式中的等号成立当且仅当 $p_1 = \frac{1}{t_M} p_0$, 即 $K_1 = \frac{1}{t_M} K_0$. 因此得到 $4\pi A_1 = \frac{1}{t_M} P_0 P_1 = P_1^2$, 即 K_0 和 K_1 均为圆盘.

引理 2 证毕. □

引理 3 设 K_k ($k = 0, 1$) 为 $\mathbb{R}^2$ 中面积为 A_k 、周长为 P_k 的凸域, 则

$$\frac{P_0 P_1 - \sqrt{\Delta_2(K_0, K_1)}}{4\pi A_1} \leq t_m \leq t_M \leq \frac{P_0 P_1 + \sqrt{\Delta_2(K_0, K_1)}}{4\pi A_1}, \quad (2.12)$$

当 K_0 和 K_1 为圆盘时每一个等号都成立.

证明 方程 $B_{K_0, K_1}(t) = 2\pi A_1 t^2 - P_0 P_1 t + 2\pi A_0 = 0$ 的两个根可分别表示为

$$\frac{P_0 P_1 - \sqrt{\Delta_2(K_0, K_1)}}{4\pi A_1}, \quad \frac{P_0 P_1 + \sqrt{\Delta_2(K_0, K_1)}}{4\pi A_1}.$$

由 (2.6) 式我们立即得到

$$\frac{P_0 P_1 - \sqrt{\Delta_2(K_0, K_1)}}{4\pi A_1} \leq t_m \leq t_M \leq \frac{P_0 P_1 + \sqrt{\Delta_2(K_0, K_1)}}{4\pi A_1}.$$

引理 3 证毕. □

由引理 2 和 3, 可得到本文的主要定理:

定理 2 设 K_k ($k = 0, 1$) 为 $\mathbb{R}^2$ 中面积为 A_k 、周长为 P_k 的凸域, 则

$$\frac{\sqrt{\Delta_2(K_0, K_1)}}{4\pi A_1} \geq t_M - \frac{P_0 P_1}{4\pi A_1} \geq 0; \quad \frac{\sqrt{\Delta_2(K_0, K_1)}}{4\pi A_1} \geq \frac{P_0 P_1}{4\pi A_1} - t_m \geq 0. \quad (2.13)$$

由不等式 (2.13) 我们可得到一些新的 Bonnesen 型对称混合不等式.

定理 3 设 K_k ($k = 0, 1$) 为 $\mathbb{R}^2$ 中面积为 A_k 、周长为 P_k 的凸域, 则

$$P_0^2 P_1^2 - 16\pi^2 A_0 A_1 \geq 8\pi^2 A_1^2 \left[\left(t_M - \frac{P_0 P_1}{4\pi A_1} \right)^2 + \left(\frac{P_0 P_1}{4\pi A_1} - t_m \right)^2 \right], \quad (2.14)$$

当 K_0 和 K_1 为圆盘时等号成立.

证明 由不等式 $\left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \max\{a, b\}$ (其中 $a \geq 0, b \geq 0$) 和不等式 (2.13), 我们立即得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\left(t_M - \frac{P_0 P_1}{4\pi A_1} \right)^2 + \left(\frac{P_0 P_1}{4\pi A_1} - t_m \right)^2 \right] &\leq \left(\max \left\{ \left(t_M - \frac{P_0 P_1}{4\pi A_1} \right), \left(\frac{P_0 P_1}{4\pi A_1} - t_m \right) \right\} \right)^2 \\ &\leq \frac{\Delta_2(K_0, K_1)}{(4\pi A_1)^2}, \end{aligned}$$

即 (2.14) 式, 定理 3 证毕. □

定理 4 设 K_k ($k = 0, 1$) 为 $\mathbb{R}^2$ 中面积为 A_k 、周长为 P_k 的凸域, 则

$$P_0^2 P_1^2 - 16\pi^2 A_0 A_1 \geq 16\pi^2 A_1^2 \left(t_M - \frac{P_0 P_1}{4\pi A_1} \right) \left(\frac{P_0 P_1}{4\pi A_1} - t_m \right), \quad (2.15)$$

当 K_0 和 K_1 为圆盘时等号成立.

