论 文

字典乘积图的点转发指数

徐宗本^{①③}, 李峰^{①②③*}, 赵海兴^②^① 西安交通大学信息与系统科学研究所, 西安 710049^② 青海师范大学计算机学院, 西宁 810008^③ 西安交通大学智能网络与网络安全教育部重点实验室, 西安 710049

* 通信作者. E-mail: li2006369@126.com

收稿日期: 2013-11-11; 接受日期: 2014-01-09

国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2013CB329404) 和国家自然科学基金 (批准号: 11131006, 61075054) 资助项目

摘要 路由选择的优劣直接影响网络通信性能的有效性. 在大规模超级计算机系统中, 某些元件和连线发生故障是不可避免的, 故障的出现势必会对路由的选择产生影响. 由于路由选择的点转发指数是用来度量网络节点的负载情况, 因而它是衡量路由选择优劣的一个重要参数. 本文利用图的字典乘积方法, 用若干已有的小网络来构造规模较大的网络, 通过分析这些小网络与所得大网络拓扑参数之间的联系, 首次得到字典乘积网络点转发指数的一个紧的上界和紧的下界.

关键词 图 网络 路由 字典乘积 点转发指数

1 引言

网络就是一个系统中各元件之间的连接模式, 从拓扑结构上讲, 互连网络可以用图来表示^[1]. 若一个图的顶点和边分别表示系统中的元件和元件之间的物理连线, 其有向边和无向边分别表示单向通信连线和双向通信连线, 利用关联函数指定这些元件之间的连接方式, 则这样的图称为互连网络的拓扑结构 (或简称网络拓扑), 因此, 互连网络和图从拓扑结构上讲是一回事^[2,3]. 因此, 在本文以后的叙述中, 我们将混淆“图”与“互连网络”的概念.

设 G 是 n 阶连通无向图或者强连通有向图. 定义 β 为 G 中的路由选择, 即 G 中所有 $n(n-1)$ 个有序顶点对 (u, v) 之间固定的路集. 由 β 确定的路径 $\beta(u, v)$ 承担从它的源 u 到目的地 v 的数据传输任务. 如果 $\beta(u, v)$ 不是一条边, 那么 $\beta(u, v)$ 的中间顶点具有转发功能.

如果由 β 确定的路径经过网络中某个节点的边数太多, 那么意味着该路由选择给这个节点的负载太大. 如果负载超过该节点的承载容量, 势必影响网络信息的传输效率, 甚至导致整个网络瘫痪.

因此, 一个好的路由选择不应该给网络中任何节点以太大的负载, 也即意味着由该路由选择确定的路径经过每个节点的条数不能太多. 为了更精确地度量路由选择给每个节点带来的负载, Chung 等在文献 [4] 中首先提出了点转发指数概念.

设 β 是网络 G 中给定的路由选择, 记为 (G, β) , u 是 G 中节点. 节点 u 对路由选择 β 的转发指数, 记为 $\gamma_u(G, \beta)$, 定义为由 β 确定的路径经过 u 的边数. 参数

$$\gamma(G, \beta) = \max\{\gamma_u(G, \beta) : u \in V(G)\}$$

引用格式: 徐宗本, 李峰, 赵海兴. 字典乘积图的点转发指数. 中国科学: 信息科学, 2014, 44: 482–497, doi: 10.1360/112013-22

称为 (G, β) 的转发指数; 参数

$$\gamma(G) = \min\{\gamma(G, \beta) : \forall \beta\}$$

和

$$\gamma_m(G) = \min\{\gamma(G, \beta_m) : \forall \beta_m\}$$

分别称为网络 G 的转发指数和最小路由转发指数, 其中 β_m 表示最小路由选择. 根据上面两式, 很显然

$$\gamma(G) \leq \gamma_m(G).$$

设 G 是 m 阶互连网络, 假定沿着 β 确定的每条路径 $\beta(s, t)$ 的数据传输率是常数 b . 那么每个节点的总传输率为 $2(m-1)b$, 其实, 这样的节点即作为数据源点, 又作为数据接收点. 则整个网络节点之间的总传输率为 $m(m-1)b$. 节点的数据转发量受控于该点的数据容量 c_s , 因此

$$c_s \geq 2(m-1)b + \gamma_s b,$$

其中 $\gamma_s = \gamma_s(G, \beta)$. 假定网络中每个节点的数据容量的最大值为 c , 则

$$c \geq c_s \geq 2(m-1)b + \gamma_s b.$$

由于节点的容量受控于 $2(m-1)b + \gamma b \leq c$, 即

$$b \leq \frac{c}{\gamma + 2(m-1)}, \quad \text{其中 } \gamma = (G, \gamma).$$

由于路由选择中的每个节点即作为数据源点, 又作为数据接收点, 因而每个节点的总传输率必满足

$$2(m-1)b \leq \frac{2(m-1)c}{\gamma + 2(m-1)}, \quad \text{其中 } \gamma = (G, \gamma).$$

上式界定了每个有效的节点容量, 所以对应的总数据传输率界定了该网络的容量

$$m(m-1)b \leq \frac{m(m-1)c}{\gamma + 2(m-1)}, \quad \text{其中 } \gamma = (G, \gamma).$$

在此不等式中 m, b, c 都是常数, 当路由转发指数 γ 越小时, 该网络的容量 $m(m-1)b$ 取值就越大, 即最大化网络容量 $m(m-1)b$ 归结为最小化路由选择的转发指数 γ . 因此, 网络容量能否被充分利用将取决于路由选择. 当然, 在网络容量的上界可以达到的情况下可以确定最小路由转发指数. 从组合网络理论角度来看, “好的”路由选择应该具有小的转发指数. 因此, 确定给定图的转发指数就显得很有意义了.

