轴对称 Navier-Stokes 方程改进的 Liouville 定理

献给李大潜教授 80 华诞

雷震^{1*}, 张旗², 赵娜¹

1. 复旦大学数学科学学院, 上海 200433;

2. Department of Mathematics, University of California, Riverside, Riverside, CA 92521, USA

E-mail: zlei@fudan.edu.cn, qizhang@math.ucr.edu, nzhaol3@fudan.edu.cn

收稿日期: 2016-08-22; 接受日期: 2016-12-12; 网络出版日期: 2017-01-23; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11421061 和 11222107) 资助项目

摘要 本文研究不可压缩 Navier-Stokes 方程的古代解所具有的 Liouville 性质. 在二维情形以及三维轴对称具平凡角向速度 ($v_\theta = 0$) 情形下, 本文证明了光滑的温和古代解的“最优” Liouville 定理, 即当涡度满足一定条件且速度场 v 关于空间变量次线性增长时, v 恒为常向量, 并且在速度场线性增长条件下给出了非平凡古代解的反例. 其中, 在二维情形下, 涡度 w 需要满足的条件为, 对所有的 $t \in (-\infty, 0)$ 一致成立 $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |w(x, t)| = 0$; 在三维轴对称具平凡角向速度情形下, 涡度 w 需要满足的条件为, 对所有的 $t \in (-\infty, 0)$ 一致成立 $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{|w(x, t)|}{r} = 0$. 在三维轴对称具非平凡角向速度 ($v_\theta \neq 0$) 的情形下, 本文证明了, 若 $\Gamma = rv_\theta \in L_t^\infty L_x^p(\mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0))$, 其中 $1 \leq p < \infty$, 则有界的温和古代解必为常向量.

关键词 Navier-Stokes 方程 古代解 Liouville 定理

MSC (2010) 主题分类 35Q30, 76D05

1 引言

众所周知, Navier-Stokes 方程是描述不可压缩黏性流体的运动随时间变化规律的模型, 且具有以下形式:

$$\begin{cases} v_t + v \cdot \nabla v + \nabla p = \Delta v, \\ \nabla \cdot v = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $v(x, t)$ 表示流体的运动速度, $p(x, t)$ 表示压强. 在二维情形下, Navier-Stokes 方程的解是整体适定的. 但在三维情形, Navier-Stokes 方程的整体适定性问题是一个很难的公开问题. 即便考虑三维轴对称这种特殊的解, 该问题仍然没有被完全解决.

英文引用格式: Lei Z, Zhang Q, Zhao N. Improved Liouville theorems for axially symmetric Navier-Stokes equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1183–1198, doi: 10.1360/N012016-00149

为了叙述结果的方便性, 我们首先回顾一下三维轴对称解的一些基本内容. 三维轴对称解指的是具有如下形式的解:

$$\begin{cases} v(x, t) = v_r(r, z, t)e_r + v_\theta(r, z, t)e_\theta + v_z(r, z, t)e_z, \\ p(x, t) = p(r, z, t), \end{cases}$$

且 v_r 、 v_θ 、 v_z 和 p 均与 θ 无关, 其中 $r = r(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\{e_r, e_\theta, e_z\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一组标准正交基,

$$e_r = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{r} \\ \frac{x_2}{r} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_\theta = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{r} \\ \frac{x_1}{r} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

此时在柱坐标 (r, θ, z) 下, $(x_1, x_2, x_3) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$. 对于 (v_r, v_θ, v_z, p) , 不可压缩的轴对称 Navier-Stokes 方程可以写为

$$\begin{cases} \partial_t v_r + (v_r e_r + v_z e_z) \cdot \nabla v_r - \frac{(v_\theta)^2}{r} + \partial_r p = \left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) v_r, \\ \partial_t v_\theta + (v_r e_r + v_z e_z) \cdot \nabla v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} = \left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) v_\theta, \\ \partial_t v_z + (v_r e_r + v_z e_z) \cdot \nabla v_z + \partial_z p = \Delta v_z, \\ \partial_r v_r + \frac{v_r}{r} + \partial_z v_z = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 Δ 和 ∇ 分别指的是柱坐标下的 Laplace 算子和梯度算子, 即

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \partial_z^2, \quad \nabla = \left(\partial_r, \frac{1}{r} \partial_\theta, \partial_z \right).$$

当 $v_\theta = 0$, 即 v 具平凡角向速度时, 方程 (1.2) 简化为

$$\begin{cases} \partial_t v_r + (v_r e_r + v_z e_z) \cdot \nabla v_r + \partial_r p = \left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) v_r, \\ \partial_t v_z + (v_r e_r + v_z e_z) \cdot \nabla v_z + \partial_z p = \Delta v_z, \\ \nabla \cdot v = \partial_r v_r + \frac{v_r}{r} + \partial_z v_z = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

对于方程 (1.3), Ladyženskaya^[1] 及 Uchoviskii 和 Yudovich^[2] 分别独立证明了其正则解的整体存在性 (也可参见文献 [3]). 对于一般的 $v_\theta \neq 0$, 方程 (1.2) 的整体适定性问题仍然是不清楚的. 许多专家做了很多这方面的工作, 如文献 [4–10]. 这里需要着重说明的是, Chen 等^[11, 12] 证明了在速度场满足 $r|v| \leq C < \infty$ 的条件下, 方程 (1.2) 的适当弱解 (suitable weak solution) 是正则的, 其中上述 C 以及后文中出现的 C 均代表一个正常数, 并且 C 的取值会随着公式的变化而变化. 他们的方法基于 Nash^[13], Moser^[14] 和 De Giorgi^[15] 的经典结果. Koch 等^[16] 利用完全不同的方法证明了同样的结果 (也可参见 Seregin 等^[17] 的局部正则性结果). 他们证明方法的核心便是 Navier-Stokes 方程古代解的 Liouville 定理. Lei 和 Zhang^[18] 在速度场属于 $L^\infty(\text{BMO}^{-1})$ (bounded mean oscillation 简称为 BMO) 的条件下也得到了相应的 Liouville 定理及解的整体适定性. 换句话说, 他们在证明了 Liouville 定理的基础上解决了轴对称情形 Navier-Stokes 方程 $L^\infty([0, \infty); \text{BMO}^{-1})$ 解的整体正则性问题. Chae^[19] 考虑了其他类型的 Liouville 定理. 其他关于 Navier-Stokes 方程轴对称解的结果也可参见文献 [20–23].

为了更好地说明文献 [16] 中结果, 我们回顾一下 Navier-Stokes 方程的 Liouville 定理需要用到的概念. 一个速度场称为 Navier-Stokes 方程的古代解, 指的是它在时间区间 $(-\infty, 0)$ 上存在, 并且在某种意义下满足方程. 在分布意义下满足方程 (1.1) 的古代解称为古代弱解. 如果存在一个时间序列 $t_k \rightarrow -\infty$ 使得 v 在 t_k 处有定义, 且

$$v(t) = S(t - t_k)v(t_k) + \int_{t_k}^t S(t - s)P\nabla \cdot (v(s) \otimes v(s))ds, \quad t \in (t_k, 0),$$

那么 v 被称为方程 (1.1) 的温和古代解, 其中 S 指的是热方程的解算子, P 是 Helmholtz 投影. 由上述定义可知, 古代弱解容许形如

$$v(x, t) = b(t), \quad p(x, t) = -b'(t)x$$

的“寄生解”存在, 但温和古代解排除了这种解的存在性.

Koch 等^[16] 提出了关于不可压缩 Navier-Stokes 方程解的 Liouville 定理的猜想: 有界的温和古代解必是常数. 该作者在二维情形以及三维轴对称情形具平凡角向速度时或者 $r|v| \leq C$ 时证明了该猜想. 此后, 文献 [18] 证明了在三维轴对称的情形下, 当流函数 (stream function) 在 BMO 空间中时成立 Liouville 定理 (参见文献 [24, 25] 给出的关于文献 [18] 结果的新证明).

