量子二重对数与循环箭图

献给万哲先教授 90 华诞

付昌建, 彭联刚*

四川大学数学学院, 成都 610064

E-mail: changjianfu@scu.edu.cn, penglg@scu.edu.cn

收稿日期: 2016-12-31; 接受日期: 2017-01-24; 网络出版日期: 2017-03-16; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11001185 和 11521061) 资助项目

摘要 本文主要研究循环箭图的幂零表示范畴上的离散稳定性条件, 并利用 Ringel-Hall 代数研究相应的量子二重对数恒等式. 对任意给定离散稳定性条件的循环箭图 Δ_n , 本文得到了一类 Bytsko-Volkov 意义下的阶为 n 的循环量子二重对数等式.

关键词 量子二重对数 循环箭图 Ringel-Hall 代数

MSC (2010) 主题分类 16G20, 16S35

1 引言

量子二重对数是经典的二重对数函数的量子化, 在诸如离散动力系统^[1-3]、丛理论^[4,5] 和 motivic Donaldson-Thomas 不变量理论^[6] 等众多数学分支中发挥着重要的作用. 关于二重对数函数和量子二重对数的基本性质及发展历史参见文献 [4, 7] 及其参考文献.

受 Kontsevich 和 Soibelman^[6] 关于 3 维 Calabi-Yau 范畴上的 motivic Donaldson-Thomas 不变量工作的启发, Reineke^[8] 利用 Ringel-Hall 代数方法研究了有限无环箭图相关的 Poisson 代数的某些自同构的分解公式, 这些分解公式与文献 [6] 中 motivic Donaldson-Thomas 不变量的穿墙公式密切相关. 随后, Keller^[5] 对 Dynkin 型箭图利用量子二重对数重新表述了 Reineke^[8] 的分解公式, 得到了某些量子二重对数的乘积的不变性, 该不变性表明, 对于 Dynkin 箭图, 其上的非交换 Donaldson-Thomas 不变量是良定的. 文献 [5, 8] 中的一个关键点是, 从无环箭图的有限维表示范畴的 Ringel-Hall 代数到相应的量子环面存在所谓的可积映射. 虽然对于一般的 Jacobi 代数, 可积映射的存在性并未被建立, Keller^[5] 猜测, 关于 Dynkin 箭图的结果可以推广至任意的由带多项式势的有限箭图确定的 Jacobi 代数上, 从而, 这类代数上的非交换 Donaldson-Thomas 不变量是良定的.

注意到对于遗传 Abel 范畴的 Ringel-Hall 代数, 其可积映射总是存在的, 这为推广文献 [5, 8] 的结果至有定向圈的有限箭图上提供了可能性. 需要指出的是, 应用可积映射导出量子二重对数乘积不变性的另一个关键点是在相应的范畴上存在所谓的完全离散稳定性条件. 但对于带定向圈的箭图的有限维幂零表示范畴, 完全离散稳定性条件总是不存在的. 尽管如此, 我们将在本文中考虑一类特殊的带定

英文引用格式: Fu C J, Peng L G. Quantum dilogarithm identities and cyclic quivers (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1557-1564, doi: 10.1360/N012016-00248

向圈的箭图—循环箭图 Δ_n . 虽然循环箭图的有限维幂零表示范畴 $\mathcal{T}_n$ 上不存在完全离散稳定性条件, 但 $\mathcal{T}_n$ 上存在物理学意义下的离散稳定性条件. 我们将应用离散稳定性条件导出循环箭图相关的量子二重对数乘积的不变性, 类似于文献 [5], 这些不变性可以用来定义循环箭图的非交换 Donaldson-Thomas 不变量.

本文结构如下: 第 2 节将介绍稳定性条件相关的基本定义与性质, 然后给出对于给定离散稳定性条件的范畴 $\mathcal{T}_n$ 上的稳定对象的刻画 (定理 2.1). 第 3 节将应用定理 2.1 和可积映射导出某些量子二重对数乘积的不变性 (定理 3.1). 在此基础上利用 $\mathcal{T}_n$ 的 Auslander-Reiten 平移函子导出一类 Bytsko 和 Volkov 意义下的阶为 n 的循环量子二重对数等式 (定理 3.2).

2 离散稳定性条件与循环箭图

2.1 Abel 范畴上的稳定性条件

设 k 为域, $\mathcal{A}$ 为 k - 线性 Abel 范畴. 记 $G_0(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$ 的 Grothendieck 群, 对任意的对象 $X \in \mathcal{A}$, 记 $[X]$ 表示 X 在 $G_0(\mathcal{A})$ 中的像.