1989 年, Heydemann 等在文献 [5] 中对总线网络 P_n 和圈网络 C_n 的点转发指数进行研究, 并给出了这两个网络路由点转发指数的确切表达式. 2000 年, Chang 等在文献 [6] 中对阶数满足 $n \geq 2$ 交叉超立方体网络 CQ_n 的转发指数进行了刻画, 只得到了这个图的边转发指数确切表达式, 然而, 该图的点转发指数 $\gamma(CQ_n)$ 至今还没有被确定. 由于 de Bruijn 网络的拓扑结构在某些方面更优于超立方体, Shahrokhi 等在文献 [7] 中刻画了该网络 $UB(d, n)$ 的点转发指数上界; 由于 Kautz 网络还有许多

性质要优于 de Bruijn 网络, 他们于 2001 年在文献 [7] 中给出了 Kautz 网络 $UK(d, n)$ 的点转发指数上界, 但这两个网络的点转发指数的下界表达式至今还没有解决. 现在很多科研工作者都热衷于对具体网络 (如不对称网络等) 的转发指数进行研究, 如文献 [8] 的作者 Gauryacq 对许多具体网络的转发指数进行了刻画, 得到许多好的结论. 更多关于这方面的知识见文献 [9].

图的字典乘积最早是在研究电网可靠性模型时从图论角度提出的^[10]. 两个图 G_1 和 G_2 的字典乘积图记为 $G_1 \odot G_2$, 它是以 $V(G_1 \times G_2) = \{(u_i, v_j) | u_i \in V(G_1), v_j \in V(G_2)\}$ 为顶点集、以两个顶点 (v_i, u_j) 与 (v_k, u_l) 相连当且仅当 v_i 连接 v_k 或 $v_i = v_k$ 时 u_j 连接 u_l 为边的图. 这种方法构造的网络包含特定的小网络作为它的子网络, 且保留这些小网络的许多好性质, 比如, 连通性、正则性、点 (边) 可迁性、Euler 性、Hamilton 性等 (见文献 [10~14]); 且具有很强的容错性、强连通性、可嵌入性、可扩展性、小的传输延迟等^[10,14,15]. 用字典乘积方法能设计许多著名网络的拓扑结构, 如超立方体网络 Q_n ^[10,15], 它含在由 n 个两点总线网络 P_2 按字典乘积得到的拓扑中. 许多基于超立方体网络的超级计算机很早就投入商业运行, 比如: Intel 的 iPSC/2 (Nugent^[16]) 和 Caltech 的 Cosmic (Seitz^[17]) 等. 更多关于字典乘积方面的知识见文献 [18].

按照字典乘积的方法, 能方便的用若干已知规模较小的网络来构建规模较大的网络, 且所得大网络的拓扑结构及相关性质完全由小网络的拓扑结构和性质来刻画. 因而实现由已知“小”网络来推出“大”网络的点转发指数公式, 因为按照这种构建方法, 字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 的特征参数与乘积因子图 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 的特征参数之间存在某种关系, 再根据这些参数与转发指数之间的关系, 就可以给出 $\gamma(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n)$ 的表达式, 从而达到根据已知乘积因子图 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 的拓扑结构参数和点转发指数公式推出大图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 的点转发指数公式. 用此方法得到本文的主要结果, 即给出字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 转发指数的一个紧的上界和紧的下界, 这样的界仅仅依赖于小网络的参数, 如: 小网络的距离、小网络的阶数、小网络的转发指数等.

2 主要结果

路由选择的点转发指数用来度量网络节点的负载, 是一个完全具有网络应用背景的图论概念. 一般地, 确定任意一个给定图的点转发指数则是困难的. 记 $d_G(u, v)$ 表示图 G 中两顶点 u 和 v 之间的距离, 符号 $\{u_i, v_i\} \in V(G_i)$ 表示 u_i, v_i 是 G_i 的顶点, 符号 $D = G/E$ 表示图 D 的拓扑结构同构于在 G 中删除子图 E 的所有边得到的图, 文中没有定义而直接使用的符号和术语可参见文献 [19]. 下面给出字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 点转发指数的一个紧的下界.

定理 2.1 设图 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 是 n 个任意连通图, 乘积因子图 G_i 的阶数为 $n_i, 1 \leq i \leq n$. 设 $V_i = V(G_i), \{u_i, v_i\} \in V(G_i)$, 且

$$V = V(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n) = V(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n),$$

则字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 的点转发指数下界为

$$\gamma(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } G_1, G_2, \dots, G_n \text{ 为完全图,} \\ \gamma_1(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n), & \text{如果 } u_i \neq v_i, u_j = v_j, 1 \leq j \leq i, \\ \gamma_2(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n), & \text{如果 } u_i = v_i, u_{i+1} \neq v_{i+1}, 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned}\gamma_1(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n) &\geq n_1 n_2 \cdots n_{i-1} n_{i+1} \cdots n_n \sum (G_i), \\ \gamma_2(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n) &\geq n_1 n_2 \cdots n_i n_{i+2} \cdots n_n \sum (G_{i+1}), \\ \sum (G_i) &= \frac{1}{n_i} \sum_{u_i \in V_i} \left(\sum_{v_i \in V_i, v_i \neq u_i} \{d_{G_i}(u_i, v_i) - 1\} \right).\end{aligned}$$

定理中 $\gamma(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n)$ 的下界达到当且仅当存在最小路由选择 β_m^i 使得它在乘积因子图 G_i ($1 \leq i \leq n$) 的每个顶点有相等的转发指数.

