等参情形的丘成桐第一特征值猜想

献给胡和生教授 90 华诞

唐梓洲¹, 彦文娇^{2*}

1. 南开大学陈省身数学研究所, 天津 300071;

2. 北京师范大学数学科学学院, 北京 100875

E-mail: zztang@nankai.edu.cn, wjyan@bnu.edu.cn

收稿日期: 2017-10-20; 接受日期: 2017-12-01; 网络出版日期: 2018-03-27; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11331002 和 11722101) 资助项目

摘要 本文将对丘成桐第一特征值猜想的提出与发展, 以及等参情形的完全解决进行综述, 并介绍其与 Lawson 猜想的关系. 进一步, 本文还计算了等参焦流形 (球面的极小子流形) 的第一特征值, 并提出丘成桐猜想的高余维情形的推广问题.

关键词 等参超曲面 焦流形 Laplace 算子 丘成桐第一特征值猜想 Lawson 猜想

MSC (2010) 主题分类 53A30, 53C42, 58J50

1 单位球面的等参理论

现代等参理论的研究始于数学大师 E. Cartan, 在 20 世纪 80 年代 Münzner 的一系列奠基性工作之后, 等参理论受到几何学家和拓扑学家越来越多的关注. 鉴于其在几何研究中的重要性, 单位球面中等参超曲面的分类问题被丘成桐教授列为“几何中的未解问题”的第 34 个问题 (参见文献 [1]), 并于最近被完全解决, 相关文献参见文献 [2–8]. 近几十年来, 有关单位球面中等参叶状结构 (等参函数和等参超曲面) 的相关几何与拓扑问题的研究也非常活跃, 如文献 [9–15] 等. 此外, 等参理论还常被用来构造具体问题的例子, 如文献 [16–21] 等. 在一般的 Riemann 流形中, 等参超曲面定义为其附近的平行超曲面都有常平均曲率的超曲面. 在实空间形式中, Cartan 给出了一个等价的定义—等参超曲面即为具有常主曲率的超曲面.

本文主要关心单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中的等参叶状结构. 首先, 给出等参函数的定义. 给定一个光滑函数 $f: S^{n+1}(1) \rightarrow \mathbb{R}$, 若它满足以下两个方程:

$$|\nabla f|^2 = b(f), \quad (1.1)$$

$$\Delta f = a(f), \quad (1.2)$$

英文引用格式: Tang Z Z, Yan W J. Yau's first eigenvalue conjecture in the isoparametric case (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 819–826, doi: 10.1360/N012017-00229

则称 f 为球面 $S^{n+1}(1)$ 上的等参函数, 这里 b 和 a 分别是 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数和连续函数. 从几何角度来看, (1.1) 和 (1.2) 意味着 f 的正则水平集都是互相平行的, 且有常平均曲率. 在此意义下, 把 f 的正则水平超曲面称为等参超曲面, 把它的两个奇异水平集称为焦 (子) 流形, 并根据它们是 f 的极大值或极小值的逆像, 分别记为 M_+ 或 M_- . Nomizu^[22] 证明了焦流形 $M_{\pm}$ 都是 $S^{n+1}(1)$ 的极小子流形. 对于一般 Riemann 流形上的相应结论, 参见文献 [23, 24].

记 M^n 为 $S^{n+1}(1)$ 中的闭的等参超曲面. 用符号 g 表示 M^n 的不同主曲率 k_i ($k_1 > \cdots > k_g$) 的个数, k_i 的重数记作 m_i ($i = 1, \dots, g$). Münzner^[25] 用代数拓扑的方法证明了现代等参理论的一个奠基性结果: $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$, 并且 $m_i = m_{i+2}$ (下标模 g); 此外, M^n 还可以实现为 Euclid 空间 $\mathbb{R}^{n+2}$ 上的 g 次齐次多项式 F 在球面 $S^{n+1}(1)$ 上的限制函数的正则水平集, 而且 F 满足如下的 Cartan-Münzner 方程:

$$\begin{aligned} |\nabla F|^2 &= g^2 |x|^{2g-2}, \\ \Delta F &= \frac{g^2}{2} (m_2 - m_1) |x|^{g-2}. \end{aligned}$$

易见, 限制函数 $f = F|_{S^{n+1}(1)}$ 取值于 $[-1, 1]$. 所以, 根据前面的定义可知, 焦流形可以表示为 $M_+ = f^{-1}(1)$ 和 $M_- = f^{-1}(-1)$, 它们都是 $S^{n+1}(1)$ 的极小子流形, 余维数分别为 $m_1 + 1$ 和 $m_2 + 1$.