本文的一个主要结果是推广了文献 [16] 中关于 Liouville 定理的猜想. 我们提出: 当涡度满足一定的条件时, 若不可压缩 Navier-Stokes 方程光滑的温和古代解 v 关于空间是次线性增长的, 则同样成立 Liouville 定理. 我们在二维和三维轴对称 $v_\theta = 0$ 时证明了该结论 (见定理 1.1 和 1.2). 此外, 我们需要指出的是, 文献 [16] 提出的关于不可压缩 Navier-Stokes 方程古代解的 Liouville 定理的猜想中需要 v 是有界的条件, 但在我们的结果中不需要 v 有界. 我们在 v 关于空间线性增长的情形下给出了非平凡古代解的反例, 这表明, 我们在速度场关于空间变量次线性增长的条件下得到的 Liouville 定理是“最优”的.

本文的另一个主要结果是, 在三维轴对称 Navier-Stokes 方程具非平凡角向速度情形下得到的有界解的 Liouville 定理 (见定理 1.3). 假设 v 是轴对称 Navier-Stokes 方程有界的温和古代解, 且 $v_\theta \neq 0$. 令 $\Gamma = rv_\theta$, 我们证明了, 若 $\Gamma \in L_t^\infty L_x^p$, 其中 $1 \leq p < \infty$, 则 v 恒为常向量. 如前所述, 文献 [16] 提出了 Navier-Stokes 方程 Liouville 定理的猜想: 假设 v 为 Navier-Stokes 方程的温和古代解, 若 $|v| \leq C$, 则 v 恒为常向量. 事实上, 在三维轴对称情形下, 该猜想可以加上 $\Gamma \in L_t^\infty L_x^\infty$ 的条件. 在 $v_\theta \neq 0$ 时, 文献 [16] 在 $|v| \leq \frac{C}{r}$ 的条件下证明了该猜想. 需要指出的是, 在本文的结果中, 我们只对 v 的一个分量 v_θ 作了要求, 并未对其他两个分量作要求. 另外, 我们虽然没有完全证明文献 [16] 中猜想, 但本文的结果也是证明该猜想的一个进展, 这是因为我们在 $\Gamma \in L_t^\infty L_x^p$ 的条件下证明了该猜想, 这里的 p 可以是任意接近无穷的数.

我们的主要结果叙述如下.

定理 1.1 设 v 是二维不可压缩 Navier-Stokes 方程光滑的温和古代解, $w = \nabla \times v$ 是涡度. 若对所有的 $t \in (-\infty, 0)$ 一致成立

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |w(x, t)| = 0, \quad (1.4)$$

则 $w \equiv 0$ 并且 v 是调和的.

进一步, 若 v 还满足对所有的 $t \in (-\infty, 0)$ 一致成立

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{|v(x, t)|}{|x|} = 0, \quad (1.5)$$

则 v 恒为常向量.

定理 1.2 设 v 是三维不可压缩轴对称 Navier-Stokes 方程具平凡角向速度 ($v_\theta = 0$) 时光滑的温和古代解, $w = \nabla \times v = w_\theta e_\theta$ 是涡度. 定义 $\Omega = \frac{w_\theta}{r}$. 若对所有的 $t \in (-\infty, 0)$ 一致成立

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} |\Omega| = 0, \quad (1.6)$$

则 $w_\theta \equiv 0$ 并且 v 是调和的.

进一步, 若 v 还满足对所有的 $t \in (-\infty, 0)$ 一致成立

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{|v(x, t)|}{|x|} = 0, \quad (1.7)$$

则 v 恒为常向量.

定理 1.3 设 v 是三维不可压缩轴对称 Navier-Stokes 方程有界的温和古代解. 令 $\Gamma = rv_\theta$, 若 $\Gamma \in L_t^\infty L_x^p(\mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0))$, 其中 $1 \leq p < \infty$, 则 v 恒为常向量.

本文的主要内容结构如下: 第 2 节将对不可压缩 Navier-Stokes 方程的爆破速率以及古代解的研究发展作一些总结; 第 3 节将在二维情形下证明不可压缩 Navier-Stokes 方程光滑的温和古代解的 Liouville 定理, 即定理 1.1; 第 4 节将在三维轴对称具平凡角向速度的情形下证明不可压缩 Navier-Stokes 方程光滑的温和古代解的 Liouville 定理, 即定理 1.2; 第 5 节将在 $\Gamma \in L_t^\infty L_x^p$ 的条件下证明有界的温和古代解必为常向量, 即定理 1.3.

2 预备知识

如前所述, 古代解的 Liouville 定理研究与解的正则性相关, 或者说与解的爆破问题有关. 本节先讲述解的爆破速率的相关内容, 然后讲述如何利用 Liouville 定理来证明解的爆破速率, 最后总结一下文献 [16] 中有界解的 Liouville 定理的相关结论以及简要的证明思路.

2.1 解的爆破速率

在三维情形下, 不可压缩 Navier-Stokes 方程具有有限能量的大初值整体解的适定性问题目前还是不清楚的. 如果能够证明解在有限时间可以爆破, 那么也就说明了解不是整体适定的, 这使得研究解的爆破问题变得十分重要.

我们知道, Navier-Stokes 方程具有天然的尺度不变性 (scale-invariance), 若 (v, p) 是方程 (1.1) 的解, 对于任意的 $\lambda > 0$, 我们作如下的尺度变换:

$$v_\lambda(x, t) = \lambda v(\lambda x, \lambda^2 t), \quad p_\lambda(x, t) = \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t), \quad (2.1)$$

则变换之后的 v_λ 和 p_λ 仍然是方程 (1.1) 的解. 在说明方程的爆破速率前, 我们先介绍一些常用的记号. 令 $X_0 = (x_0, t_0)$ 表示 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ 中的一个时空点. 令 $R > 0$, $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^3$ 表示以 x_0 为球心、 R 为半径的球. $Q_R(x_0, t_0) = B_R(x_0) \times (t_0 - R^2, t_0)$ 表示以 X_0 为中心的抛物柱. 如果抛物柱的中心在原点, 那么我们简记 $B_R = B_R(0)$ 及 $Q_R = Q_R(0, 0)$.

假设不可压缩 Navier-Stokes 方程的解 $v(x, t)$ 在 $X_0 = (x_0, t_0)$ 处爆破. Leray [26] 证明了存在一个正常数 ϵ_0 , 使得解关于时间的爆破速率至少为

$$\|v(\cdot, t)\|_{L_x^\infty} \geq \frac{\epsilon_0}{\sqrt{t_0 - t}}.$$

Caffarelli 等^[27] 证明了, 对于这样一个爆破解, 存在一个正常数 ϵ_1 , 使得 v 在 $Q_R(x_0, t_0)$ 上应该满足

$$\left(\frac{1}{|Q_R|} \int_{Q_R(x_0, t_0)} |v|^3 + |p|^{\frac{3}{2}} dx dt \right)^{\frac{1}{3}} \geq \frac{\epsilon_1}{R}.$$

一个自然而有意义的猜测是, 如果解在 (x_0, t_0) 点爆破, 那么解的爆破速率至少是

$$|v(x, t)| \sim \frac{O(1)}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (t_0 - t)}}. \quad (2.2)$$

事实上, 这个爆破速率在天然的尺度变换 (2.1) 下是不变的. 也就是说, 对于由 (2.1) 得到的 $v_\lambda(x, t)$, 同样有

$$|v_\lambda(x, t)| = |\lambda v(\lambda x, \lambda^2 t)| \sim \frac{O(1)}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (t_0 - t)}}.$$

Serrin 判定准则^[28-34] 告诉我们, 如果解在抛物柱 Q_1 中满足

$$\|v\|_{L_t^s L_x^q(Q_1)} < \infty, \quad \frac{3}{q} + \frac{2}{s} \leq 1, \quad 2 \leq s < \infty, \quad 3 < q \leq \infty, \quad (2.3)$$

那么解是光滑的. 对于任意一个区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, 我们定义

$$\|v\|_{L_t^s L_x^q(\Omega \times (t_1, t_2))} = \| \|v\|_{L_x^q(\Omega)} \|_{L_t^s(t_1, t_2)}.$$

对于任意的 $X_0 = (x_0, t_0) \in Q_1$, (2.3) 说明了 v 的模的局部小性, 即

$$\lim_{R \rightarrow 0} \|v\|_{L_t^s L_x^q(Q_R(x_0, t_0))} = 0. \quad (2.4)$$

因此, (2.3) 称作 ϵ -正则性. 对于端点情形, 即 $q = 3, s = \infty$ 时, (2.4) 并不能由 (2.3) 得到, 文献 [35] 给出了端点情形的正则性理论. 然而, 这些准则并没有排除掉在尺度不变的爆破速率 (2.2) 下解的爆破可能. 如果解满足如下估计:

$$|v(x, t)| \leq \frac{C}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (t_0 - t)}}, \quad (2.5)$$

解是否是正则的仍然是不清楚的.