证明 对于字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 中的任意两顶点, 不妨设为

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \in V(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n)$$

和

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n).$$

设 β 为字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 的任何一个路由选择, 现考虑 $\gamma(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n)$ 的下界, 对于字典乘积图中的任何路径

$$(u_1, u_2, \dots, u_n), \dots, (v_1, v_2, \dots, v_n),$$

记为如下形式

$$\beta((u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n)),$$

则该路径至少包含的中间点为

$$d_{G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n}((u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n)) - 1,$$

即它是 $\beta((u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n))$ 能经过的最小顶点数. 对于固定的顶点 $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, 对所有

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \neq (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

求和, 即以 $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ 为起点的所有路径

$$\beta((u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n))$$

要经过的中间点数至少为

$$\sum_{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in V, (u_1, u_2, \dots, u_n) \neq (v_1, v_2, \dots, v_n)} (d_{G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n}((u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n)) - 1).$$

再对所有的 $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ 求和得

$$\sum_{(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V} \sum_{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in V, (u_1, u_2, \dots, u_n) \neq (v_1, v_2, \dots, v_n)} \{d_{G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n}[(u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n)] - 1\}.$$

由于经过每个顶点的最大路径数不小于 $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_n$ 个顶点的平均数, 则字典乘积图的点转发指数 $\gamma(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n)$ 的下界可表示为

$$\frac{1}{n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_n} \sum_{(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V} \sum_{(u_1, u_2, \dots, u_n) \{ \neq (v_1, v_2, \dots, v_n) \} \in V} \{d_{G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n}[(u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n)] - 1\}.$$

为了表达方便, 现记

$$N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_n.$$

因此得到下式

$$\gamma(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n) \geq \frac{1}{N} \sum_{(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V} \sum_{(u_1, u_2, \dots, u_n) \{ \neq (v_1, v_2, \dots, v_n) \} \in V} \{d_{G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n}[(u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n)] - 1\}.$$

根据字典乘积的性质可知, 字典乘积图的任意两顶点的距离公式为

$$d_{G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n}((u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n)) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } G_1, G_2, \dots, G_n \text{ 为完全图,} \\ d_{G_i}(u_i, v_i), & \text{如果 } u_i \neq v_i, u_j = v_j, 1 \leq j \leq i, \\ \min\{2, d_{G_{i+1}}(u_{i+1}, v_{i+1})\}, & \text{如果 } u_i = v_i, 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

下面分情况来讨论字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 的点转发指数 $\gamma(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n)$ 的下界.

情形 1, 当 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 为完全图时, 字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 的每对顶点之间都有边相连, 所以任何点对之间的数据传输不需要经过第三点. 因此, 它的任何路由选择都使 β 是最小的. 所以对于

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in V(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n),$$

符号 $\forall$ 表示“任意”, 于是有

$$0 \leq \gamma(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n) \leq \gamma_{(u_1, u_2, \dots, u_n)}(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n, \beta) = 0,$$

因而推出

$$\gamma(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n) = 0.$$

情形 2, 当 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 为非完全图时, 对于字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 的任意两顶点

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n) \in V(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n).$$

当这两个顶点满足下式

$$u_i \neq v_i, \quad u_j = v_j, \quad 1 \leq j \leq i$$

时, 于是有

$$\begin{aligned}
 & \gamma(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n) \\
 & \geq \frac{1}{N} \sum_{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in V} \cdot \sum_{(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V, \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \neq \{u_1, u_2, \dots, u_n\}} \\
 & \quad \{d_{G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n}[(u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n)] - 1\} \\
 & = \frac{1}{N} \sum_{u_1 \in V_1} \sum_{u_2 \in V_2} \cdots \sum_{u_n \in V_n} \\
 & \quad \cdot \sum_{v_1 \in V_1, v_1 \neq u_1} \sum_{v_2 \in V_2, v_2 \neq u_2} \cdots \sum_{v_n \in V_n, v_n \neq u_n} \\
 & \quad \{d_{G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n}[(u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n)] - 1\} \\
 & = \frac{1}{N} \sum_{u_1 \in V_1} \sum_{u_2 \in V_2} \cdots \sum_{u_n \in V_n} \\
 & \quad \cdot \sum_{v_1 \in V_1, v_1 \neq u_1} \sum_{v_2 \in V_2, v_2 \neq u_2} \cdots \sum_{v_n \in V_n, v_n \neq u_n} \{d_{G_i}(u_i, v_i) - 1\} \\
 & = \frac{1}{N} (n_1^2 \times n_2^2 \times \cdots \times n_{i-1}^2 \times n_{i+1}^2 \times \cdots \times n_n^2) \cdot \sum_{u_i \in V_i} \left(\sum_{v_i \in V_i, v_i \neq u_i} \{d_{G_i}(u_i, v_i) - 1\} \right) \\
 & = \frac{n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_{i-1} \times n_{i+1} \times \cdots \times n_n}{n_i} \cdot \sum_{u_i \in V_i} \left(\sum_{v_i \in V_i, v_i \neq u_i} \{d_{G_i}(u_i, v_i) - 1\} \right).
 \end{aligned}$$

为了方便表示, 记

$$\sum(G_i) = \frac{1}{n_i} \sum_{u_i \in V_i} \left(\sum_{v_i \in V_i, v_i \neq u_i} \{d_{G_i}(u_i, v_i) - 1\} \right),$$

因而可得

$$\begin{aligned}
 \gamma(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n) & \geq (n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_{i-1} \times n_{i+1} \times \cdots \times n_n) \sum(G_i) \\
 & = n_1 n_2 \cdots n_{i-1} n_{i+1} \cdots n_n \sum(G_i).
 \end{aligned}$$

情形 3, 由于 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 为任意连通且为非完全图时, 设字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 的任意两顶点为

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n) \in V(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n).$$

当这两个顶点满足下式

$$u_i = v_i, \quad u_{i+1} \neq v_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n$$