如果加法群同态 $Z : G_0(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ 满足对任意的非零对象 $X \in \mathcal{A}$ 都有 $Z([X]) \neq 0$, 并且其辐角 $\arg Z([X]) \in [0, \pi)$, 那么称 Z 为 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的一个稳定性条件, 此时也称 $Z([X])$ 的辐角 $\arg Z([X])$ 为 X 的相位. 设 $X \in \mathcal{A}$ 为非零对象, 如果对任意的非零真子对象 $Y \subset X$ 都有 $\arg Z([Y]) < \arg Z([X])$ (相应地, $\arg Z([Y]) \leq \arg Z([X])$) 成立, 那么称对象 X 为稳定的 (相应地, 半稳定的). 下列两个结果是熟知的并且利用定义也很容易证明.

引理 2.1 设 $Z : G_0(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ 为 $\mathcal{A}$ 上的稳定性条件, $X \in \mathcal{A}$ 为非零对象.

- (1) 对象 X 是稳定的当且仅当对 X 的任意的非平凡商 Y 都有 $\arg Z([X]) < \arg Z([Y])$;
- (2) 对象 X 是半稳定的当且仅当对 X 的任意的非平凡商 Y 都有 $\arg Z([X]) \leq \arg Z([Y])$.

引理 2.2 设 $Z : G_0(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ 为 $\mathcal{A}$ 上的稳定性条件, $X, Y \in \mathcal{A}$ 且 Y 为对象 X 的子对象.

- (1) $\arg Z([Y]) \leq \arg Z([X])$ 当且仅当 $\arg Z([X/Y]) \geq \arg Z([X])$;
- (2) 如果 $\arg Z([Y]) = \arg Z([X/Y])$, 那么 $\arg Z([X]) = \arg Z([Y]) = \arg Z([X/Y])$.

注意由引理 2.1(1) 易知, 任意稳定对象总是不可分解的.

对任意实数 $\mu \in [0, \pi)$, 记 $\mathcal{A}_\mu$ 表示由零对象及所有具有相位 μ 的半稳定对象构成的 $\mathcal{A}$ 的满子范畴. King^[9] 证明了 $\mathcal{A}_\mu$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Abel 子范畴并且其单对象恰为相位为 μ 的稳定对象. 进一步地, 对任意的对象 $X \in \mathcal{A}$, 存在唯一的滤过

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_t = X$$

使得 X_k/X_{k-1} ($k = 1, 2, \dots, t$) 为半稳定的且 $\arg Z([X_k/X_{k-1}]) > \arg Z([X_{k+1}/X_k])$, $k = 1, 2, \dots, t-1$, 称该滤过为 X 的 Harder-Narasimhan 滤过.

设 $Z : G_0(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ 为稳定性条件, 如果对任意的实数 $\mu \in [0, \pi)$, 子范畴 $\mathcal{A}_\mu$ 只包含零对象或者只有唯一的单对象, 那么称稳定性条件 Z 为离散的. 进一步地, 如果子范畴 $\mathcal{A}_\mu$ 还是半单的, 那么称稳定性条件 Z 为完全离散的. 显然, 稳定性条件 $Z : G_0(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ 为离散的当且仅当不同的稳定对象具有不同的相位. 需要指出的是, 对于某些特殊的 Abel 范畴离散稳定性条件和完全离散稳定性条件是一致的, 如 Dynkin 型箭图的有限维表示范畴.

2.2 循环箭图的幂零表示范畴的离散稳定性条件

设 $Q = \Delta_n$ 表示具有顶点集合 $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ 和箭向集合 $Q_1 = \{i \rightarrow i+1 \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{n \rightarrow 1\}$ 的循环箭图. 记 $\mathcal{T}_n$ 为反向箭图 Q^{op} 的有限维幂零表示范畴. 我们知道 $\mathcal{T}_n$ 是遗传范畴且在同构意义下任意的不可分解幂零表示由其唯一的基座和长度唯一确定. 对任意的 $i \in Q_0$, 记 S_i 表示反向箭图 Q^{op} 的以顶点 i 为支撑的一维单表示, 对任意的 $i \in Q_0, l \in \mathbb{N}$, 记 $R(i, l)$ 表示具有基座 S_i 的长度为 l 的不可分解幂零表示. 设 $G_0(\mathcal{T}_n)$ 表示 $\mathcal{T}_n$ 的 Grothendieck 群, 显然有群同构 $G_0(\mathcal{T}_n) \cong \bigoplus_{i \in Q_0} \mathbb{Z}[S_i]$. 令 $\delta = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^n$, 则有且仅有 n 个不同构的不可分解幂零表示使得其维数向量为 δ . 关于循环箭图的幂零表示的结构和性质参见文献 [10]. 对于 $\mathcal{T}_n$ 上的稳定性条件, 我们有如下结论.