当 $g \leq 3$ 时, 等参超曲面的分类由 Cartan 完成, 他证明了这时等参超曲面一定是齐性的. 换言之, 它们可以表示为某些秩为 2 的对称空间的迷向表示的主轨道. 更确切地, 当 $g = 1$ 时, $S^{n+1}(1)$ 中的等参超曲面 M^n 一定是超球面; 当 $g = 2$ 时, M^n 一定是两个球面的乘积 $S^p(r) \times S^{n-p}(s)$ ($r^2 + s^2 = 1$, $r, s > 0$); 当 $g = 3$ 时, M^n 是投影平面 $\mathbb{F}P^2$ ($\mathbb{F}$ 代表 $\mathbb{R}$ 、 $\mathbb{C}$ 、 $\mathbb{H}$ 或 $\mathbb{O}$) 到球面 $S^{3m+1}(1)$ (m 分别为 1、2、4 或 8) 中的 Veronese 嵌入的常半径管道, 其主曲率的重数分别为 $m_1 = m_2$ 并取值于 1、2、4 和 8.

当 $g = 4$ 时, 在 Abresch^[26] 和 Tang^[27], 尤其是 Fang^[28, 29] 的重要工作之后, Stolz^[30] 确定了重数对 (m_1, m_2) 的取值范围. 2007 年以后, Cecil 等^[2]、Immervoll^[3] 和 Chi^[4, 5] 证明了这时的等参超曲面除了齐性并且重数对为 $(m_1, m_2) = (2, 2)$ 和 $(m_1, m_2) = (4, 5)$ 的两种情形之外, 都是 OT-FKM (Ozeki-Takeuchi-Ferus-Karcher-Münzner) 型的.

当 $g = 6$ 时, Abresch^[26] 首先证明了主曲率重数只有 $m_1 = m_2 = 1$ 和 $m_1 = m_2 = 2$ 两种可能. 然后, Dorfmeister 和 Neher^[6] 及 Miyaoka^[7, 8] 分别证明了这两种情形的等参超曲面都是齐性的.

综上所述, 球面 $S^{n+1}(1)$ 中的非齐性等参超曲面只出现在 OT-FKM 型中. 现在给出它的定义: 给定一个 $2l$ 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^{2l}$ 上的对称 Clifford 系统 $\{P_0, \dots, P_m\}$, 即 P_i 是满足 $P_i P_j + P_j P_i = 2\delta_{ij} I_{2l}$ 的对称矩阵, 受 Ozeki 和 Takeuchi^[31] 的工作启发, Ferus 等^[32] 构造了 $\mathbb{R}^{2l}$ 上的 4 次齐次多项式 F :

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^{2l} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ F(x) &= |x|^4 - 2 \sum_{i=0}^m \langle P_i x, x \rangle^2. \end{aligned}$$

这里 $l = k\delta(m)$, k 是一个正整数, $\delta(m)$ 是 Clifford 代数 $\mathcal{C}_{m-1}$ 的不可约模的维数, 取值如表 1 所示. 文献 [32] 证明了多项式 F 满足 Cartan-Münzner 方程, 且 $f = F|_{S^{2l-1}(1)}$ 的正则水平集 (等参超曲面)

表 1 $\delta(m)$ 的取值

m	1	2	3	4	5	6	7	8	$\dots$	$m' + 8$
$\delta(m)$	1	2	4	4	8	8	8	8	$\dots$	$16\delta(m')$

的主曲率重数对为 $(m_1, m_2) = (m, l - m - 1)$. 事实上, Takagi 和 Takahashi^[33] 曾给出球面中齐性 (等参) 超曲面的分类列表, 特别地, $g = 4$ 时的齐性等参超曲面的重数对只能是 $(1, k)$ 、 $(2, 2)$ 、 $(2, 2k - 1)$ 、 $(4, 4k - 1)$ 、 $(4, 5)$ 和 $(6, 9)$, 而 OT-FKM 型等参超曲面的主曲率重数对基本都不在这些类中.

2 丘成桐第一特征值猜想

Laplace 算子是 Riemann 流形上最重要的算子之一. 在过去的几十年里, 对 Laplace 算子的谱的研究一直是几何学的核心问题.