时, 于是有

$$\gamma(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n)$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{N} \sum_{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in V} \cdot \sum_{(v_1, v_2, \dots, v_n) \{ \neq (u_1, u_2, \dots, u_n) \} \in V} \\
&\quad \{d_{G_1 \odot G_2 \odot \dots \odot G_n}[(u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n)] - 1\} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{u_1 \in V_1} \sum_{u_2 \in V_2} \cdots \sum_{u_n \in V_n} \\
&\quad \cdot \sum_{v_1 \{ \neq u_1 \} \in V_1} \sum_{v_2 \{ \neq u_2 \} \in V_2} \cdots \sum_{v_n \{ \neq u_n \} \in V_n} \{d_{G_{i+1}}(u_{i+1}, v_{i+1}) - 1\} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{u_1 \in V_1} \sum_{u_2 \in V_2} \cdots \sum_{u_i \in V_i} \sum_{u_{i+2} \in V_{i+2}} \cdots \sum_{u_n \in V_n} \\
&\quad \cdot \sum_{v_1 \{ \neq u_1 \} \in V_1} \sum_{v_2 \{ \neq u_2 \} \in V_2} \cdots \sum_{v_i \{ \neq u_i \} \in V_i} \sum_{v_{i+2} \{ \neq u_{i+2} \} \in V_{i+2}} \cdots \sum_{v_n \{ \neq u_n \} \in V_n} \\
&\quad \cdot \sum_{u_{i+1} \in V_{i+1}} \left(\sum_{v_{i+1} \{ \neq u_{i+1} \} \in V_{i+1}} \{d_{G_{i+1}}(u_{i+1}, v_{i+1}) - 1\} \right) \\
&= \frac{1}{N} (n_1^2 \times n_2^2 \times \cdots \times n_i^2 \times n_{i+2}^2 \times \cdots \times n_n^2) \\
&\quad \cdot \sum_{u_{i+1} \in V_{i+1}} \left(\sum_{v_{i+1} \{ \neq u_{i+1} \} \in V_{i+1}} \{d_{G_{i+1}}(u_{i+1}, v_{i+1}) - 1\} \right) \\
&= \left(\frac{n_1^2 \times n_2^2 \times \cdots \times n_i^2 \times n_{i+2}^2 \times \cdots \times n_n^2}{n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_i \times n_{i+1} \times \cdots \times n_n} \right) \\
&\quad \cdot \sum_{u_{i+1} \in V_{i+1}} \left(\sum_{v_{i+1} \{ \neq u_{i+1} \} \in V_{i+1}} \{d_{G_{i+1}}(u_{i+1}, v_{i+1}) - 1\} \right),
\end{aligned}$$

根据 $\sum(G_i)$ 的相似表示方法, 记

$$\sum(G_{i+1}) = \frac{1}{n_{i+1}} \sum_{u_{i+1} \in V_{i+1}} \left(\sum_{v_{i+1} \{ \neq u_{i+1} \} \in V_{i+1}} \{d_{G_{i+1}}(u_{i+1}, v_{i+1}) - 1\} \right).$$

结合上面两式, 得到

$$\begin{aligned}
\gamma(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n) &\geq \left(\frac{n_1^2 \times n_2^2 \times \cdots \times n_i^2 \times n_{i+2}^2 \times \cdots \times n_n^2}{n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_i \times n_{i+1} \times \cdots \times n_n} \right) \sum(G_{i+1}) \\
&= (n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_i \times n_{i+1} \times \cdots \times n_n) \sum(G_{i+1}) \\
&= n_1 n_2 \cdots n_i n_{i+1} \cdots n_n \sum(G_{i+1}).
\end{aligned}$$

情形 4, 根据字典乘积的性质, 即乘积图中边的连接关系, 在条件都满足情形 3 时, 于是有

$$\begin{aligned}
\gamma(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n) &\geq \frac{1}{N} \sum_{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in V} \\
&\quad \cdot \sum_{(v_1, v_2, \dots, v_n) \{ \neq (u_1, u_2, \dots, u_n) \} \in V} \{d_{G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n}[(u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n)] - 1\} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{u_1 \in V_1} \sum_{u_2 \in V_2} \cdots \sum_{u_n \in V_n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sum_{v_1 \{ \neq u_1 \} \in V_1} \sum_{v_2 \{ \neq u_2 \} \in V_2} \cdots \sum_{v_n \{ \neq u_n \} \in V_n} \{d_{G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n}[(u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n)] - 1\} \\
= & \frac{1}{N} \sum_{u_1 \in V_1} \sum_{u_2 \in V_2} \cdots \sum_{u_n \in V_n} \\
& \cdot \sum_{v_1 \{ \neq u_1 \} \in V_1} \sum_{v_2 \{ \neq u_2 \} \in V_2} \cdots \sum_{v_n \{ \neq u_n \} \in V_n} \{d_{G_{i+1}}(u_{i+1}, v_{i+1}) - 1\} \\
= & \frac{1}{N} \sum_{u_1 \in V_1} \sum_{u_2 \in V_2} \cdots \sum_{u_i \in V_i} \sum_{u_{i+2} \in V_{i+2}} \cdots \sum_{u_n \in V_n} \\
& \cdot \sum_{v_1 \{ \neq u_1 \} \in V_1} \sum_{v_2 \{ \neq u_2 \} \in V_2} \cdots \sum_{v_i \{ \neq u_i \} \in V_i} \sum_{v_{i+2} \{ \neq u_{i+2} \} \in V_{i+2}} \cdots \sum_{v_n \{ \neq u_n \} \in V_n} \\
& \cdot \sum_{u_{i+1} \in V_{i+1}} \left(\sum_{v_{i+1} \{ \neq u_{i+1} \} \in V_{i+1}} \{d_{G_{i+1}}(u_{i+1}, v_{i+1}) - 1\} \right) \\
= & \frac{1}{N} (n_1^2 \times n_2^2 \times \cdots \times n_i^2 \times n_{i+2}^2 \times \cdots \times n_n^2) \cdot \sum_{u_{i+1} \in V_{i+1}} \left(\sum_{v_{i+1} \{ \neq u_{i+1} \} \in V_{i+1}} \{2 - 1\} \right) \\
= & \frac{n_1^2 \times n_2^2 \times \cdots \times n_i^2 \times n_{i+2}^2 \times \cdots \times n_n^2}{n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_i \times n_{i+1} \times \cdots \times n_n} \times n_{i+1}^2 \\
= & n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_i \times n_{i+1} \times n_{i+2} \times \cdots \times n_n \\
= & n_1 n_2 \cdots n_i n_{i+1} n_{i+2} \cdots n_n.
\end{aligned}$$