命题 2.1 设 $Z: G_0(\mathcal{T}_n) \rightarrow \mathbb{C}$ 为 $\mathcal{T}_n$ 上的稳定性条件, 则

- (1) 任意的稳定对象的长度小于或等于 n , 因此只有有限多个稳定对象;
- (2) 至多只有 1 个稳定对象的维数向量为 δ .

证明 结论 (2) 是引理 2.1 的简单推论, 下面证明结论 (1) 成立. 任取长度严格大于 n 的对象 $N \in \mathcal{T}_n$, 则 $N \cong R(i, nt+k), i \in Q_0, t \geq 1, 1 \leq k < n$ 或者 $N \cong R(i, nt), i \in Q_0, t \geq 2$. 如果 $N \cong R(i, nt), t \geq 2$, 那么 $R(i, n)$ 是 N 的一个非零真子对象且 $\arg Z([N]) = \arg Z([R(i, n)])$, 由此可知 N 不是稳定的. 如果 $N \cong R(i, nt+k), t \geq 1, 1 \leq k < n$, 那么 $R(i, k)$ 既是 N 的非零子对象也是 N 的非零商对象, 由此可知 N 不是稳定的. $\square$

注 2.1 由命题 2.1 易知, $\mathcal{T}_n$ 上存在离散稳定性条件. 事实上, 记 $\text{ind } \mathcal{T}_{<n}$ 表示所有的长度小于 n 的不可分解幂零表示的同构类构成的集合. 显然, 集合 $\text{ind } \mathcal{T}_{<n}$ 中的不同对象具有不同的维数向量. 因此总可以选取 $Z([S_1]), \dots, Z([S_n]) \in \mathbb{C}^\times$ 使得 $\arg Z(R([1, n])), \arg Z([M]), M \in \text{ind } \mathcal{T}_{<n}$ 两两不相等.

例 2.1 设 $n = 3$, 范畴 $\mathcal{T}_3$ 的 Auslander-Reiten 箭图如下:

其中 $[i, j]$ 表示不可分解对象 $R(i, j)$. 注意到 $G_0(\mathcal{T}_3) \cong \mathbb{Z}[S_1] \oplus \mathbb{Z}[S_2] \oplus \mathbb{Z}[S_3]$, 因此, $\mathcal{T}_3$ 的一个稳定性条件由 $[S_i] (i = 1, 2, 3)$ 的在上半复平面的像唯一确定. 记 $Z: G_0(\mathcal{T}_3) \rightarrow \mathbb{C}$ 表示由

$$Z([S_1]) = 2 + \sqrt{-1}, \quad Z([S_2]) = -2 + \sqrt{-1}, \quad Z([S_3]) = 1 + 2\sqrt{-1}$$

确定的稳定性条件. 直接计算可知, Z 为 $\mathcal{T}_3$ 上的一个离散稳定性条件且 $S_1, S_2, S_3, R(1, 2)$ 和 $R(3, 3)$ 为所有的稳定对象.

设 $Z: G_0(\mathcal{T}_n) \rightarrow \mathbb{C}$ 为稳定性条件. 令 $\arg Z(\sum_{i=1}^n [S_i]) = \gamma \in [0, \pi)$. 对任意的顶点 $i \in Q_0$, 我们定义子集 $C_i = \{i, i-1, \dots, i-t_i\} \subset Q_0$ (如果整数 $x \notin Q_0$, 则考虑它的在 Q_0 中的模 n 剩余类), 其中 $0 \leq t_i \leq n-1$ 是满足如下条件的最大的非负整数:

$$\arg Z([S_i] + [S_{i-1}] + \dots + [S_{i-v}]) \geq \gamma, \quad \forall 0 \leq v \leq t_i.$$

记 $Q_0^{\geq \gamma} = \{i \in Q_0 \mid \arg Z([S_i]) \geq \gamma\} \subset Q_0$. 显然, 集合 C_i 非空当且仅当 $i \in Q_0^{\geq \gamma}$.

引理 2.3 设 $i, j \in Q_0^{\geq \gamma}$. 若 $C_i \cap C_j \neq \emptyset$, 则 $C_i \subseteq C_j$ 或者 $C_j \subseteq C_i$.