设 M^n 是一个 n 维闭 Riemann 流形, 其上的 Laplace 算子记作 Δ . Δ 在 M^n 上的光滑函数 f 上的作用为 $\Delta f = -\operatorname{div}(\nabla f)$. 众所周知, Δ 是一个椭圆算子, 并且有离散的谱:

$$\{0 = \lambda_0(M) < \lambda_1(M) \leq \lambda_2(M) \leq \cdots \leq \lambda_k(M), \dots, \nearrow \infty\},$$

其中第一个正的特征值 $\lambda_1(M)$ 称为 M^n 的第一特征值. Takahashi^[34] 指出, 对于单位球面 $S^N(1)$ 中的 n 维浸入子流形 M^n , 它是极小的当且仅当坐标函数都是 Δ 的特征值为 n 的特征函数. 因此, $\lambda_1(M^n) \leq n$. 基于这一事实, 丘成桐教授在他的 1982 年的公开问题集^[35] 中提出如下猜想:

猜想 1^[35] (第一特征值猜想) 若 M^n 是单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中的闭的极小嵌入超曲面, 则

$$\lambda_1(M^n) = n.$$

这里, 嵌入的条件是必需的.

众所周知, 这个猜想具有极其深刻的几何意义. 例如, 另一个著名的 Lawson 猜想—3 维球面 $S^3(1)$ 中的极小嵌入环面一定是 Clifford 环面, 直至 2013 年才被 Brendle^[36] 完全解决. 然而, 早在 1986 年, Montiel 和 Ros^[37] 就断言了 Lawson 猜想是丘成桐第一特征值猜想在环面情形的特例. 他们首先证明了下面的定理:

定理 1^[37] 对于紧致表面上的任意一个共形结构, 至多只存在一个度量, 使得它可以极小浸入到高维单位球面中, 并且坐标函数是第一特征函数.

我们知道, 除了球面 S^2 和实投影平面 $\mathbb{R}P^2$ 以外, 环面具有最简单的共形结构. 对于环面, Montiel 和 Ros 给出如下结论:

定理 2^[37] 一个 3 维球面 $S^3(1)$ 中的极小浸入环面, 如果第一特征值等于 2, 那么一定是 Clifford 环面.

由此可知, 若丘成桐第一特征值猜想成立, 则 Lawson 猜想一定成立.

针对丘成桐第一特征值猜想的第一个重要突破是由 Choi 和 Wang 在 1983 年给出的, 他们证明了单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中的闭的极小嵌入超曲面的第一特征值不小于维数的一半. 事实上, 他们证明了下面的定理:

定理 3^[38] 对于紧致可定向 Riemann 流形 N 中的紧致可定向极小嵌入超曲面 M , 若 N 的 Ricci 曲率有一个正常数下界 k , 则 $\lambda_1(M) \geq \frac{k}{2}$, 这里 $\lambda_1(M)$ 是指 M 的 Laplace 算子的第一特征值.

显然, 在球面情形, $S^{n+1}(1)$ 的 Ricci 曲率为 n , 并且 $S^{n+1}(1)$ 的紧致嵌入超曲面一定是可定向的, 所以自然有 $\lambda_1(M^n) \geq n/2$.

Choi 和 Wang 的证明主要借助了 Reilly 公式, 也就是把 Bochner 公式进行积分得到的公式.

此外, 值得一提的是, Choe 和 Soret^[39] 对于 S^3 中由 Lawson 及 Karcher 等构造的所有紧致嵌入极小曲面, 都验证了其第一特征值确实等于维数 2.

3 等参情形的丘成桐第一特征值猜想

众所周知, Laplace 算子的谱, 甚至它的第一特征值的计算都是极其复杂的. 迄今为止, 丘成桐第一特征值猜想的一般情形还远远没有解决. 我们主要考虑把丘成桐第一特征值猜想的“极小”条件附加一个“等参”的情形. 当然, 等参超曲面自然是单位球面中的嵌入超曲面.

1984 年, Mutō 等^[40] 针对 $S^{n+1}(1)$ 中的某些极小齐性 (自动是等参的) 超曲面 M^n 给出了部分结果. 他们证明了当 $g = 3$, (m_1, m_2) 分别为 $(1, 1)$ 和 $(2, 2)$; $g = 4$, (m_1, m_2) 分别为 $(1, k)$ 和 $(2, 2)$; $g = 6$, $(m_1, m_2) = (2, 2)$ 时, $\lambda_1(M^n) = n$, 也就是证明了此时的丘成桐第一特征值猜想成立. 随后, 在 1985 年, Kotani^[41] 继续深入挖掘文献 [40] 中的研究方法, 证明了 $g = 3$, (m_1, m_2) 分别为 $(4, 4)$ 和 $(8, 8)$; $g = 6$, $(m_1, m_2) = (1, 1)$ 时, 丘成桐猜想也成立. 根据他们的结论, 再结合 20 世纪 40 年代 Cartan 对 $g \leq 3$ 的分类, 1985 年 Dorfmeister 和 Neher^[6] 对 $g = 6$ 且 $m_1 = m_2 = 1$ 的分类以及 2013 年 Miyaoka^[7] 对 $g = 6$ 且 $m_1 = m_2 = 2$ 的分类, 得到如下结论: 当 g 分别为 1、2、3 和 6 时, 丘成桐第一特征值猜想都成立. 此外, 1990 年, Solomon^[42] 还计算了所有 $g = 3$ 的等参超曲面的谱.