在情形 3 和 4 中, 对于任意的 $1 \leq i \leq n$, 字典乘积因子图 G_i 为非完全图, 在满足情形中的条件时, 于是有

$$\frac{1}{n_{i+1}} \sum_{u_{i+1} \in V_{i+1}} \left(\sum_{v_{i+1} \{ \neq u_{i+1} \} \in V_{i+1}} \{d_{G_{i+1}}(u_{i+1}, v_{i+1}) - 1\} \right) \geq n_{i+1},$$

因而得到

$$\sum(G_{i+1}) \geq n_{i+1},$$

所以有

$$n_1 n_2 \cdots n_i n_{i+2} \cdots n_n \sum(G_{i+1}) \geq n_1 n_2 \cdots n_i n_{i+1} n_{i+2} \cdots n_n.$$

综合上面几种情形, 得定理的表达式.

下面证明定理的剩余部分. 事实上, 路径 $\beta((u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n))$ 恰经过

$$d_{G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n}((u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n)) - 1$$

个中间点等价于 $\beta((u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n))$ 是图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 中最短

$$(u_1, u_2, \dots, u_n), \dots, (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

路. 所以, 以 $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ 为起点的所有路径

$$\beta((u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n)) \quad ((u_1, u_2, \dots, u_n) \neq (v_1, v_2, \dots, v_n))$$

要经过的中间点数恰为

$$\sum_{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in V \setminus \{(v_1, v_2, \dots, v_n)\}} (d_{G_1 \odot G_2 \odot \dots \odot G_n}((u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n)) - 1).$$

等价于对每个

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V(G_1 \odot G_2 \odot \dots \odot G_n) \quad ((u_1, u_2, \dots, u_n) \neq (v_1, v_2, \dots, v_n)),$$

$\beta((u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n))$ 是字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \dots \odot G_n$ 中最短

$$(u_1, u_2, \dots, u_n), \dots, (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

路. 因此, 由 β 确定的所有路径要经过的中间点数恰为

$$\sum_{(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V} \sum_{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in V \setminus \{(v_1, v_2, \dots, v_n)\}} \{d_{G_1 \odot G_2 \odot \dots \odot G_n}[(u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n)] - 1\}.$$

等价于由 β 确定的所有路径都是字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \dots \odot G_n$ 中最短路. 因此

$$\begin{aligned} & \gamma(G_1 \odot G_2 \odot \dots \odot G_n, \beta) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V} \sum_{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in V \setminus \{(v_1, v_2, \dots, v_n)\}} \{d_{G_1 \odot G_2 \odot \dots \odot G_n}[(u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n)] - 1\}. \end{aligned}$$

等价于 β 是字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \dots \odot G_n$ 的最短路由选择, 而且在每个顶点都有相等的转发指数. 根据前面的讨论可知, 定理中 $\gamma(G_1 \odot G_2 \odot \dots \odot G_n)$ 的下界达到当且仅当存在最短路由选择 β_m^i 使得它在乘积因子图 G_i ($1 \leq i \leq n$) 的每个顶点有相等的转发指数, 即本定理得证.

设 G_i 是阶数为 n_i 连通图, 对于字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \dots \odot G_n$ 中的任何路由选择 β , 由 β 确定的路径经过顶点 $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ 的最大条数至多为总路径条数减去以 $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ 为端点的路径条数, 即

$$2(n_1 \times n_2 \times \dots \times n_i \times n_{i+1} \times n_{i+2} \times \dots \times n_n - 1).$$

不妨记

$$N = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_i \times n_{i+1} \times n_{i+2} \times \dots \times n_n,$$

因此, 得 $\gamma(G_1 \odot G_2 \odot \dots \odot G_n)$ 的一个很粗糙上界

$$\gamma(G_1 \odot G_2 \odot \dots \odot G_n) \leq N(N-1) - 2(N-1) = (N-1)(N-2).$$

根据这个式子, 当

$$G_1 = G_2 = \dots = G_{n-1} = K_1,$$

且

$$G_n = K_{1, N(N-1)}$$

时, 字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 是达到这个上界的图.

设 G 是任意一个无孤立点的简单连通图, 将 G 的每条边用方向相反的两条有向边来代替所得到的图记为 $G^\odot$. 定义

$$H = \{\mathcal{H}' \subseteq G^\odot \mid d_{\mathcal{H}'}^+(x) = 1, \forall x \in V(\mathcal{H}')\},$$

即 H 是 $G^\odot$ 的子图且满足每个顶点的出度仅为 1, 设

$$\Delta^-(H) = \max\{d_H^-(x) \mid \forall x \in V(H)\}.$$

根据上面两个符号, 定义下面的符号

$$\delta(G) = \min\{\Delta^-(H) \mid H \subseteq G^\odot\},$$

即 $\delta(G)$ 是 $G^\odot$ 中形如 H 的所有子图中具有最小 $\Delta^-(H)$ 的那个.

下面利用组合理论和代数知识, 给出字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 一个较紧的点转发指数上界.

定理 2.2 设图 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 是 n 个阶数为 n_i ($1 \leq i \leq n$) 任意连通图, 设 $V_i = V(G_i)$, 且记

$$V = V(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n) = V(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n),$$

则字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 的点转发指数为

$$\gamma(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n) \leq N_{i,n} \gamma(G_i) + \delta(G_{1,i})(N_{i,n} - 1),$$

$$\gamma(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n) \leq N_{i,n} \gamma(G_i) + \max_{U'_{1,i} \in V} \sum_{U_{1,i} \in N_{G_{1,i}}(U'_{1,i})} \left\lceil \frac{N_{i,n}(N_{i,n} - 1)}{N_{i,n} d_{G_{1,i}}(U_{1,i})} \right\rceil,$$

其中

$$N_{i,n} = n_{i+1} \times n_{i+2} \times \cdots \times n_n,$$

$$G_{1,i} = G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_i \subseteq G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n,$$

$$U_{1,i} = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i) \in V(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_i),$$

其中 $1 \leq i \leq n$, 当 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_i$ 为正则图时, 定理中的两个不等式相等; 当字典乘积图是阶数确定的圈时, 定理中的两个不等式都能达到上界.