在三维轴对称这种特殊情形下, 文献 [11, 12] 排除了满足 (2.5) 的解爆破的可能性. 也就是说, 满足 (2.5) 的不可压缩 Navier-Stokes 方程的三维轴对称解不会爆破. 事实上, 文献 [12] 证明了解在满足

$$|v| \leq \frac{C}{r} \quad (2.6)$$

时不会爆破, 此处需要说明的是, 条件 (2.6) 要比条件 (2.5) 弱. 文献 [11, 12] 证明的关键步骤在于证明了 $\Gamma = rv_\theta$ 在 $r = 0$ 和 $t = 0$ 处是 Hölder 连续的, 即

$$|\Gamma| \leq Cr^\alpha, \quad (2.7)$$

其中 $\alpha > 0$ 为某个常数¹⁾. 我们知道, 对于三维轴对称解, 当 $v_\theta \neq 0$ 时, 方程 (1.2) 的整体适定性问题是不清楚的. 但是, 由文献 [27] 中的部分正则性理论可知, 三维轴对称解的奇点一定只存在于对称轴

¹⁾最近, Lei 和 Zhang^[36] 证明了, 如果 $\Gamma \leq C_* |\ln r|^{-2}$, 即 Γ 具有某种连续模估计, 则解是光滑的 (也可以参见文献 [37] 的一个改进结果).

(即 $r = 0$) 上, 而不能存在于其他地方. 这是因为任何远离对称轴的奇点会围成一个圈, 与文献 [27] 中的结论矛盾. 对于三维轴对称的 Navier-Stokes 方程来讲, Γ 是一个比较特殊的量. Γ 满足如下的抛物方程:

$$\partial_t \Gamma + b \cdot \nabla \Gamma + \frac{2}{r} \partial_r \Gamma = \Delta \Gamma, \quad (2.8)$$

其中 $b = v_r e_r + v_z e_z$, 需要指出的是 Γ 满足极值原理. (2.7) 是一个打破伸缩的估计, 因此可以将问题转化为 “ ϵ - 正则性” 的问题. 为了证明 Γ 的 Hölder 连续性, 文献 [11] 应用了 De Giorgi-Moser 迭代法, 文献 [12] 应用了 Nash 的方法.

2.2 Liouville 定理与解的爆破

在研究解的爆破时, Liouville 定理也是重要的方法之一. 文献 [16] 利用 Liouville 定理证明了, 如果轴对称的 Navier-Stokes 方程定义在 $\mathbb{R}^3 \times (0, T)$ 上的弱解对任意的 $T' < T$ 均属于 $L_{x,t}^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0, T'))$, 且满足

$$|v(x, t)| \leq \frac{C}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, T), \quad (2.9)$$

那么解在 T 时刻不会爆破.

该结论证明的方法主要是伸缩变换的技巧. 为说明方便, 我们假设解是 $\mathbb{R}^3 \times (0, T')$ 上的有界温和解. 如果解在 T 时刻产生奇性, 那么, 我们可以利用伸缩变换的方法构造出一个有界的温和古代解. 具体方法如下: 令 $h(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |v(x, t)|$, 则由文献 [26] 中 Leray 的结果可知,

$$h(t) \geq \frac{C}{\sqrt{T-t}}, \quad (2.10)$$

其中 $C > 0$ 为某个常数. 令 $H(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} h(s)$, 则存在一个点列 $t_k \nearrow T$ 使得 $h(t_k) = H(t_k)$. 选取一个数列 $\gamma_k \searrow 1$, 对于每一个 k , 令 $N_k = H(t_k)$, 并选取 $x_k \in \mathbb{R}^3$ 使得 $M_k = |v(x_k, t_k)| \geq \frac{N_k}{\gamma_k}$. 我们令

$$v_k(y, s) = \frac{1}{M_k} v\left(x_k + \frac{y}{M_k}, t_k + \frac{s}{M_k^2}\right), \quad (2.11)$$

那么函数列 v_k 定义在 $\mathbb{R}^3 \times (A_k, B_k)$ 上, 其中 $A_k = -M_k^2 t_k$, $B_k = M_k^2 (T - t_k) \geq \frac{C^2}{\gamma_k^2}$. 另外, 由 v_k 的定义可知其在 $\mathbb{R}^3 \times (A_k, 0)$ 上满足

$$|v_k| \leq \gamma_k \quad \text{且} \quad |v_k(0, 0)| = 1. \quad (2.12)$$

同样, v_k 也是 Navier-Stokes 方程在 $\mathbb{R}^3 \times (A_k, 0)$ 上的温和解, 带有初始值 $v_{k0}(y) = \frac{1}{M_k} v_0(x_k + \frac{y}{M_k})$. 可以证明 v_k 中存在一个子列收敛到 Navier-Stokes 方程的温和古代解 $\bar{v}$, 且 $\bar{v}$ 满足

$$|\bar{v}(y, s)| \leq 1, \quad (y, s) \in \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0) \quad \text{且} \quad |\bar{v}(0, 0)| = 1. \quad (2.13)$$

我们记 $x_k = (x'_k, x_{k3})$, 其中 $x'_k = (x_{k1}, x_{k2})$. 由 (2.9) 知, $|x'_k| \leq \frac{C}{M_k}$. 这说明 v_k 也是轴对称的解, 因此, 极限函数 $\bar{v}$ 也是轴对称的解 (以某条平行于 y_3 方向的线为轴). 同时由于 (2.9) 是尺度不变的, 因此极限函数 $\bar{v}$ 也满足该条件. 综上可知, $\bar{v}$ 是一个三维轴对称 Navier-Stokes 方程有界的温和古代解, 并且满足条件 (2.9), 由 Liouville 定理知, $\bar{v} = 0$. 但由 (2.13) 知 $\bar{v}(0, 0) = 1$, 这便产生了矛盾, 从而解在 T 时刻没有奇性.

2.3 有界解的 Liouville 定理

由第 2.2 小节的证明思路可以看出, Liouville 定理在证明中起到了关键作用. 文献 [16] 提出了不可压缩 Navier-Stokes 方程古代解的 Liouville 定理的猜想, 即有界的温和古代解必为常数. 该文献证明了二维情形以及三维轴对称情形时的 Liouville 定理, 具体可分为以下几个结论.

2.3.1 二维情形

我们回顾一下文献 [16] 中二维情形下 Liouville 定理的结论以及简要的证明思路. 在二维情形下, Liouville 定理表述如下: 若 v 是二维 Navier-Stokes 方程有界的温和古代解, 则 v 恒为常向量.