不得不指出的是, 文献 [40] 中的方法严重依赖于齐性性质. 在 $g = 4$ 时, 他们只能计算齐性的 $(m_1, m_2) = (1, k)$ 和 $(m_1, m_2) = (2, 2)$ 时的第一特征值. 他们在文中解释道: “在单位球面中, 除了赤道超球面和推广的 Clifford 环面 (分别对应 $g = 1$ 和 $g = 2$) 以外, 其他齐性极小超曲面都不是对称或者正规齐性的, 所以, 想要计算它们的第一特征值似乎是很困难的.”

接下来, 在 1988 年, Mutō^[43] 突破了齐性的限制, 证明了对于 $g = 4$ 的某些非齐性极小等参超曲面而言, 丘成桐猜想也成立. 但可惜的是, 他的结论仅覆盖了满足条件限制 $\min(m_1, m_2) \leq 10$ 的某些等参超曲面. 然而在第 1 节末尾我们提到过, OT-FKM 型等参超曲面的重数对 $(m, l - m - 1)$ 中的 m 没有任何限制.

在 2013 年, 我们在文献 [44] 中最终完成了等参情形的丘成桐第一特征值猜想的证明.

定理 4^[44] 对于单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中的闭极小等参超曲面 M^n , 一定有

$$\lambda_1(M^n) = n.$$

事实上, Takagi^[45] 曾断言 $g = 4$, 重数对为 $(1, k)$ 的等参超曲面一定是齐性的. 基于文献 [40, 41] 的结论, 我们只需证明如下结果:

定理 5^[44] 对于单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中 $g = 4$ 且 $m_1, m_2 \geq 2$ 的闭极小等参超曲面 M^n , 一定有

$$\lambda_1(M^n) = n.$$

事实上, 其重数为 $n + 2$.

值得一提的是, 我们的结果并不依赖于齐性性质, 也不依赖于 $g = 4$ 时等参超曲面的分类, 只依赖于重数对 (m_1, m_2) 的取值, 而它们的取值早在 1999 年文献 [30] 中就已完全确定. 此外, 我们的方法也适用于 $g = 6$ 的情形:

定理 6^[46] 对于单位球面 $S^{13}(1)$ 中 $g = 6$ 且重数对为 $(2, 2)$ 的闭极小等参超曲面 M^{12} (不必假定为齐性), 一定有

$$\lambda_1(M^{12}) = 12,$$

且其重数为 14.

注 1^[44] 传说中的陈省身猜想可表述为, 单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中第二基本型的模长为常数的极小浸入超曲面一定是等参的 (参见文献 [47]). 定理 4 已将陈省身猜想与丘成桐第一特征值猜想建立了联

系. 换言之, 假定陈省身猜想成立, 则定理 4 已对数量曲率为常数 (等价于第二基本型的模长为常数) 的极小超曲面证明了丘成桐猜想.

4 焦流形的第一特征值及其应用

4.1 焦流形的第一特征值

鉴于等参超曲面的焦流形是单位球面的极小子流形, 在我们得到了所有极小等参超曲面的第一特征值之后, 一个很自然的问题就是要考虑焦流形 $M_{\pm}$ 的第一特征值. 当 $g = 1$ 时, 焦流形是两个点; 当 $g = 2$ 时, 焦流形是两个单位球面, 显然有第一特征值等于其维数; 当 $g = 3$ 时, 焦流形微分同胚于 $\mathbb{F}P^2$ ($\mathbb{F}$ 代表 $\mathbb{R}$ 、 $\mathbb{C}$ 、 $\mathbb{H}$ 和 $\mathbb{O}$), 当这个 $\mathbb{R}P^2$ 极小 (Veronese) 嵌入到单位球面 $S^4(1)$ 时, 诱导度量与标准的常 Gauss 曲率 $K = 1$ 的度量相差一个常系数, 使得 $K = \frac{1}{3}$, 所以此时的焦流形 $\mathbb{R}P^2$ 满足 $\lambda_1(\mathbb{R}P^2) = 2$. 至于 $\mathbb{C}P^2$ 、 $\mathbb{H}P^2$ 和 $\mathbb{O}P^2$, 当它们极小 (Veronese) 嵌入到单位球面 $S^{3m+1}(1)$ ($m = 2, 4, 8$) 时, 其诱导度量也与本身的对称空间度量相差一个常系数, 使得截面曲率取值于 $[\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$, 所以, 它们的第一特征值也等于其维数 (参见文献 [48, 49]).