证明 设 β_i 是字典乘积因子图 G_i 中的路由选择, 且使得

$$\gamma(G_i) = \gamma(G_i, \beta_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

对于字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 中的任意两顶点, 不妨记为

$$(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n) \in V(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n)$$

和

$$(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) \in V(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n),$$

其中

$$u_i \in V(G_i), v_i \in V(G_i), 1 \leq i \leq n.$$

设 β 为字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 中的路由选择. 情形 1, 当上述两顶点满足下列条件, 即

$$u_i \neq v_i, u_j = v_j, 1 \leq j \leq i,$$

根据 β_i 的定义可知, 在乘积因子图 G_i 中有如下形式的路

$$\beta_i(u_i, v_i) = (u_i, x_1, x_2, \dots, x_{x-1}, x_x, v_i).$$

而对应于在字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 中路

$$\beta((u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n))$$

定义为如下形式

$$\begin{aligned} & \beta((u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)) \\ &= \{ (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n), \\ & \quad (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, x_1, u_{i+1}, \dots, u_n), \\ & \quad (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, x_2, u_{i+1}, \dots, u_n), \\ & \quad \vdots \\ & \quad (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, x_{x-1}, u_{i+1}, \dots, u_n), \\ & \quad (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, x_x, u_{i+1}, \dots, u_n), \\ & \quad (v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) \}. \end{aligned}$$

如果 β_i 中的一条路经过乘积因子图 G_i 中的某顶点 u_i , 则 β 中存在 $n_{i+1}n_i \cdots n_n$ 条路经过子图

$$\{(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i)\} \odot G_{i+1} \odot G_{i+2} \odot \cdots \odot G_n$$

中的任意顶点 $(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, h_{i+1}^0, h_{i+2}^0, \dots, h_n^0)$, 其中

$$(h_{i+1}^0, h_{i+2}^0, \dots, h_n^0) \in V(G_{i+1} \odot G_{i+2} \odot \cdots \odot G_n).$$

因而对于字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 中形如 $(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, h_{i+1}^0, h_{i+2}^0, \dots, h_n^0)$ 的顶点, 至少有 $n_{i+1}n_i \cdots n_n \beta_i(G_i)$ 条路经过这个顶点.

情形 2, 当两个顶点满足下式

$$u_i = v_i, u_{i+1} \neq v_{i+1}, 1 \leq i \leq n.$$

有两种情形, 要么是

$$\varepsilon(u_{i+1}, v_{i+1}) \in E(G_{i+1}),$$

即

$$\varepsilon((u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)) \in E(G_1 \odot G_2 \odot \dots \odot G_n),$$

这种情况为该路径中不包含转发指数的顶点, 即

$$\beta((u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)) \in E(G_1 \odot G_2 \odot \dots \odot G_n).$$

要么是

$$\varepsilon(u_{i+1}, v_{i+1}) \notin E(G_{i+1}),$$

这说明

$$\varepsilon((u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)) \notin E(G_1 \odot G_2 \odot \dots \odot G_n).$$

因此, 在点 $(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n)$ 和点 $(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$ 之间, 利用不同方法构造如下长度的路

$$\mathcal{L}((u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)) = 2.$$

符号 $\mathcal{L}$ 表示这两点之间的距离. 在这种情形中对于任意两点之间要构造长度为 2 的路的方法仅为如下两种.

方法 1, 在字典乘积图 $\{(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i)\} \odot G_{i+1} \odot G_{i+2} \odot \dots \odot G_n$ 中, 对于

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, h_{i+1}^1, h_{i+2}^1, \dots, h_n^1) \in V(\{(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i)\} \odot G_{i+1} \odot G_{i+2} \odot \dots \odot G_n).$$

记

$$D = G_1 \odot G_2 \odot \dots \odot G_n / \{(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i)\} \odot G_{i+1} \odot G_{i+2} \odot \dots \odot G_n,$$

则有

$$\begin{aligned} & |N_D((u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, h_{i+1}^1, h_{i+2}^1, \dots, h_n^1))| \\ &= (n_i \times n_{i+1} \times \dots \times n_n) d_{G_1 \odot G_2 \odot \dots \odot G_i}((u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i)). \end{aligned}$$

上式表示顶点邻集所含顶点的个数. 因此对于图 $\{(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i)\} \odot G_{i+1} \odot G_{i+2} \odot \dots \odot G_n$ 中任意两个不同顶点, 即

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, h_{i+1}^2, h_{i+2}^2, \dots, h_n^2) \in V(\{(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i)\} \odot G_{i+1} \odot G_{i+2} \odot \dots \odot G_n)$$

和

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, h_{i+1}^3, h_{i+2}^3, \dots, h_n^3) \in V(\{(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i)\} \odot G_{i+1} \odot G_{i+2} \odot \dots \odot G_n).$$

再在邻集 $N_D((u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, h_{i+1}^1, h_{i+2}^1, \dots, h_n^1))$ 中任选一个顶点, 这样的三个顶点就构成一条长度为 2 的路径了. 而这样的路径被选择承担着数据转发任务, 因而在图 $\{(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i)\} \odot G_{i+1} \odot G_{i+2} \odot \dots \odot G_n$ 中长度为 2 的路径的条数至多为

$$\left\lceil \frac{n_i n_{i+1} \dots n_n (n_i n_{i+1} \dots n_n - 1)}{n_i n_{i+1} \dots n_n d_{G_1 \odot G_2 \odot \dots \odot G_i}((u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i))} \right\rceil.$$