证明 由不等式 (2.13) 和不等式 $ab \geq cd$ (其中 $a \geq c \geq 0, b \geq d \geq 0$), 我们立即得到

$$\frac{\Delta_2(K_0, K_1)}{(4\pi A_1)^2} \geq \left(t_M - \frac{P_0 P_1}{4\pi A_1} \right) \left(\frac{P_0 P_1}{4\pi A_1} - t_m \right),$$

即 $\Delta_2(K_0, K_1) \geq 16\pi^2 A_1^2 (t_M - \frac{P_0 P_1}{4\pi A_1})(\frac{P_0 P_1}{4\pi A_1} - t_m)$, 定理 4 证毕. □

把不等式 (2.13) 中的 $\frac{\sqrt{\Delta_2(K_0, K_1)}}{4\pi A_1} \geq t_M - \frac{P_0 P_1}{4\pi A_1}$ 和 $\frac{\sqrt{\Delta_2(K_0, K_1)}}{4\pi A_1} \geq \frac{P_0 P_1}{4\pi A_1} - t_m$ 的左右两边相加, 可得到如下的 Kotlyar 的不等式 [16, 46]:

推论 3 设 K_k ($k = 0, 1$) 为 $\mathbb{R}^2$ 中面积为 A_k 、周长为 P_k 的凸域, 则

$$P_0^2 P_1^2 - 16\pi^2 A_0 A_1 \geq 4\pi^2 A_1^2 (t_M - t_m)^2, \quad (2.16)$$

当 K_0 和 K_1 为圆盘时等号成立.

注 1 由不等式 $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \geq 2ab$ (其中 $a \geq 0, b \geq 0$), 有

$$\begin{aligned} 8\pi^2 A_1^2 \left[\left(t_M - \frac{P_0 P_1}{4\pi A_1} \right)^2 + \left(\frac{P_0 P_1}{4\pi A_1} - t_m \right)^2 \right] &\geq 4\pi^2 A_1^2 (t_M - t_m)^2 \\ &\geq 16\pi^2 A_1^2 \left(t_M - \frac{P_0 P_1}{4\pi A_1} \right) \left(\frac{P_0 P_1}{4\pi A_1} - t_m \right). \end{aligned}$$

因此我们的对称混合等周亏格的下界 $8\pi^2 A_1^2 [(t_M - \frac{P_0 P_1}{4\pi A_1})^2 + (\frac{P_0 P_1}{4\pi A_1} - t_m)^2]$ 强于 Kotlyar 的对称混合等周亏格的下界 $4\pi^2 A_1^2 (t_M - t_m)^2$, 即我们的 Bonnesen 型对称混合不等式 (2.14) 比 Kotlyar 的 Bonnesen 型对称混合不等式 (2.16) 好.

3 逆 Bonnesen 型对称混合不等式

我们考虑逆 Bonnesen 型对称混合不等式, 即

$$\Delta_2(K_0, K_1) = P_0^2 P_1^2 - 16\pi^2 A_0 A_1 \leq U_{K_0, K_1}, \quad (3.1)$$

其中 U_{K_0, K_1} 是与 K_0 和 K_1 相关的非负几何量, 当且仅当 K_0 和 K_1 为圆盘时 U_{K_0, K_1} 等于 0.

为了得到两凸域 K_0 和 K_1 的对称混合等周亏格 $\Delta_2(K_0, K_1)$ 的上界 U_{K_0, K_1} , 我们需要如下的引理 [44, 47]:

引理 4 设 K 为 $\mathbb{R}^2$ 中面积为 A 、周长为 P 的凸域, 记 r 和 R 分别为 K 的最大内接圆半径和最小外接圆半径, 则

$$r \leq \frac{2A}{P} \leq \sqrt{\frac{A}{\pi}} \leq \frac{P}{2\pi} \leq R. \quad (3.2)$$

当 K 为圆盘时第一个等号成立, 其他的每一个等号成立当且仅当 K 为圆盘.

引理 5 设 K_k ($k = 0, 1$) 为 $\mathbb{R}^2$ 中面积为 A_k 、周长为 P_k 的凸域, 记 r_k 和 R_k 分别为 K_k 的最大内接圆半径和最小外接圆半径, 则

$$r_0 r_1 \leq \frac{4A_0 A_1}{P_0 P_1} \leq \sqrt{\frac{A_0 A_1}{\pi^2}} \leq \frac{P_0 P_1}{4\pi^2} \leq R_0 R_1. \quad (3.3)$$

当 K_0 和 K_1 为圆盘时第一个等号成立, 其他的每一个等号成立当且仅当 K_0 和 K_1 为圆盘.