证明 设 $s \in C_i \cap C_j$, 则由集合 C_i 和 C_j 的定义可知,

$$A_i^s := \{i, i-1, \dots, s+1, s\} \subseteq C_i \quad \text{和} \quad A_j^s := \{j, j-1, \dots, s+1, s\} \subseteq C_j.$$

不妨假设 $|A_i^s| \leq |A_j^s|$, 则 $A_i^s \subseteq A_j^s$. 特别地, $i \in C_j$, 从而, $C_i \subseteq C_j$. $\square$

定理 2.1 设 $Z: \mathbf{G}_0(\mathcal{T}_n) \rightarrow \mathbb{C}$ 为离散稳定性条件, 则存在唯一的稳定对象 $M \in \mathcal{T}_n$ 使得其维数向量 $\dim M = \delta = (1, 1, \dots, 1)$. 特别地, $\mathcal{T}_n$ 上没有完全离散稳定性条件.

证明 不妨设 $\arg Z(\sum_{i=1}^n [S_i]) = \gamma \in [0, \pi)$, 那么易知 $Q_0^{\geq \gamma} \neq \emptyset$. 对任意的 $i, j \in Q_0^{\geq \gamma}$, 由引理 2.3 知, $C_i \subseteq C_j$ 或者 $C_j \subseteq C_i$ 或者 $C_i \cap C_j = \emptyset$ 成立. 构造集合 $B = \{C_{i_1}, \dots, C_{i_s}\} \subseteq \{C_i \mid i \in Q_0^{\geq \gamma}\}$ 使得其满足对任意的 $1 \leq x \neq y \leq s$, 有 $C_{i_x} \cap C_{i_y} = \emptyset$ 且 $Q_0^{\geq \gamma} \subseteq C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_s}$.

我们断言 $s = 1$. 否则, $s \geq 2$. 对任意的 $C_i \in B$, 定义 $\overline{C}_i = C_i \cup \{i - t_i - 1\}$. 如果 $C_i \neq C_j \in B$, 那么 $\overline{C}_i \cap \overline{C}_j = \emptyset$. 此时有

$$Z\left(\sum_{i=1}^n [S_i]\right) = Z\left(\sum_{j \in \overline{C}_{i_1}} [S_j]\right) + \dots + Z\left(\sum_{j \in \overline{C}_{i_s}} [S_j]\right) + \sum_{j \notin \overline{C}_{i_1} \cup \dots \cup \overline{C}_{i_s}} Z([S_j]).$$

注意到上式右端的每一项的辐角都严格小于 $\gamma = \arg Z(\sum_{i=1}^n [S_i])$, 因此上述等式不成立, 从而 $s = 1$. 特别地, 存在唯一的 $i \in Q_0^{\geq \gamma}$ 使得 $Q_0^{\geq \gamma} \subseteq C_{i_0}$. 进一步地, 由 C_{i_0} 的定义可知 $C_{i_0} = Q_0$, 且由引理 2.1 知对象 $M = R(i_0 + 1, n)$ 为半稳定的. 注意到 Z 为离散稳定性条件, 如果 M 不是稳定的, 那么 M 是某个长度严格小于 n 的稳定对象的迭代扩张. 但是长度小于 n 的不可分解对象的自扩张为零, 由此可知 M 是稳定对象. 注意到 M 有非平凡的自扩张, 因此以 M 为单对象的子范畴 $\mathcal{A}_\mu$ 不是半单的. $\square$

3 量子二重对数与循环箭图

3.1 Hall 代数与量子环面

本节假设 k 为有限域, q 和 $q^{\frac{1}{2}}$ 为形式变量且满足 $(q^{\frac{1}{2}})^2 = q$. 对任意给定的 $L, M, N \in \mathcal{T}_n$, 记

$$F_{L,M}^N = |\{K \mid K \text{ 为 } N \text{ 的子表示且满足 } K \cong L, N/K \cong M\}|,$$

称 $F_{L,M}^N$ 为关于表示 L, M 和 N 的 Hall 数.

设 E 为域 k 的有限域扩张. 对任意的 k -线性空间 V , 令 $V^E := V \otimes_k E$. 记 $\mathcal{T}_n^E$ 表示箭图 Δ_n^{op} 在域 E 上的所有有限维幂零表示的范畴. 对任意的 $L \in \mathcal{T}_n$, 显然有 $L^E \in \mathcal{T}_n^E$. 事实上, 范畴 $\mathcal{T}_n^E$ 的结构不依赖域 E 的改变而改变. 对任意的 $M \in \mathcal{T}_n$, 易知存在多项式 $\text{Aut}_M(q) \in \mathbb{Z}[q]$ 使得对任意的 E 都有 $|\text{Aut}(M^E)| = \text{Aut}_M(|E|)$. 事实上, Ringel^[10] 证明了对任意的 $L, M, N \in \mathcal{T}_n$, 存在多项式 $\phi_{L,M}^N(q) \in \mathbb{Z}[q]$ 使得对任意的有限域扩张 E 都有

$$\phi_{L,M}^N(|E|) = F_{L^E, M^E}^{N^E},$$

该多项式称为表示 L, M 和 N 的 Hall 多项式 (或参见文献 [11, 12]).