为了方便表示, 记

$$G_{1,i} = G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_i \subseteq G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n,$$

$$U_{1,i} = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i) \in V(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_i),$$

$$U'_{1,i} = (u'_1, u'_2, \dots, u'_{i-1}, u'_i) \in V(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_i),$$

因此, 满足任意点 $(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n)$ 和点 $(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$ 之间长度为 2 的路径的条数至多为

$$\max_{U'_{1,i} \in V} \sum_{U_{1,i} \in N_{G_{1,i}}(U'_{1,i})} \left\lceil \frac{n_i n_{i+1} \cdots n_n (n_i n_{i+1} \cdots n_n - 1)}{n_i n_{i+1} \cdots n_n d_{G_{1,i}}(U_{1,i})} \right\rceil.$$

方法 2, 在字典乘积图 $\{(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i)\} \odot G_{i+1} \odot G_{i+2} \odot \cdots \odot G_n$ 中, 对于

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, h_{i+1}^1, h_{i+2}^1, \dots, h_n^1) \in V(\{(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i)\} \odot G_{i+1} \odot G_{i+2} \odot \cdots \odot G_n).$$

肯定有

$$f((u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, h_{i+1}^1, h_{i+2}^1, \dots, h_n^1)) = d_H^+((u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, h_{i+1}^1, h_{i+2}^1, \dots, h_n^1)),$$

其中

$$H = \{\mathcal{H}' \subseteq (G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n)^\odot \mid d_{\mathcal{H}'}^+(x) = 1, \forall x \in V(\mathcal{H}')\}.$$

因此, 对于任意

$$(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, h_{i+1}^2, h_{i+2}^2, \dots, h_n^2) \in V(\{(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i)\} \odot G_{i+1} \odot G_{i+2} \odot \cdots \odot G_n),$$

$$(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, h_{i+1}^3, h_{i+2}^3, \dots, h_n^3) \in V(\{(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i)\} \odot G_{i+1} \odot G_{i+2} \odot \cdots \odot G_n).$$

即这两个顶点为字典乘积图 $\{(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i)\} \odot G_{i+1} \odot G_{i+2} \odot \cdots \odot G_n$ 中的任意点, 在它们之间构造如下形式的路径

$$\begin{aligned} & \beta((u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, h_{i+1}^2, h_{i+2}^2, \dots, h_n^2), (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, h_{i+1}^3, h_{i+2}^3, \dots, h_n^3)) \\ &= \{ (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, h_{i+1}^2, h_{i+2}^2, \dots, h_n^2), \\ & \quad (f(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i), h_{i+1}^3, h_{i+2}^3, \dots, h_n^3), \\ & \quad (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, h_{i+1}^3, h_{i+2}^3, \dots, h_n^3) \}. \end{aligned}$$

很显然这样的路径长度为 2, 因此在图 $\{(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i)\} \odot G_{i+1} \odot G_{i+2} \odot \cdots \odot G_n$ 中, 按照上面的路径构造方法, 对于任意顶点 $(f(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i), h_{i+1}^3, h_{i+2}^3, \dots, h_n^3)$ 在这个图中作为中间点的次数至多为

$$n_{i+1} \times n_{i+2} \times n_{i+3} \times \cdots \times n_n - 1.$$

因而, 根据 $\delta(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_i)$ 的定义, 对于如下形式的任意点

$$\forall (u_1^*, u_2^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i^*, h_{i+1}^1, h_{i+2}^1, \dots, h_n^1) \in V(\{(u_1^*, u_2^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i^*)\} \odot G_{i+1} \odot G_{i+2} \odot \cdots \odot G_n),$$

它作为图 $\{(u_1^*, u_2^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i^*)\} \odot G_{i+1} \odot G_{i+2} \odot \cdots \odot G_n$ 中长度为 2 路径的中间点次数至多为

$$\delta(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_i)(n_{i+1} \times n_{i+2} \times n_{i+3} \times \cdots \times n_n - 1).$$

综合上面分析的结论即得定理的表达式. 当 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_i$ 为正则图时, 则有

$$\delta(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_i) = 1,$$

因而, 定理中的两个不等式相等. 当字典乘积图是阶数确定的圈时, 定理中的两个不等式都能达到上界, 本定理得证.

3 结论

本文运用组合设计和代数知识, 实现由已知“小”图来推出“大”图的点转发指数公式, 因为按照这种构建方法, 字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 的特征参数与因子图 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 的特征参数之间存在某种关系, 再根据这些参数与转发指数之间的关系, 就可以给出 $\gamma(G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n)$ 的表达式, 从而达到根据乘积因子图 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 的拓扑结构参数和点转发指数公式推出大图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 的点转发指数公式. 我们用此方法首次给出字典乘积图 $G_1 \odot G_2 \odot \cdots \odot G_n$ 转发指数的一个紧的上界和紧的下界, 这样的界仅仅依赖于小网络的参数, 如: 小网络的距离、小网络的阶数、小网络的转发指数等. 下一步将通过寻找新的组合技巧和代数方法, 建立一个更为一般的关系 (即等式关系).

路由选择的点转发指数是用来度量网络节点的负载情况, 它是衡量该网络路由选择优劣的一个重要参考指标. 本文通过图的字典乘积方法, 将大网络的点转发指数问题转化为计算已知小网络的拓扑结构参数和点转发指数, 从而允许我们通过已有小网络的路由选择情况分析构建后的大网络的路由选择优劣. 因此只要知道小网络的每个顶点负载情况, 就能知道构建后的大网络的每个顶点负载容量. 因此只要通过改动局部网络的路由选择, 就能达到优化所得大网络的路由选择, 这在网络设计中具有重要的理论价值和应用价值.