证明 对称混合等周不等式 $P_0^2 P_1^2 - 16\pi^2 A_0 A_1 \geq 0$ 等价于不等式

$$\frac{4A_0 A_1}{P_0 P_1} \leq \sqrt{\frac{A_0 A_1}{\pi^2}} \leq \frac{P_0 P_1}{4\pi^2},$$

其中每一个等号成立当且仅当 K_0 和 K_1 为圆盘.

不等式 (3.3) 中的第一个和最后一个不等式及等号成立的条件可由引理 4 直接得到.

引理 5 证毕. □

由引理 5 中的不等式

$$r_0 r_1 \leq \frac{4A_0 A_1}{P_0 P_1} \leq \frac{P_0 P_1}{4\pi^2} \leq R_0 R_1$$

及等号成立的条件可得

$$P_0^2 P_1^2 - 16\pi^2 A_0 A_1 \leq 4\pi^2 P_0 P_1 (R_0 R_1 - r_0 r_1).$$

即我们得到如下的逆 Bonnesen 型对称混合不等式.

定理 5 设 K_k ($k = 0, 1$) 为 $\mathbb{R}^2$ 中面积为 A_k 、周长为 P_k 的凸域, 记 r_k 和 R_k 分别为 K_k 的最大内接圆半径和最小外接圆半径, 则

$$P_0^2 P_1^2 - 16\pi^2 A_0 A_1 \leq 4\pi^2 P_0 P_1 (R_0 R_1 - r_0 r_1), \quad (3.4)$$

等号成立当且仅当 K_0 和 K_1 为圆盘.

定理 6 设 K_k ($k = 0, 1$) 为 $\mathbb{R}^2$ 中面积为 A_k 、周长为 P_k 的凸域, 记 r_k 和 R_k 分别为 K_k 的最大内接圆半径和最小外接圆半径, 则

$$P_0^2 P_1^2 - 16\pi^2 A_0 A_1 \leq \frac{\pi^2 P_0^2 P_1^2}{A_0 A_1} (R_0^2 R_1^2 - r_0^2 r_1^2), \quad P_0^2 P_1^2 - 16\pi^2 A_0 A_1 \leq 16\pi^4 (R_0^2 R_1^2 - r_0^2 r_1^2), \quad (3.5)$$

其中每一个等号成立当且仅当 K_0 和 K_1 为圆盘.

证明 由引理 5 中的不等式

$$r_0 r_1 \leq \frac{4A_0 A_1}{P_0 P_1} \leq \sqrt{\frac{A_0 A_1}{\pi^2}} \leq R_0 R_1$$

及等号成立的条件可得

$$P_0^2 P_1^2 - 16\pi^2 A_0 A_1 \leq \frac{\pi^2 P_0^2 P_1^2}{A_0 A_1} (R_0^2 R_1^2 - r_0^2 r_1^2).$$

由引理 5 中的不等式

$$r_0 r_1 \leq \sqrt{\frac{A_0 A_1}{\pi^2}} \leq \frac{P_0 P_1}{4\pi^2} \leq R_0 R_1$$

及等号成立的条件, 我们得到

$$P_0^2 P_1^2 - 16\pi^2 A_0 A_1 \leq 16\pi^4 (R_0^2 R_1^2 - r_0^2 r_1^2).$$

定理 6 证毕. □

注 2 由对称混合等周不等式 $P_0^2 P_1^2 - 16\pi^2 A_0 A_1 \geq 0$, 我们有

$$16\pi^4 (R_0^2 R_1^2 - r_0^2 r_1^2) \leq \frac{\pi^2 P_0^2 P_1^2}{A_0 A_1} (R_0^2 R_1^2 - r_0^2 r_1^2).$$

因此定理 6 中的第二个上界比第一个强. 对于任意 $\mathbb{R}^2$ 中周长为 P 的凸域 K 都有 $P \leq 2\pi R$, 其中 R 表示 K 的最小外接圆半径, 则

$$\begin{aligned} 4\pi^2 P_0 P_1 (R_0 R_1 - r_0 r_1) &\leq 16\pi^4 R_0 R_1 (R_0 R_1 - r_0 r_1) \\ &\leq 16\pi^4 (R_0 R_1 + r_0 r_1) (R_0 R_1 - r_0 r_1) \\ &= 16\pi^4 (R_0^2 R_1^2 - r_0^2 r_1^2). \end{aligned}$$

因此定理 5 中的对称混合等周亏格的上界 $4\pi^2 P_0 P_1 (R_0 R_1 - r_0 r_1)$ 比定理 6 中的两个上界强.