记 $\text{Iso}(\mathcal{T}_n)$ 表示范畴 $\mathcal{T}_n$ 的对象同构类的集合. 令 $\mathcal{H}_q(\mathcal{T}_n)$ 表示以 $\{u_L \mid L \in \text{Iso}(\mathcal{T}_n)\}$ 作基的自由 $\mathbb{Z}[q]$ -模. 特别地,

$$\mathcal{H}_q(\mathcal{T}_n) = \bigoplus_{L \in \text{Iso}(\mathcal{T}_n)} \mathbb{Z}[q]u_L.$$

我们在 $\mathcal{H}_q(\mathcal{T}_n)$ 上定义如下的乘法:

$$u_L * u_M = \sum_{N \in \text{Iso}(\mathcal{T}_n)} \phi_{L,M}^N(q) u_N.$$

由文献 [13] 知, $\mathcal{H}_q(\mathcal{T}_n)$ 在上述乘法下构成一个有单位元的结合代数且其单位元为 u_0 , 称 $\mathcal{H}_q(\mathcal{T}_n)$ 为范畴 $\mathcal{T}_n$ 的 Ringel-Hall 代数. 令 $\widehat{\mathcal{H}_q(\mathcal{T}_n)}$ 表示 Ringel-Hall 代数 $\mathcal{H}_q(\mathcal{T}_n)$ 关于理想 $\langle u_L, L \neq 0 \rangle$ 的完备化.

设 $\chi(-, -)$ 为 $G_0(\mathcal{T}_n)$ 上的 Euler 双线性型. 特别地, 对任意的 $M, N \in \mathcal{T}_n$, 有

$$\chi([M], [N]) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_k \text{Ext}^i(M, N) = \dim_k \text{Hom}(M, N) - \dim_k \text{Ext}^1(M, N).$$

令 $\lambda(-, -)$ 为 Euler 双线性型 $\chi(-, -)$ 的反对称化, 即

$$\lambda([M], [N]) = \chi([M], [N]) - \chi([N], [M]), \quad \forall M, N \in \mathcal{T}_n.$$

利用 $\lambda(-, -)$ 我们定义范畴 $\mathcal{T}_n$ 的完备量子环面 $\hat{\mathbb{T}}_{\Delta_n} = \mathbb{Q}(q^{\frac{1}{2}})[[G_0(\mathcal{T}_n)^+]]$ 为域 $\mathbb{Q}(q^{\frac{1}{2}})$ 上的变量为 $y^{\dim M}$ ($M \in \mathcal{T}_n$) 的形式幂级数环, 其中乘法定义为

$$y^{\dim M} \cdot y^{\dim N} = q^{\frac{1}{2}\lambda([M], [N])} y^{\dim M \oplus N}.$$

利用乘法定义, 直接计算可知下面的引理.

引理 3.1 设 $\delta = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^n$. 对任意的 $t \in \mathbb{N}$, 元素 $y^{t\delta}$ 属于完备量子环面 $\hat{\mathbb{T}}_{\Delta_n}$ 的中心.

Reineke^[14] 证明了从遗传范畴的 Ringel-Hall 代数到完备量子环面存在称为可积映射的代数同态. 特别地, 对于循环箭图 Δ_n 的有限维幂零表示范畴 $\mathcal{T}_n$, 我们有如下结果.

引理 3.2 映射

$$\begin{aligned} \int : \widehat{\mathcal{H}_q(\mathcal{T}_n)} &\rightarrow \hat{\mathbb{T}}_{\Delta_n}, \\ u_M &\mapsto q^{\frac{1}{2}\chi([M], [M])} \frac{y^{\dim M}}{\text{Aut}_M(q)} \end{aligned}$$

为代数同态.

3.2 量子二重对数等式

设 $\mathbb{Q}(q^{\frac{1}{2}})[[y]]$ 是变量为 y 的形式幂级数环. 称形式幂级数

$$\mathbb{E}(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{m^2}{2}}}{(q^m - q^{m-1}) \cdots (q^m - 1)} y^m \in \mathbb{Q}(q^{\frac{1}{2}})[[y]]$$

为量子二重对数. 对于循环箭图 Δ_n , 我们有如下结论.