二维情形时的证明主要依赖于涡度的方程. 令 $w = \nabla \times v$ 表示流体的涡度, 则在二维情形下, 涡度是一个标量, 即

$$w = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1,$$

并且 w 满足以下方程:

$$w_t + v \cdot \nabla w - \Delta w = 0. \quad (2.14)$$

w 满足 Harnack 不等式, 由此可以说明, 如果 $w \not\equiv 0$, 那么在很大一个时空区域中, w 会与它的最大值或最小值很接近, 这便是文献 [16] 中证明的极值原理的扰动. 若 w 在很大的时空区域中均接近于它的极大值或极小值, 则速度 v 是不可能有限界的, 因此 $w \equiv 0$. 由此可知,

$$\nabla \cdot v = 0, \quad \nabla \times v = 0$$

在全空间上成立, 从而由 $\Delta v = \nabla(\nabla \cdot v) - \nabla \times \nabla \times v$ 知, 在全空间上成立 $\Delta v = 0$. 由于 v 在全空间上有界, 因此由通常的 Liouville 定理可知 v 恒为常向量.

2.3.2 三维轴对称情形

在三维轴对称情形, 文献 [16] 考虑了 $v_\theta = 0$ 和 $v_\theta \neq 0$ 两种情形.

(1) $v_\theta = 0$.

对于 $v_\theta = 0$ 的情形, Liouville 定理表述如下: 若 v 是三维轴对称 Navier-Stokes 方程在 $\mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0)$ 上的有界弱解, 并且 $v_\theta = 0$, 则 $v(x, t) = (0, 0, b_3(t))$, 其中 $b_3 : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个有界可测函数.

该结论的证明主要基于 $\Omega = \frac{w_\theta}{r}$ 的方程. 我们知道, Ω 满足如下方程:

$$\partial_t \Omega + u_r \partial_r \Omega + u_z \partial_z \Omega = \Delta \Omega + \frac{2}{r} \partial_r \Omega. \quad (2.15)$$

现在将其看成 5 维空间中的方程. 事实上, 令 $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2}$, $y_5 = z$. 由于在 5 维空间中, 对于任何一个光滑函数 $\tilde{f}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = f(r, z)$ 成立

$$\Delta_y \tilde{f}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = \left(\partial_r^2 f + \frac{3}{r} \partial_r f + \partial_z^2 f \right)(r, z),$$

因此, 算子 $\Delta + \frac{2}{r} \partial_r$ 可以看成是 5 维的 Laplace 算子 Δ_5 , 从而, 方程 (2.15) 可以写成

$$\partial_t \Omega + u_r \partial_r \Omega + u_z \partial_z \Omega = \Delta_5 \Omega. \quad (2.16)$$

对于方程 (2.16), 类似于二维情形的证明, 利用极值原理的扰动可以说明 $\Omega \equiv 0$. 从而 $w_\theta = 0$, 也就是说 $w = 0$. 由于 v 也是散度为 0 的, 且 v 是弱解, 因此 $v = (0, 0, b_3(t))$.

(2) $v_\theta \neq 0$.

对于 $v_\theta \neq 0$ 的情形, Liouville 定理表述如下: 若 v 是三维轴对称 Navier-Stokes 方程 $\mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0)$ 上的有界弱解, 并且 v 满足

$$|v(x, t)| \leq \frac{C}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0), \quad (2.17)$$

则在 $\mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0)$ 上成立 $v = 0$.

该结论的证明主要依赖于 $\Gamma = rv_\theta$ 的方程. 令 $\Gamma = rv_\theta$, 则 Γ 满足的方程为

$$\partial_t \Gamma + v_r \partial_r \Gamma + v_z \partial_z \Gamma + \frac{2}{r} \partial_r \Gamma = \Delta \Gamma. \quad (2.18)$$

由 (2.17) 知 $\Gamma \leq C$. 对任意的 $\lambda > 0$, 我们定义

$$v_\lambda(x, t) = \lambda v(\lambda x, \lambda^2 t), \quad \Gamma_\lambda(x, t) = \Gamma(\lambda x, \lambda^2 t),$$

则 Γ_λ 和 u_λ 同样满足方程 (2.18). 并且, 在 $\mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0)$ 上关于 $\lambda > 0$ 一致成立

$$|v_\lambda| \leq \frac{C}{r}, \quad |\Gamma_\lambda| \leq C.$$

令 $M = \sup_{\mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0)} \Gamma$. 我们可以通过伸缩变换的方法将 Γ_λ 取值接近 M 的点移动到 x_3 轴附近, 这样, Γ_λ 在 x_3 轴附近的取值便很大, 然而在 $r = 0$ 时, 即在 x_3 轴上, $\Gamma_\lambda = 0$, 这是不合理的. 从而, Γ 只能恒为 0, 即 $v_\theta = 0$. 这表示方程的解是具有平凡角向速度的, 可利用 $v_\theta = 0$ 时的结果以及条件 (2.17) 得到 $v = 0$.

3 二维情形下的 Liouville 定理

定理 1.1 的证明 首先, 我们利用反证法来证明 $w \equiv 0$.

若 $w \neq 0$, 不妨假设

$$\sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (-\infty, 0)} w(x, t) = M > 0.$$

在二维情形下, w 满足方程 $\partial_t w + v \cdot \nabla w - \Delta w = 0$. 由抛物方程的极值原理可知, w 不可能在内部取得极大值. 因此存在时空点列 (x_k, t_k) , $|t_k| \rightarrow \infty$, $|x_k| \leq C$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} w(x_k, t_k) = M,$$

其中 $C > 0$ 是一个固定的常数, $|x_k| \leq C$ 基于假设 (1.4).

定义函数列 $\tilde{w}_k$ 和 $\tilde{v}_k$ 为

$$\tilde{w}_k(y, s) = w(x_k + y, t_k + s), \quad \tilde{v}_k(y, s) = v(x_k + y, t_k + s),$$

则存在子列, 仍记为 $\tilde{w}_k$ 和 $\tilde{v}_k$, 在 $C_{\text{local}}^{2,1,\alpha}$ 中分别收敛到 $\tilde{w}$ 和 $\tilde{v}$, 且 $\tilde{w}$ 满足

$$\begin{cases} \partial_s \tilde{w} + \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{w} - \Delta \tilde{w} = 0, & (y, s) \in \mathbb{R}^2 \times (-\infty, 0), \\ \tilde{w}(0, 0) = M. \end{cases}$$

这说明 $\tilde{w}$ 在内部达到了极大值, 由极值原理知 $\tilde{w} \equiv M$.

由上可知, 对任意的 $\epsilon > 0$, 固定 $r_0 > 0$, 则存在 k_0 , 使得当 $k > k_0$ 时, 在抛物柱 Q_{r_0} 上成立 $|\tilde{w}_k - M| < \epsilon$. 也就是说, w 在抛物柱 $Q_{r_0}(x_k, t_k)$ 上满足 $|w - M| < \epsilon$. 当 r_0 足够大时, 这与 w 关于 t 一致成立 $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |w(t, x)| = 0$ 矛盾, 因此 $w \equiv 0$.

由于 $\nabla \cdot v = 0$, $\nabla \times v = 0$, 因此, 在全空间上成立 $\Delta v = 0$, 即 v 是调和的. 因为 v 满足 (1.5), 所以, v 恒为常向量. 定理证毕. $\square$

注 3.1 定理 1.1 中 v 是次线性的要求 (条件 (1.5)) 是不可缺少的, 即便是在 $w \equiv 0$ 的情形下也不可缺少. 此外, 我们可以举例说明, 若 v 关于空间是线性增长的, 则不可压缩的 Navier-Stokes 方程在二维情形下存在非平凡的古代解, 这表明我们得到的 Liouville 定理是“最优”的. 例如, 令

$$v = (x_1, -x_2), \quad p = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2,$$

则 $w = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 = 0$, 且 (v, p) 满足

$$\begin{cases} v \cdot \nabla v - \Delta v + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot v = 0. \end{cases}$$

这说明 v 是二维不可压缩 Navier-Stokes 方程的稳态解, 但是 v 并不是常向量.

4 三维轴对称具平凡角向速度时的 Liouville 定理

本节证明不可压缩 Navier-Stokes 方程在三维轴对称具平凡角向速度情形下的 Liouville 定理. 此时, $v = v_r e_r + v_z e_z$.

定理 1.2 的证明 首先, 我们利用反证法证明 $w_\theta \equiv 0$.