参考文献

- 1 Colbourn C J. The Combinatorics of Network Reliability. Oxford: Oxford University Press, 1987
- 2 Boesch F. The Cut Frequency Vector. Graph Theory with Application to Algorithms and Computer Science. New York: Wiley, 1985. 103–121
- 3 Li F, Zhao H X, Xu Z B. Constructing a reliability dominating set of a new family of networks. Chin J Comput, 2013, 36: 1246–1253 [李峰, 赵海兴, 徐宗本. 构建一类新网络簇的可靠性控制集. 计算机学报, 2013, 36: 1246–1253]
- 4 Chung F, Coffman E G, Reiman M I, et al. The forwarding index of communication networks. IEEE Trans Inform Theory, 1987, 33: 224–232
- 5 Heydemann M C, Meyer J C, Sotteau D. On forwarding indices of networks. Discrete Appl Math, 1989, 23: 103–123
- 6 Chang C P, Sung T Y, Hsu L H. Edge congestion and topological properties of crossed cubes. IEEE Trans Parallel Distrib, 2000, 11: 64–79
- 7 Shahrokhi F, Székely L A. Constructing integral uniform flows in symmetric networks with application to the edge-forwarding index problem. Discrete Appl Math, 2001, 108: 175–191

- 8 Gauyacq G. On quasi-Cayley graphs. *Discrete Appl Math*, 1997, 77: 43–58
- 9 Saad R. Complexity of the forwarding index problem. *SIAM J Discrete Math*, 1993, 6: 418–427
- 10 Imrich W, Klavžar S, Gorenec B. *Product Graphs: Structure and Recognition*. New York: Wiley, 2000
- 11 Li F, Xu Z B, Zhao H X, et al. On the number of spanning trees of the lexicographic product of networks. *Sci Sin Inform*, 2012, 42: 949–959 [李峰, 徐宗本, 赵海兴等. 字典乘积网络的支撑树计数. *中国科学: 信息科学*, 2012, 42: 949–959]
- 12 Wang W, Li F, Lu H L, et al. Graphs determined by their generalized characteristic polynomials. *Linear Algebra Appl*, 2011, 434: 1378–1387
- 13 Li F, Wang W, Xu Z B, et al. Some results on the lexicographic product of vertex-transitive graphs. *Appl Math Lett*, 2011, 24: 1924–1926
- 14 Xu J M. *Theory of Combination Networks*. Beijing: Science Press, 2007. 1–170 [徐俊明. 组合网络理论. 北京: 科学出版社, 2007. 1–170]
- 15 Yegnanarayanan V, Thiripurasundari P R. On some graph operations and related applications. *Electron Notes Discrete Math*, 2009, 33: 123–130
- 16 Nugent S F. The iPDC/2 direct-connect communication technology. In: *Proceedings of Conference on Hypercube Concurrent Computers and Applications*, Pasadena, 1988. 51–60
- 17 Seitz C L. The cosmic cube. *Commun ACM*, 1985, 28: 22–33
- 18 Feder T. Stable networks and product graphs. *Mem Amer Math Soc*, 1995, 116: 1–89
- 19 Bondy J A, Murty U S. *Graph Theory with Application*. Amsterdam: North-Holland, 1976

Vertex forwarding indices of the lexicographic product of graphs

XU ZongBen^{1,3}, LI Feng^{1,2,3*} & ZHAO HaiXing²

1 *Institute of Information and System Sciences, Faculty of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;*

2 *College of Computer Science, Qinghai Normal University, Xi'ning 810008, China;*

3 *Ministry of Education Key Lab for Intelligent Networks and Network Security, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*

*E-mail: li2006369@126.com

Abstract With the rapid development of computer and communication networks, many theoretical problems have come into focus, one of which is the reliability design of a network. The main aim is to design an optimal system for the network. This type of question is of great interest in mathematics and has applications in many fields, e.g., supercomputer systems, multiple processor systems, communication systems and local area networks.

Forwarding indices of a routing can be used to deterministically measure its efficiency. If some nodes or links fail, it is important to know which paths of the supercomputer system are malfunctioning, and, quite naturally, good routing should not overload any vertex by sending too many routing paths through it. The original study of forwarding indices was motivated by the problem of maximizing network capacity, which is achieved by minimizing the forwarding indices of a routing. Thus, determining the vertex forwarding indices of a given graph becomes very significant.

In this study, we investigated the routing forwarding indices of the lexicographic product of graphs. Some large networks are composed from existing smaller networks, using, in terms of graph theory, the lexicographic product of graphs. Some properties of such large networks are associated strongly with those of the corresponding smaller networks. By using the topological structure and analysis of interconnection networks, and the theory of algebra, we characterize the closed lower and upper bounds on the vertex forwarding indices of the lexicographic product of graphs. The formula for the forwarding indices depends only on the distance, the number of vertices and vertex forwarding indices of the factor graphs.

Keywords graph, network, routing, lexicographic product, vertex forwarding indices

XU ZongBen was born in 1955. He is a Ph.D. supervisor. He received his Ph.D. in Mathematics from Xi'an Jiaotong University, Xi'an in 1987. He now serves as Vice President of Xi'an Jiaotong University, Chief Scientist of the National Basic Research Program of China (973 Project), and Director of the Institute for Information and System Sciences at the University. His current research interests include non-linear functional analysis, mathematical foundations of information technology, and computational intelligence. He is an Academician of the Chinese Academy of Sciences and a Member of the New York Academy of Sciences.

LI Feng was born in Anhui Province in 1981. Currently, he is a Ph.D. candidate at the School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University. He is also a lecturer at the College of Computer Science, Qinghai Normal University. His research interests include graph theory, analysis and design of reliable combinatorial networks, the optimization theory and algorithms of interconnection networks, and machine learning.

ZHAO HaiXing was born in 1969, and is a Ph.D. supervisor. He received his Ph.D. in 2004 from the School of Computer Science, Northwestern Polytechnical University. He received an additional Ph.D. from the Faculty of Mathematical Sciences, University of Twente, Netherlands in 2005. His research interests include graph theory, complicated networks and clustering algorithms, security of networks and information processing.