取 K_1 为单位圆盘, 这些逆 Bonnesen 型对称混合不等式为如下的由 Bokowski, Heil, Zhou 和 Ren 得到的逆 Bonnesen 型不等式 [3, 44, 45]:

推论 4 设 K 为 $\mathbb{R}^2$ 中面积为 A 、周长为 P 的凸域, 记 r 和 R 分别为 K 的最大内接圆半径和最小外接圆半径, 则

$$\begin{aligned} P^2 - 4\pi A &\leq 2\pi P(R - r), \\ P^2 - 4\pi A &\leq 4\pi^2(R^2 - r^2), \\ P^2 - 4\pi A &\leq \frac{\pi P^2}{A}(R^2 - r^2), \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中每一个等号成立当且仅当 K 为圆盘.

注 3 本文所得到的逆 Bonnesen 型对称混合不等式及其推论 (逆 Bonnesen 型不等式) 不限制边界是否严格凸, 即不要求其边界是曲率 $\kappa > 0$ 的卵形线, 但用分析及曲率流的方法证明等周不等式及逆 Bonnesen 型不等式时, 严格凸是必须的.

致谢 作者衷心感谢对本文提出宝贵意见和建议的审稿专家和编委.

参考文献

- 1 Banchoff T, Pohl W. A generalization of the isoperimetric inequality. *J Diff Geom*, 1971, 6: 175–213
- 2 Blaschke W. *Vorlesungen über Integral Geometrie*, 3rd ed. Berlin: Deutsch Verlag Wiss, 1955
- 3 Bokowski J, Heil E. Integral representation of quermassintegrals and Bonnesen-style inequalities. *Arch Math*, 1986, 4: 79–89
- 4 Bonnesen T. *Les Problèmes Des Isopérimètres Et Des Isephanes*. Paris: Gauthier-Villars et Cie, 1929
- 5 Bottema O. Eine obere Grenze für das isoperimetrische Defizit ebener Kurven. *Nederl Akad Wetensch Proc*, 1933, 66: 442–446
- 6 Burago Yu D, Zalgaller V A. *Geometric Inequalities*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1988
- 7 Diskant V. A generalization of Bonnesen's inequalities. *Soviet Math Dokl*, 1973, 14: 1728–1731
- 8 Enomoto K. A generalization of the isoperimetric inequality on S^2 and flat tori in S^3 . *Proc Amer Math Soc*, 1994, 120: 553–558
- 9 Grinberg E, Li S, Zhang G, et al. *Integral Geometry and Convexity*. Proceedings of the International Conference. Wuhan: World Scientific, 2006
- 10 Gysin L. The isoperimetric inequality for nonsimple closed curves. *Proc Amer Math Soc*, 1993, 118: 197–203
- 11 Hadwiger H. Die isoperimetrische Ungleichung in Raum. *Elemente Math*, 1948, 3: 25–38
- 12 Stone A. On the isoperimetric inequality on a minimal surface. *Calc Var Partial Diff Equations*, 2003, 17: 369–391
- 13 Tang D. Discrete Wirtinger and isoperimetric type inequalities. *Bull Austral Math Soc*, 1991, 43: 467–474
- 14 Howard R. The sharp Sobolev inequality and the Banchoff-Pohl inequality on surfaces. *Proc Amer Math Soc*, 1998, 126: 2779–2787
- 15 Hsiung C C. Isoperimetric inequalities for two-dimensional Riemannian manifolds with boundary. *Ann Math*, 1961, 73: 213–220
- 16 Kotlyar B D. On a geometric inequality. *Ukrainskii Geometricheskii Sbornik*, 1987, 30: 49–52
- 17 Ku H, Ku M, Zhang X. Isoperimetric inequalities on surfaces of constant curvature. *Canadian J Math*, 1997, 49: 1162–1187
- 18 Li M, Zhou J. An isoperimetric deficit upper bound of the convex domain in a surface of constant curvature. *Sci China Math*, 2010, 53: 1941–1946
- 19 Osserman R. The isoperimetric inequality. *Bull Amer Math Soc*, 1978, 84: 1182–1238
- 20 Teufel E. Isoperimetric inequalities for closed curves in spaces of constant curvature. *Results Math*, 1992, 22: 622–630
- 21 Wei S, Zhu M. Sharp isoperimetric inequalities and sphere theorems. *Pacific J Math*, 2005, 220: 183–195
- 22 Pleijel A. On konvexa kurvor. *Nordisk Math Tidskr*, 1955, 3: 57–64
- 23 Polya G, Szegő G. *Isoperimetric inequalities in Mathematical Physics*. Ann Math Studies. Princeton NJ: Princeton University Press, 1951
- 24 Santaló L A. *Integral Geometry and Geometric Probability*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1976
- 25 Schneider R. *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993
- 26 Weiner J L. Isoperimetric inequalities for immersed closed spherical curves. *Proc Amer Math Soc*, 1994, 120: 501–506