在 3 维轴对称具平凡角向速度的情形下, Ω 满足如下方程:

$$\partial_t \Omega + u_r \partial_r \Omega + u_z \partial_z \Omega = \Delta \Omega + \frac{2}{r} \partial_r \Omega.$$

如第 2.3 小节所述, $\Delta + \frac{2}{r} \partial_r$ 可以看成是 5 维的 Laplace 算子 Δ_5 , 因此可将上述方程看成定义在 $\mathbb{R}^5 \times (-\infty, 0)$ 上的方程

$$\partial_t \Omega + u_r \partial_r \Omega + u_z \partial_z \Omega = \Delta_5 \Omega.$$

若 $w_\theta \neq 0$, 不失一般性, 我们假设

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^5 \times (-\infty, 0)} \Omega = M_0 > 0.$$

由抛物方程的极值原理可知, Ω 不可能在内部取得极大值, 从而存在空间点列 $x_k = (x'_k, z_k, 0, 0) \in \mathbb{R}^5$ ($x'_k = (x_{k1}, x_{k2})$) 和时间列 t_k , 使得 $|x'_k| \leq C$, 其中 C 是一个不依赖于 t_k 和 z_k 的一致常数, 并且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Omega(x_k, t_k) = M_0.$$

定义函数列

$$\tilde{\Omega}_k(y, s) = \Omega(x_k + y, t_k + s),$$

$$\tilde{v}_k(y, s) = v(x_k + y, t_k + s),$$

其中 $y = (y_1, y_2, y_3, 0, 0) \in \mathbb{R}^5$, 则存在子列仍记为 $\tilde{\Omega}_k$ 和 $\tilde{v}_k$, 在 $C_{\text{local}}^{2,1,\alpha}$ 中分别收敛到 $\tilde{\Omega}$ 和 $\tilde{v}$, 且 $\tilde{\Omega}$ 满足

$$\begin{cases} \partial_s \tilde{\Omega} + \tilde{u}_r \partial_r \tilde{\Omega} + \tilde{u}_z \partial_z \tilde{\Omega} = \Delta_5 \tilde{\Omega}, & (y, s) \in \mathbb{R}^5 \times (-\infty, 0), \\ \tilde{\Omega}(0, 0) = M_0. \end{cases}$$

这说明 $\tilde{\Omega}$ 在内部达到了极大值, 由极值原理可知 $\tilde{\Omega} \equiv M_0$.

令 $B_r(y)$ 表示 5 维空间中以 $y = (y_1, y_2, y_3, 0, 0)$ 为心、 r 为半径的球, $Q_r(y, s) = B_r(y) \times (s - r^2, s)$. 由于

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\Omega}_k = M_0 > 0,$$

因此对于任意的 $\epsilon > 0$, 固定 $r_0 > 0$, 当 k 足够大时, 在 $Q_{r_0}(0, 0)$ 上成立 $|\tilde{\Omega}_k - M_0| \leq \epsilon$. 也就是说, Ω 在抛物柱 $Q_{r_0}(x_k, t_k)$ 上满足 $|\Omega - M_0| < \epsilon$. 当 r_0 足够大时, 这与 Ω 关于 t 一致成立 $\lim_{t \rightarrow \infty} |\Omega| = 0$ 矛盾, 因此 $w_\theta \equiv 0$.

由于 $v = v_r e_r + v_z e_z$, 因此 $\Delta v = -\nabla \times (w_\theta e_\theta) = 0$, 即 v 是调和的. 又由于 v 关于 x 是次线性的, 因此由 $\Delta v = 0$ 可知 v 恒为常向量. 定理证毕. $\square$

注 4.1 定理 1.2 中的第一个结论说明, 若 w_θ 关于 r 是次线性增长的, 则 $w_\theta \equiv 0$. 我们可以举例说明, 如果 w_θ 关于 r 是线性增长的, 那么将得不到 $w_\theta \equiv 0$, 从而也得不到 v 是调和的, 这说明条件 (1.6) 是很必要的. 例如, 令

$$v = (-x_1 x_3, -x_2 x_3, x_3^2), \quad p = -\frac{1}{2} x_3^4 + 2x_3,$$

则由计算可知 $v_\theta = v \cdot e_\theta = 0$, 且 (v, p) 满足

$$\begin{cases} v \cdot \nabla v - \Delta v + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot v = 0, \end{cases}$$

但 $w_\theta = -r \neq 0$, $\Delta v = (0, 0, 2) \neq 0$.

另外, 如同二维情形, 定理 1.2 中 v 是次线性的要求 (条件 (1.7)) 也是不可缺少的, 即便是在 $w_\theta = 0$ 的情形下也是不可缺少的. 此外, 我们可以举例说明, 若 v 关于空间是线性增长的, 则不可压缩的 Navier-Stokes 方程在三维轴对称具平凡角向速度的情形下存在非平凡的古代解, 这表明我们得到的 Liouville 定理是“最优”的. 例如, 令

$$v = \left(-\frac{1}{2} x_1, -\frac{1}{2} x_2, x_3 \right), \quad p = \frac{1}{8} x_1^2 + \frac{1}{8} x_2^2 + \frac{1}{2} x_3^2,$$

则通过简单计算可以得到

$$v_\theta = v \cdot e_\theta = 0, \quad v_r = v \cdot e_r = -\frac{1}{2} r, \quad v_z = x_3,$$

从而 $w_\theta = 0$, 且 (v, p) 满足

$$\begin{cases} v \cdot \nabla v - \Delta v + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot v = 0. \end{cases}$$

这说明 v 是不可压缩 Navier-Stokes 方程在三维轴对称具平凡角向速度时的稳态解, 但是 v 并不是常向量.

5 三维轴对称具非平凡角向速度时的 Liouville 定理

本节证明三维轴对称具非平凡角向速度时的 Liouville 定理, 即定理 1.3. 我们将定理 1.3 的证明分为两部分 (引理 5.1 和 5.2), 这是因为这两部分的证明思路是完全不同的. 引理 5.1 的证明主要基于 Nash-Moser 迭代方法, 而引理 5.2 的证明主要基于抛物方程的极值原理.

引理 5.1 设 v 是三维轴对称不可压缩 Navier-Stokes 方程有界的温和古代解. 令 $\Gamma = rv_\theta$, 若 $\Gamma \in L_t^\infty L_x^p(\mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0))$, 其中 $1 \leq p < \infty$, 则关于 t 和 z 一致成立

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma(x, t) = 0.$$

引理 5.2 在引理 5.1 的条件下, v 恒为常向量.

引理 5.1 的证明 我们将要证明当 r 充分大时, 成立

$$\Gamma(x, t) \leq Cr^{-\frac{1}{p}}. \quad (5.1)$$

证明分为两步.

第 1 步 证明中值不等式 (5.9).