定理 3.1 设 $Z : G_0(\mathcal{T}_n) \rightarrow \mathbb{C}$ 为离散稳定性条件, 则幂级数

$$\mathbb{E}_Z := \prod_{\substack{L \text{ 稳定且 } \dim L \neq \delta}}^{\wedge} \mathbb{E}(y^{\dim L}) \in \hat{\mathbb{T}}_{\Delta_n},$$

与离散稳定性条件 Z 的选取无关, 其中等式右边乘积按 L 的相位从大到小排列.

证明 由 Z 为离散稳定性条件和 Harder-Narasimhan 滤过知, 在 $\widehat{\mathcal{H}}_q(\mathcal{T}_n)$ 中, 我们有如下等式:

$$\sum_{L \in \text{Iso}(\mathcal{T}_n)} u_L = \widehat{\prod}_{\mu \in [0, \pi)} \left(\sum_{L \in \text{Iso}(\mathcal{A}_\mu)} u_L \right),$$

其中右端乘积按 μ 从大到小排列. 由命题 2.1 知, 至多只有有限个 μ 使得范畴 $\mathcal{A}_\mu$ 非零, 不妨设为 $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_t$. 令 L_i 为范畴 $\mathcal{A}_{\mu_i}$ ($i = 1, \dots, t$) 的唯一的单对象. 另一方面, 由定理 2.1 知, 存在唯一的 $1 \leq s \leq t$ 使得范畴 $\mathcal{A}_{Z, \delta} := \mathcal{A}_{\mu_s}$ 不是半单的且 $\dim L_s = \delta$. 因此, 可以将上述等式重写为

$$\sum_{L \in \text{Iso}(\mathcal{T}_n)} u_L = \widehat{\prod}_{\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_t} \left(\sum_{L \in \text{Iso}(\mathcal{A}_{\mu_i})} u_L \right).$$

应用引理 3.2 中的代数同态可得

$$\int \sum_{L \in \text{Iso}(\mathcal{T}_n)} u_L = \widehat{\prod}_{\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_t} \int \left(\sum_{L \in \text{Iso}(\mathcal{A}_{\mu_i})} u_L \right).$$

令

$$\mathbb{E}_{Z, \delta} := \int \sum_{L \in \text{Iso}(\mathcal{A}_{\mu_s})} u_L.$$

由引理 3.1 知, $\mathbb{E}_{Z, \delta}$ 属于 $\hat{\mathbb{T}}_{\Delta_n}$ 的中心. 另一方面, 对任意的 $i \neq s$, 范畴 $\mathcal{A}_{\mu_i}$ 为半单的且具有唯一的单对象 L_i , 计算可知,

$$\int \sum_{L \in \text{Iso}(\mathcal{A}_{\mu_i})} u_L = \mathbb{E}(y^{\dim L_i}).$$

因此,

$$\begin{aligned} \int \sum_{L \in \text{Iso}(\mathcal{T}_n)} u_L &= \widehat{\prod}_{\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_t} \int \left(\sum_{L \in \text{Iso}(\mathcal{A}_{\mu_i})} u_L \right) = \mathbb{E}_{Z, \delta} \widehat{\prod}_{i \neq s} \int \left(\sum_{L \in \text{Iso}(\mathcal{A}_{\mu_i})} u_L \right) \\ &= \mathbb{E}_{Z, \delta} \widehat{\prod}_{L \text{ 稳定且 } \dim L \neq \delta} \mathbb{E}(y^{\dim L}). \end{aligned}$$

注意到子范畴 $\mathcal{A}_{Z, \delta}$ 在范畴等价意义下与离散稳定性条件 Z 的选取无关, 因此, $\mathbb{E}_{Z, \delta}$ 与 Z 的选取无关且在 $\hat{\mathbb{T}}_{\Delta_n}$ 中可逆. 另一方面, 上述等式左边显然也与离散稳定性条件 Z 的选取无关, 由此可知, $\mathbb{E}_Z$ 也与 Z 的选取无关. $\square$

注 3.1 由定理 3.1 知, 循环箭图 Δ_n 上的非交换 Donaldson-Thomas 不变量是良定的 (参见文献 [5, 第 4 节]).