- 27 Yau S T. Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact manifold. *Ann Sci Ec Norm Super*, 1975, 8: 487–507
- 28 Zhang G, Zhou J. Containment measures in integral geometry. *Integral Geometry and Convexity*. Singapore: World Scientific, 2006. 153–168
- 29 Zhang X-M. Schur-convex functions and isoperimetric inequalities. *Proc Amer Math Soc*, 1998, 126: 461–470
- 30 Osserman R. Bonnesen-style isoperimetric inequality. *Amer Math Monthly*, 1979, 86: 1–29
- 31 Teufel E. A generalization of the isoperimetric inequality in the hyperbolic plane. *Arch Math*, 1991, 57: 508–513
- 32 Weiner J L. A generalization of the isoperimetric inequality on the 2-sphere. *Indiana Univ Math J*, 1974, 24: 243–248
- 33 Zhang X-M. Bonnesen-style inequalities and Pseudo-perimeters for polygons. *J Geom*, 1997, 60: 188–201
- 34 周家足. 平面 Bonnesen 型不等式. *数学学报*, 2007, 50: 1397–1402
- 35 Zhou J, Xia Y, Zeng C. Some New Bonnesen-style inequalities. *J Korean Math Soc*, 2011, 48: 421–430
- 36 Zhou J, Du Y, Cheng F. Some Bonnesen-style inequalities for higher dimensions. *Acta Math Sin*, 2012, 28: 2561–2568
- 37 曾春娜, 周家足, 岳双珊. 两平面凸域的对称混合等周不等式. *数学学报*, 2012, 55: 355–362
- 38 Xia Y, Xu W, Zhou J, et al. Reverse Bonnesen style inequalities in a surface X_c^2 of constant curvature. *Sci China Math*, 2013, 56: 1145–1154
- 39 Gao X. A note on the reverse isoperimetric inequality. *Results Math*, 2011, 59: 83–90
- 40 Gao X. A new reverse isoperimetric inequality and its stability. *Math Ineq Appl*, 2012, 15: 733–743
- 41 Hadwiger H. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Berlin: Springer, 1957
- 42 Pan S, Tang X, Wang X. A refined reverse isoperimetric inequality in the plane. *Math Ineq Appl*, 2010, 13: 329–338
- 43 Pan S, Zhang H. A reverse isoperimetric inequality for closed strictly convex plane curves. *Beiträge zur Alg und Geo*, 2007, 48: 303–308
- 44 周家足, 任德麟. 从积分几何的观点看几何不等式. *数学物理学报*, 2010, 30: 1322–1339
- 45 Zhou J, Ma L, Xu W. On The Isoperimetric Deficit Upper Limit. *Bull Korean Math Soc*, 2013, 50: 175–184
- 46 Xu W, Zhou J, Zhu B. On conteiment measure and the mixed isoperimetric inequality. *J Ineq Appl*, 2013, 11: 1–11
- 47 Zhou J, Zhou C, Ma F. Isoperimetric deficit upper limit of a planar convex set. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (Serie II, Suppl)*, 2009, 81: 363–367

On Bonnesen-style symmetric mixed inequality of two planar convex domains

WANG PengFu, XU WenXue, ZHOU JiaZu & ZHU BaoCheng

Abstract We investigate the symmetric mixed isoperimetric deficit $\Delta_2(K_0, K_1)$ of domains K_0 and K_1 in the Euclidean plane R^2 via the known kinematic formulas of Poincaré and Blaschke in integral geometry. Then we obtain symmetric mixed isoperimetric inequality and some Bonnesen-style symmetric mixed inequalities. One of those inequalities strengthens Kotlyar’s inequality. Finally, we obtain some reverse Bonnesen-style symmetric mixed inequalities that generalize the known Bottema’s result.

Keywords symmmetric mixed isoperimetric deficit, symmetric mixed isoperimetric inequality, Bonnesen-style symmmetric mixed inequality, reverse Bonnesen-style symmmetric mixed inequality

MSC(2010) 52A10, 52A22

doi: 10.1360/012014-58