我们知道, Γ 满足如下方程:

$$\partial_t \Gamma + b \cdot \nabla \Gamma + \frac{2}{r} \partial_r \Gamma - \Delta \Gamma = 0, \quad (5.2)$$

其中 $b = v_r e_r + v_z e_z$. 我们将利用方程 (5.2) 在时空点 $X = (x_0, t_0)$ 处得到一个 De Giorgi 型的能量估计, 其中 $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$. 此时, 我们需要一个 X 附近的截断函数. 令 $\frac{1}{2} \leq \sigma_2 < \sigma_1 \leq 1$, 函数 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\eta \in C_0^\infty(-\infty, 0)$ 满足

$$\begin{cases} \text{supp } \phi \subset B_{\sigma_1}(x_0), & \text{在 } B_{\sigma_2}(x_0) \text{ 中 } \phi = 1, \quad 0 \leq \phi \leq 1, \quad |\nabla \phi| \leq \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2}, \quad |\nabla^2 \phi| \leq \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}, \\ \text{supp } \eta \subset (t_0 - \sigma_1^2, t_0), & \text{在 } (t_0 - \sigma_2^2, t_0) \text{ 上 } \eta = 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad |\eta'| \leq \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}. \end{cases}$$

截断函数设置为 $\psi(t, x) = \eta(t)\phi(x)$. 定义时空区域 $Q_{\sigma_i}(x_0, t_0) = B_{\sigma_i}(x_0) \times (t_0 - \sigma_i^2, t_0)$, $i = 1, 2$. 在方程 (5.2) 两边同时乘以测试函数 $2p\Gamma^{2p-1}\psi^2$, 并在 $\mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0)$ 上积分得到

$$\iint \left(\partial_t \Gamma + b \cdot \nabla \Gamma + \frac{2}{r} \partial_r \Gamma - \Delta \Gamma \right) 2p\Gamma^{2p-1}\psi^2 dx dt = 0.$$

对上式各项进行计算, 可以得到

$$\iint \partial_t \Gamma \cdot 2p\Gamma^{2p-1}\psi^2 dx dt = \int \Gamma^{2p}\psi^2|_{t_0-\sigma_1^2}^{t_0} dx - \iint \Gamma^{2p}\partial_t \psi^2 dx dt, \quad (5.3)$$

$$\iint (b \cdot \nabla) \Gamma \cdot 2p\Gamma^{2p-1}\psi^2 dx dt = \iint (b \cdot \nabla) \Gamma^{2p}\psi^2 dx dt = -2 \iint \Gamma^{2p}\psi(b \cdot \nabla)\psi dx dt, \quad (5.4)$$

$$\iint \frac{2}{r} \partial_r \Gamma \cdot 2p\Gamma^{2p-1}\psi^2 dx dt = 4\pi \iiint \partial_r \Gamma^{2p}\psi^2 dr dz dt = -4 \iint \Gamma^{2p} \frac{\psi \partial_r \psi}{r} dx dt, \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \iint -\Delta \Gamma \cdot 2p\Gamma^{2p-1}\psi^2 dx dt &= \frac{2(2p-1)}{p} \iint |\nabla(\Gamma^p \psi)|^2 dx dt + \frac{2(p-1)}{p} \iint \Gamma^{2p} \psi \Delta \psi dx dt \\ &\quad - 2 \iint \Gamma^{2p} |\nabla \psi|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (5.6)$$

由 (5.3)–(5.6) 可知,

$$\begin{aligned}
 & \sup_{t \in (t_0 - \sigma_1^2, t_0)} \|\Gamma^p \psi\|_{L_x^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \int_{Q_{\sigma_1}(x_0, t_0)} |\nabla(\Gamma^p \psi)|^2 dx dt \\
 & \leq C \int_{Q_{\sigma_1}(x_0, t_0)} \Gamma^{2p} \left(\psi \Delta \psi + |\nabla \psi|^2 + \psi \partial_t \psi + \frac{\psi \partial_r \psi}{r} + \psi (b \cdot \nabla) \psi \right) dx dt \\
 & \leq C \int_{Q_{\sigma_1}(x_0, t_0)} \Gamma^{2p} \left(\frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2} + \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} \right) dx dt \\
 & \leq \frac{C}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2} \int_{Q_{\sigma_1}(x_0, t_0)} \Gamma^{2p} dx dt. \tag{5.7}
 \end{aligned}$$

下面利用 Moser 迭代法得到中值不等式 (5.9). 首先, 根据 (5.7), 由 Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入定理可知,

$$\begin{aligned}
 \int_{Q_{\sigma_1}(x_0, t_0)} (\psi |\Gamma|^p)^3 dx dt & \leq C \int_{t_0 - \sigma_1^2}^{t_0} \|\psi \Gamma^p\|_{L_x^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{2}} \|\psi \Gamma^p\|_{L_x^6(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{2}} dt \\
 & \leq C \left[\frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2} \int_{Q_{\sigma_1}(x_0, t_0)} \Gamma^{2p} dx dt \right]^{\frac{3}{4}} \int_{t_0 - \sigma_1^2}^{t_0} \|\nabla(\psi \Gamma^p)\|_{L_x^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{2}} dt \\
 & \leq C \left[\frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2} \int_{Q_{\sigma_1}(x_0, t_0)} \Gamma^{2p} dx dt \right]^{\frac{3}{4}} \left(\int_{t_0 - \sigma_1^2}^{t_0} \|\nabla(\psi \Gamma^p)\|_{L_x^2(\mathbb{R}^3)}^2 dt \right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_{t_0 - \sigma_1^2}^{t_0} dt \right)^{\frac{1}{4}} \\
 & \leq C \left[\frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2} \int_{Q_{\sigma_1}(x_0, t_0)} \Gamma^{2p} dx dt \right]^{\frac{3}{2}}.
 \end{aligned}$$

由上式可得

$$\int_{Q_{\sigma_2}(x_0, t_0)} |\Gamma|^{3p} dx dt \leq C \left[\frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2} \int_{Q_{\sigma_1}(x_0, t_0)} \Gamma^{2p} dx dt \right]^{\frac{3}{2}}. \tag{5.8}$$

令 $\sigma = \frac{1}{2}$ 为一个固定的常数, $j \geq 0$ 为整数. 将 $\sigma_1 = \frac{1}{2}(1 + \sigma^j)$, $\sigma_2 = \frac{1}{2}(1 + \sigma^{j+1})$, $p = (\frac{3}{2})^j$ 代入 (5.8) 中, 我们得到

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_{Q_{\frac{1}{2}(1+\sigma^{j+1})}(x_0, t_0)} |\Gamma|^{2(\frac{3}{2})^{j+1}} dx dt \right)^{\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^{j+1}} \\
 & \leq \left[C \frac{4}{\sigma^{2(j+1)}} \int_{Q_{\frac{1}{2}(1+\sigma^j)}(x_0, t_0)} \Gamma^{2(\frac{3}{2})^j} dx dt \right]^{\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^j} \\
 & \leq 4C^{\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^j} 2^{(\frac{2}{3})^j(j+1)} \left(\int_{Q_{\frac{1}{2}(1+\sigma^j)}(x_0, t_0)} \Gamma^{2(\frac{3}{2})^j} dx dt \right)^{\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^j} \\
 & \leq 4C^{\frac{1}{2} \sum_{k=0}^j (\frac{2}{3})^k} 2^{\sum_{k=0}^j (\frac{2}{3})^k(k+1)} \left(\int_{Q_1(x_0, t_0)} \Gamma^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq C \left(\int_{Q_1(x_0, t_0)} \Gamma^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

其中 $Q_1(x_0, t_0) = B_1(x_0) \times (t_0 - 1, t_0)$. 在上式中令 $j \rightarrow \infty$, 我们得到

$$\sup_{Q_{\frac{1}{2}}(x_0, t_0)} |\Gamma| \leq C \left(\int_{Q_1(x_0, t_0)} \Gamma^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

由此可得如下的中值不等式:

$$\sup_{Q_{\frac{1}{2}}(x_0, t_0)} |\Gamma| \leq C \left(\int_{Q_1(x_0, t_0)} |\Gamma|^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty. \quad (5.9)$$

第 2 步 证明一致衰减 (5.10).