例 3.1 设 Δ_3 为如下箭图:

记 $J = J(\Delta_3, W)$ 表示由带势箭图 (Δ_3, W) 定义的 Jacobi 代数, 其中势 $W = cba$. 特别地, $J = k\Delta_3 / \langle ba, cb, ac \rangle$ 为路代数 $k\Delta_3$ 的商代数. 记 $\text{mod } J$ 表示代数 J 的有限维右模范畴. 易知 $\text{mod } J$ 等同于范畴 $\mathcal{T}_3$

的一个子范畴, 且在此等同意义下有 $G_0(\text{mod } J) = G_0(\mathcal{T}_3)$. 因此, 范畴 $\text{mod } J$ 上的稳定性条件可以自然地成为范畴 $\mathcal{T}_3$ 上的稳定性条件, 但是需要注意的是, 范畴 $\text{mod } J$ 上的离散稳定性条件不一定是 $\mathcal{T}_3$ 上的离散稳定性条件.

事实上, 对任意给定的离散稳定性条件 $Z : G_0(\text{mod } J) \rightarrow \mathbb{C}$, 总可以找到一个离散稳定性条件 $Z_\epsilon : G_0(\text{mod } J) \rightarrow \mathbb{C}$ 使得在 Z 和 Z_ϵ 意义下的稳定对象相同且稳定对象的相位的大小关系一致. 进一步地, Z_ϵ 是范畴 $\mathcal{T}_3$ 上的离散稳定性条件. 由定理 2.1 知, $\mathcal{T}_3$ 的 Z_ϵ -稳定对象恰为 $\text{mod } J$ 的 Z_ϵ -稳定对象并上 $\mathcal{T}_3$ 中的一个具有维数向量为 $(1, 1, 1)$ 的 Z_ϵ -稳定对象. 由定理 3.1 知, 对于代数 J , 有

$$\mathbb{E}_Z := \prod_{M \text{ Z-稳定}}^{\widehat{}} \mathbb{E}(y^{\dim M}) \in \hat{\mathbb{T}}_{\Delta_3}$$

与离散稳定性条件 Z 的选取无关. 特别地, 文献 [5, 猜想 3.2] 对代数 J 成立. 需要指出的是, 文献 [15] 对任意的表示有限的 Jacobi 代数证明了文献 [5, 猜想 3.2].

3.3 循环量子二重对数等式

设 Q 为有限箭图, $\hat{\mathbb{T}}_Q$ 为 Q 的完备量子环面. 称量子二重对数的乘积 $\mathbb{E} \in \hat{\mathbb{T}}_Q$ 为阶为 n 的循环量子二重对数 (参见文献 [16]), 如果存在 $\hat{\mathbb{T}}_Q$ 的阶为 n 的自同构 ψ 使得 $\mathbb{E} = \psi^i(\mathbb{E})$, $1 \leq i \leq n-1$. Bytsko 和 Volkov [16] 对某些特殊的箭图得到了一系列阶为 3 的循环量子二重对数等式. 本小节将证明任意给定的 $\mathcal{T}_n$ 上的离散稳定性条件可以自然诱导出 $\hat{\mathbb{T}}_{\Delta_n}$ 中的阶为 n 的循环量子二重对数等式.

记 $\tau : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$ 表示 Auslander-Reiten 函子, 此时 τ 为范畴 $\mathcal{T}_n$ 上的阶为 n 的自等价. 自然地, τ 诱导了 $G_0(\mathcal{T}_n)$ 和 $\hat{\mathbb{T}}_{\Delta_n}$ 上的阶为 n 的自同构. 我们将上述自同构仍记为 $\tau : G_0(\mathcal{T}_n) \rightarrow G_0(\mathcal{T}_n)$ 和 $\tau : \hat{\mathbb{T}}_{\Delta_n} \rightarrow \hat{\mathbb{T}}_{\Delta_n}$. 易知 $\tau(y^{\dim M}) = y^{\dim \tau M}$.

设 $Z : G_0(\mathcal{T}_n) \rightarrow \mathbb{C}$ 为稳定性条件, 令 $Z_\tau := Z \circ \tau : G_0(\mathcal{T}_n) \rightarrow \mathbb{C}$ 为 τ 与 Z 的复合. 下述结果显然成立.

- 引理 3.3** (1) Z 是离散稳定性条件当且仅当 Z_τ 是离散稳定性条件;
 (2) $M \in \mathcal{T}_n$ 关于 Z 稳定当且仅当 $\tau^{-1}M$ 关于 Z_τ 稳定;
 (3) $\arg Z([M]) > \arg Z([N])$ 当且仅当 $\arg Z_\tau([\tau^{-1}M]) > \arg Z_\tau([\tau^{-1}N])$, 其中 $M, N \in \mathcal{T}_n$.