我们将利用 Γ 的可积性来证明当 $r = |x'_0| = \sqrt{|x_{01}|^2 + |x_{02}|^2} \rightarrow +\infty$ 时, 关于 t 和 x_3 (即 z) 一致成立

$$\left(\int_{Q_1(x_0, t_0)} |\Gamma|^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq Cr^{-\frac{1}{p}}. \quad (5.10)$$

首先, 我们有

$$\left(\int_{Q_1(x_0, t_0)} |\Gamma|^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{t \in (-\infty, 0)} \left(\int_{B_1(x_0)} |\Gamma(\cdot, t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

因此只需处理 $\int_{B_1(x_0)} |\Gamma(\cdot, t)|^p dx$. 定义一族以 x 为心、半径为 1 的球 $B_1(x)$, 其中

$$x \in S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid |x'| = |x'_0|, x_3 = x_{03}\}.$$

当 $|x'_0|$ 足够大时, 我们可以在 S 上放置至少 $\llbracket |x'_0| \rrbracket$ ($\llbracket |x'_0| \rrbracket$ 指的是比 $|x'_0|$ 小的最大整数) 个互不相交的球 $B_1(x_i)$ ($1 \leq i \leq \llbracket |x'_0| \rrbracket$), 其中球心 $x_i \in S$. 由 Γ 的轴对称性可知,

$$\int_{B_1(x_i)} |\Gamma(\cdot, t)|^p dx = \int_{B_1(x_0)} |\Gamma(\cdot, t)|^p dx.$$

因此, 我们有

$$\llbracket |x'_0| \rrbracket \int_{B_1(x_0)} |\Gamma(\cdot, t)|^p dx = \sum_{i=0}^{\llbracket |x'_0| \rrbracket} \int_{B_1(x_i)} |\Gamma(\cdot, t)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\Gamma(\cdot, t)|^p dx,$$

即

$$\left(\int_{Q_1(x_0, t_0)} |\Gamma|^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq (\llbracket |x'_0| \rrbracket)^{-\frac{1}{p}} \sup_{t \in (-\infty, 0)} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\Gamma(\cdot, t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(\llbracket |x'_0| \rrbracket)^{-\frac{1}{p}} \|\Gamma\|_{L_t^\infty L_x^p}. \quad (5.11)$$

由于 $\Gamma \in L_t^\infty L_x^p(\mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0))$, 因此, 由 (5.11) 可得 (5.10).

通过上述两步的证明, 结合 (5.9) 和 (5.10) 可以得到 $\sup_{Q_{\frac{1}{2}}(x_0, t_0)} |\Gamma| \leq Cr^{-\frac{1}{p}}$. 令 $r \rightarrow \infty$ 可得结论, 引理证毕. $\square$

引理 5.2 的证明 因为 $\Gamma = rv_\theta$, 所以 $\Gamma|_{r=0} = 0$. 下面利用反证法和极值原理来证明 $\Gamma \equiv 0$. 令

$$M = \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0)} \Gamma \geq 0 \geq \inf_{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0)} \Gamma = m.$$

我们现在分两种情形来证明 $M = m = 0$.

情形 1 若 $M > 0$ 且存在一个时空点 (x_0, t_0) ($|x_0| < \infty, |t| < \infty$) 使得 $\Gamma(x_0, t_0) = M$.

由于 $\Gamma|_{r=0} = 0$, 因此 $r_0 = \sqrt{(x_{01})^2 + (x_{02})^2} \neq 0$. 令 $\hat{\Gamma} = M - \Gamma$, 则 $\hat{\Gamma}$ 满足

$$\partial_t \hat{\Gamma} + b \cdot \nabla \hat{\Gamma} + \frac{2}{r} \partial_r \hat{\Gamma} - \Delta \hat{\Gamma} = 0.$$

因为 Γ 在 $(\mathbb{R}^3 \setminus \{r=0\}) \times (-\infty, 0)$ 上成立强极值原理, 所以在 $(\mathbb{R}^3 \setminus \{r=0\}) \times (-\infty, 0)$ 上有 $\Gamma \equiv M$. 然而 Γ 在 $\mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0)$ 上是连续的, 这与在 $\{r=0\} \times (-\infty, 0)$ 上 $\Gamma \equiv 0$ 矛盾.

情形 2 $M > 0$, 但 Γ 在 $|x| \rightarrow \infty$ 或 $t \rightarrow -\infty$ 时取到 M .

在这种情形下, 存在空间点列 $x_k = (x'_k, x_{k3})$ 和时间点列 t_k , 使得 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \Gamma(x_k, t_k) = M$, 并且 $|x_k| \rightarrow \infty$ 或者 $t_k \rightarrow -\infty$. 同时, 由引理 5.1 可知, 在引理的条件下, 关于 t 和 x_3 一致成立 $\lim_{r \rightarrow +\infty} |\Gamma| = 0$, 因此我们可以假设 $|x'_k| \leq C$, 其中 C 不依赖于 t 和 x_3 . 不失一般性, 我们可以假设 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x'_k = (x_{01}, x_{02})$ (必要时可选取子列). 因为 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \Gamma(x_k, t_k) = M > 0$ 并且 $\Gamma|_{r=0} = 0$, 所以, $r_0 = \sqrt{(x_{01})^2 + (x_{02})^2} \neq 0$.

令 $v_k(y, s) = v(x_k + y, t_k + s)$, 其中 v 是三维轴对称 Navier-Stokes 方程有界的温和古代解, 则 $v_k(y, s) = v(x_k + y, t_k + s)$ 是如下方程的有界的温和古代解:

$$\begin{cases} \partial_s v_k + v_k \cdot \nabla v_k + \nabla p = \Delta v_k, \\ \nabla \cdot v_k = 0. \end{cases}$$

令 $v_\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k(y, s)$, 则由文献 [16, 引理 6.1] 可知, v_∞ 是极限方程的有界的温和古代解. 由于 v_k 是轴对称解, 对称轴为 $\{x(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_{k1}, x_2 = x_{k2}, x_3 \in \mathbb{R}\}$ 且 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x'_k = (x_{01}, x_{02})$, 因此, v_∞ 也是轴对称解且对称轴为 $\{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_{01}, x_2 = x_{02}, x_3 \in \mathbb{R}\}$.

令 $\tilde{v}_\infty(y, s) = v_\infty(y + x_0, s)$, 其中 $x_0 = (x_{01}, x_{02}, 0)$, 则 $\tilde{v}_\infty(y, s)$ 也是轴对称解并且对称轴为 $\{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_2 = 0, x_3 \in \mathbb{R}\}$. 令 $\tilde{\Gamma}_\infty = r(y')\tilde{v}_{\infty, \theta}$, 其中 $r(y') = \sqrt{(y_1)^2 + (y_2)^2}$, 则 $\tilde{\Gamma}_\infty$ 满足

$$\partial_s \tilde{\Gamma}_\infty + \tilde{b}_\infty \cdot \nabla \tilde{\Gamma}_\infty + \frac{2}{r} \partial_r \tilde{\Gamma}_\infty - \Delta \tilde{\Gamma}_\infty = 0,$$

其中 $\tilde{b}_\infty = \tilde{v}_{\infty, r} e_r + \tilde{v}_{\infty, z} e_z$. 若令 $y + x_0 = x$, $\tilde{r} = \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2}$, 且令 $\tilde{\Gamma} = \tilde{r} v_{\infty, \theta}$, 则有

$$\partial_s \tilde{\Gamma} + \tilde{b} \cdot \nabla \tilde{\Gamma} + \frac{2}{\tilde{r}} \partial_{\tilde{r}} \tilde{\Gamma} - \Delta \tilde{\Gamma} = 0, \quad (5.12)$$

其中 $\tilde{b} = v_{\infty, r} e_r + v_{\infty, z} e_z$. 由上面的定义可知, $\tilde{\Gamma}(x_0, 0) = 0$ 且

$$\tilde{\Gamma}(0, 0) = \sqrt{(x_{01})^2 + (x_{02})^2} v_{\infty, \theta}(0, 0) = \sqrt{(x_{01})^2 + (x_{02})^2} \lim_{k \rightarrow +\infty} v_\theta(x_k, t_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Gamma(x_k, t_k) = M.$$

由于 $\tilde{\Gamma}$ 满足方程 (5.12), 因此, $\tilde{\Gamma}$ 在轴 $\{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_{01}, x_2 = x_{02}, x_3 \in \mathbb{R}\}$ 上不满足强极值原理, 但在轴之外满足, 类似情形 1, 我们可以导出矛盾.

结合情形 1 和 2, 我们可以得到 $M = 0$. 同样的证明可以得到 $m = 0$. 因此, 在 $(-\infty, 0) \times \mathbb{R}^3$ 上成立 $\Gamma \equiv 0$, 也就是说 $v_\theta \equiv 0$. 这样便可利用文献 [16, 定理 5.2] 得到 v 恒为常向量. 引理证毕. $\square$

同时结合引理 5.1 可知定理 1.3 成立.