定理 3.2 设 $Z : G_0(\mathcal{T}_n) \rightarrow \mathbb{C}$ 为离散稳定性条件, 则 $\mathbb{E}_Z = \tau(\mathbb{E}_Z) = \cdots = \tau^{n-1}(\mathbb{E}_Z) \in \hat{\mathbb{T}}_{\Delta_n}$.

证明 注意到 $\tau : \hat{\mathbb{T}}_{\Delta_n} \rightarrow \hat{\mathbb{T}}_{\Delta_n}$ 是阶为 n 的自同构, 因此只需要证明 $\mathbb{E}_Z = \tau^{n-1}(\mathbb{E}_Z)$. 对

$$\mathbb{E}_Z = \prod_{L \text{ Z-稳定且 } \dim L \neq \delta}^{\widehat{}} \mathbb{E}(y^{\dim L})$$

两边同时作用 τ^{n-1} 并应用引理 3.3 和定理 3.1 可得

$$\begin{aligned} \tau^{n-1}(\mathbb{E}_Z) &= \prod_{L \text{ Z-稳定且 } \dim L \neq \delta}^{\widehat{}} \mathbb{E}(y^{\dim \tau^{-1}L}) = \prod_{\tau^{-1}L \text{ Z-稳定且 } \dim \tau^{-1}L \neq \delta}^{\widehat{}} \mathbb{E}(y^{\dim \tau^{-1}L}) \\ &= \mathbb{E}_{Z_\tau} = \mathbb{E}_Z. \end{aligned}$$

证毕. □

参考文献

- 1 Schützenberger M P. Une interprétation de certaines solutions de l'équation fonctionnelle: $F(x+y) = F(x)F(y)$. C R Math Acad Sci Paris, 1953, 236: 352–353
- 2 Faddeev L D, Volkov A Y. Abelian current algebra and the Virasoro algebra on the lattice. Phys Lett B, 1993, 315: 311–318
- 3 Faddeev L D, Kashaev R M. Quantum dilogarithm. Modern Phys Lett A, 1994, 9: 427–434
- 4 Fock V V, Goncharov A B. The quantum dilogarithm and representations of quantum cluster varieties. Invent Math, 2009, 172: 223–286
- 5 Keller B. On cluster theory and quantum dilogarithm identities. In: Representations of Algebras and Related Topics. Zürich: European Mathematical Society, 2011, 85–116
- 6 Kontsevich M, Soibelman Y. Stability structures, Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations. ArXiv:0811.2435, 2008
- 7 Kashaev R M, Nakanishi T. Classical and quantum dilogarithm identities. SIGMA Symmetry Integrability Geom Methods Appl, 2011, 7: 29 pages
- 8 Reineke M. Poisson automorphisms and quiver moduli. J Inst Math Jussieu, 2010, 9: 653–667
- 9 King A D. Moduli representations of finite-dimensional algebras. Quart J Math Oxford Ser (2), 1994, 45: 515–530
- 10 Ringel C M. The composition algebra of a cyclic quiver-Towards an explicit description of the quantum group of type $\tilde{A}_n$. Proc Lond Math Soc (3), 1993, 66: 507–537
- 11 Guo J Y. The Hall polynomials of a cyclic serial algebra. Comm Algebra, 1995, 23: 743–751
- 12 Peng L G, Zhang S H. Calculation for Ringel-Hall numbers of cyclic serial algebras. Comm Algebra, 2001, 29: 493–501
- 13 Ringel C M. Hall algebras. In: Topic in Algebra, Part I. Warsaw: Banach Centre Publisher, 1990, 433–447
- 14 Reineke M. The Harder-Narasimhan system in quantum groups and cohomology of quiver moduli. Invent Math, 2003, 152: 349–368
- 15 Engenhorst M. Tilting and refined Donaldson-Thomas invariants. J Algebra, 2014, 400: 299–314
- 16 Bytsko A, Volkov A. Tetrahedron equation and cyclic quantum dilogarithm identities. Int Math Res Not IMRN, 2015, 4: 1075–1100

Quantum dilogarithm identities and cyclic quivers

FU ChangJian & PENG LianGang

Abstract We study quantum dilogarithm identities for cyclic quivers following Reineke's idea via Ringel-Hall algebra approach. For any given discrete stability function for the cyclic quiver Δ_n with n vertices, we obtain certain cyclic quantum dilogarithm identities of order n in the sense of Bytsko and Volkov.

Keywords quantum dilogarithm, cyclic quiver, Ringel-Hall algebra

MSC(2010) 16G20, 16S35

doi: 10.1360/N012016-00248