致谢 张旗感谢 Simons 基金及复旦大学数学科学学院对其访问的支持. 作者感谢与 Dong HongJie 教授进行的有意义的讨论.

参考文献

- 1 Ladyženskaya O A. Unique global solvability of the three-dimensional Cauchy problem for the Navier-Stokes equations in the presence of axial symmetry (in Russian). Zap Nauchn Sem Leningrad Otdel Math Inst Steklov (LOMI), 1968, 7: 155-177

- 2 Ukhovskii M R, Yudovich V I. Axially symmetric flows of ideal and viscous fluids filling the whole space. *J Appl Math Mech*, 1968, 32: 52–61
- 3 Leonardi S, Malek J, Nečas J, et al. On axially symmetric flows in $\mathbb{R}^3$. *Z Anal Anwend*, 1999, 18: 639–649
- 4 Loftus J B, Zhang Q S. A priori bounds for the vorticity of axially symmetric solutions to the Navier-Stokes equations. *Adv Differential Equations*, 2010, 15: 531–560
- 5 Chae D, Lee J. On the regularity of the axisymmetric solutions of the Navier-Stokes equations. *Math Z*, 2002, 239: 645–671
- 6 Hou T Y, Li C M. Dynamic stability of the 3D axi-symmetric Navier-Stokes equations with swirl. *Comm Pure Appl Math*, 2008, 61: 661–697
- 7 Hou T Y, Lei Z, Li C M. Global regularity of the 3D axi-symmetric Navier-Stokes equations with anisotropic data. *Comm Partial Differential Equations*, 2008, 33: 1622–1637
- 8 Jiu Q S, Xin Z P. Some regularity criteria on suitable weak solutions of the 3-D incompressible axisymmetric Navier-Stokes equations. In: *Lectures on Partial Differential Equations*. New Stud Adv Math, vol. 2. Somerville: International Press, 2003, 119–139
- 9 Lei Z, Navas E A, Zhang Q S. A priori bound on the velocity in axially symmetric Navier-Stokes equations. *Comm Math Phys*, 2016, 341: 289–307
- 10 Lei Z, Zhang Q S. Structure of solutions of 3D axi-symmetric Navier-Stokes equations near maximal points. *Pacific J Math*, 2011, 254: 335–344
- 11 Chen C C, Strain R M, Yau H T, et al. Lower bound on the blow-up rate of the axisymmetric Navier-Stokes equations. *Int Math Res Not IMRN*, 2008, 2008: 31 pages
- 12 Chen C C, Strain R M, Yau H T, et al. Lower bounds on the blow-up rate of the axisymmetric Navier-Stokes equations II. *Comm Partial Differential Equations*, 2009, 34: 203–232
- 13 Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. *Amer J Math*, 1958, 80: 931–954
- 14 Moser J. A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. *Comm Pure Appl Math*, 1960, 13: 457–468
- 15 De Giorgi E. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari (Italian). *Mem Accad Sci Torino Cl Sci Fis Mat Nat*, 1957, 3: 25–43
- 16 Koch G, Nadirashvili N, Šverák G, et al. Liouville theorems for the Navier-Stokes equations and applications. *Acta Math*, 2009, 203: 83–105
- 17 Seregin G, Sverak V. On type I singularities of the local axi-symmetric solutions of the Navier-Stokes equations. *Comm Partial Differential Equations*, 2009, 34: 171–201
- 18 Lei Z, Zhang Q S. A Liouville theorem for the axially-symmetric Navier-Stokes equations. *J Funct Anal*, 2011, 261: 2323–2345
- 19 Chae D. Liouville type theorems for the Euler and the Navier-Stokes equations. *Adv Math*, 2011, 228: 2855–2868
- 20 Neustupa J, Pokorný M. An interior regularity criterion for an axially symmetric suitable weak solution to the Navier-Stokes equations. *J Math Fluid Mech*, 2000, 2: 381–399
- 21 Neustupa J, Pokorný M. Axisymmetric flow of Navier-Stokes fluid in the whole space with non-zero angular velocity component. *Math Bohem*, 2001, 126: 469–481
- 22 Tian G, Xin Z P. One-point singular solutions to the Navier-Stokes equations. *Topol Methods Nonlinear Anal*, 1998, 11: 135–145
- 23 Zhang P, Zhang T. Global axisymmetric solutions to three-dimensional Navier-Stokes system. *Int Math Res Not IMRN*, 2014, 2014: 610–642
- 24 Seregin G. Note on bounded scale-invariant quantities for the Navier-Stokes equations. *Zap Nauchn Sem S-Peterburg Otdel Mat Inst Steklov (POMI)*, 2011, 397: 150–156; reprinted in *J Math Sci (NY)*, 2012, 185: 742–745
- 25 Wang W D, Zhang Z F. Regularity of weak solutions for the Navier-Stokes equations in the class $L^\infty(\text{BMO}^{-1})$. *Commun Contemp Math*, 2012, 14: 1250020
- 26 Leray J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math*, 1934, 63: 193–248
- 27 Caffarelli L, Kohn R, Nirenberg L. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. *Comm Pure Appl Math*, 1982, 35: 771–831
- 28 Serrin J. On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations. *Arch Ration Mech Anal*, 1962, 9: 187–195
- 29 Fabes E B, Jones B F, Riviere N M. The initial value problem for the Navier-Stokes equations with data in L^p . *Arch Ration Mech Anal*, 1972, 45: 222–240
- 30 Giga Y. Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system.

- J Differential Equations, 1986, 62: 186–212
- 31 Gustafson S, Kang K, Tsai T P. Interior regularity criteria for suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. Comm Math Phys, 2007, 273: 161–76
 - 32 Ladyženskaja O A. Uniqueness and smoothness of generalized solutions of Navier-Stokes equations (in Russian). Zap Naučn Sem Leningrad Otdel Mat Inst Steklov (LOMI), 1967, 5: 169–185
 - 33 Sohr H. Zur Regularitätstheorie der instationären Gleichungen von Navier-Stokes (German). Math Z, 1983, 184: 359–375
 - 34 Struwe M. On partial regularity results for the Navier-Stokes equations. Comm Pure Appl Math, 1988, 41: 437–458
 - 35 Iskauriaza L, Seregin G A, Šverák V. $L^{3,\infty}$ -solutions of the Navier-Stokes equations and backward uniqueness. Russian Math Surveys, 2003, 58: 211–250
 - 36 Lei Z, Zhang Q S. Criticality of the axially symmetric Navier-Stokes equations. ArXiv:1505.02628, 2015
 - 37 Wei D Y. Regularity criterion to the axially symmetric Navier-Stokes equations. J Math Anal Appl, 2016, 435: 402–413

Improved Liouville theorems for axially symmetric Navier-Stokes equations

LEI Zhen, ZHANG Qi & ZHAO Na

Abstract In this paper, we consider the Liouville property for ancient solutions of the incompressible Navier-Stokes equations. In 2D and 3D axially-symmetric cases without swirl, we prove the sharp Liouville theorems for smooth ancient mild solutions: Velocity fields v 's are constants if vorticity fields satisfy certain condition and v 's are sublinear with respect to the spatial variable, and we also give the counterexamples when v 's are linear with respect to the spatial variable. The condition which vorticity fields need to satisfy is $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |w(x, t)| = 0$ and $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{|w|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0$ uniformly for all $t \in (-\infty, 0)$ in 2D and 3D axially-symmetric cases without swirl, respectively. In the case when solutions are axially symmetric with nontrivial swirl, we prove that if $\Gamma = rv_\theta \in L_t^\infty L_x^p(\mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0))$, where $1 \leq p < \infty$, then bounded ancient mild solutions are constants.

Keywords Navier-Stokes equations, ancient solution, Liouville theorems

MSC(2010) 35Q30, 76D05

doi: 10.1360/N012016-00149