当 $g = 4$ 时, 我们得到了如下结论:

定理 7 ^[44] 对于单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中 $g = 4$ 且余维数是 $m_1 + 1$ 的焦流形 M_+ , 若其维数满足 $\dim M_+ \geq \frac{2}{3}n + 1$ (即 $2m_2 \geq m_1 + 3$), 则有

$$\lambda_1(M_+) = \dim M_+ = m_1 + 2m_2$$

且其重数为 $n + 2$. 对于焦流形 M_- , 交换上述条件中的 m_1 与 m_2 , 也有类似结论.

需要特别强调的是, 这里的维数条件是很必要的. 例如, Solomon ^[50] 曾经在 OT-FKM 型的焦流形 M_- 上构造了对应于特征值 $4m_1$ 的特征函数. 也就是说, 如果要求 $2m_1 < m_2$ (如 $(m_1, m_2) = (2, 5)$), 那么就有 $\dim M_- < \frac{2}{3}n + 1$, 进而得到 $\lambda_1(M_-) \leq 4m_1 < \dim M_- = 2m_1 + m_2$.

据此, 我们提出如下问题, 可以将它视作丘成桐第一特征值猜想的高余维推广:

问题 1 ^[44] 对于单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中的 d 维闭极小嵌入子流形 M^d , 若其维数满足 $d \geq \frac{2}{3}n + 1$, 是否有 $\lambda_1(M^d) = d$?

据我们所知, 目前这个问题并没有否定性的例子.

对于那些不满足定理 7 中维数条件的 $g = 4$ 的焦流形, 我们也考察了有哪些的第一特征值可能等于其维数. 主要结果有下面的结论:

命题 1 ^[44] 对于单位球面 $S^{2l-1}(1)$ 中重数为 $(1, k)$ 的 OT-FKM 型焦流形 M_- , 下列等式成立:

$$\lambda_1(M_-) = \min\{4, 2 + k\}.$$

命题 2 ^[46] (1) 对于单位球面 $S^5(1)$ 中重数为 $(1, 1)$ 的 OT-FKM 型焦流形 M_+ ,

$$\lambda_1(M_+) = \dim M_+ = 3,$$

且其重数为 6;

(2) 对于单位球面 $S^{15}(1)$ 中重数为 $(4, 3)$ 的齐性 OT-FKM 型焦流形 M_+ ,

$$\lambda_1(M_+) = \dim M_+ = 10,$$

且其重数为 16.

4.2 焦流形的第一特征值的应用

在 Besse 的著名专著 *Einstein Manifolds* 一书的第 451 页第 16.56 小节中, 曾提出这样的问题:

问题 2 ^[51] 找出 $\mathcal{A}$ -流形的例子, 使得其既不是局部 (内在) 齐性的, 也不是局部 Riemann 乘积, 并且不是 Ricci 平行的.

这里 $\mathcal{A}$ -流形是指 Ricci 张量为循环平行的 Riemann 流形, 它是 Ricci 平行的 Riemann 流形的推广. 可以证明, $\mathcal{A}$ -流形的数量曲率为常数.

针对 Besse 的这个问题, Jelonek 和 Pedersen-Tod 都曾给出构造性的例子, 但是他们的例子都不是单连通的. 2015 年, Tang 和 Yan ^[52, 53] 及 Li 和 Yan ^[54] 证明了等参超曲面的焦流形都是 $\mathcal{A}$ -流形. 进一步地, 文献 [52] 证明了 $g = 4$ 的焦流形绝大部分都不是 Ricci 平行的, 并且对 Ricci 平行的焦流形进行了分类. 此外, 我们还证明了所有 $g = 4$ 且 $m_1, m_2 > 1$ 的焦流形都不是 Riemann 乘积, 以及重数为 $(3, 4k)$ 的焦流形 M_+ 都不是内在齐性的, 从而给出新的无限多的 Besse 问题的单连通的例子.

文献 [52, 53] 证明所有 $g = 4$ 且 $m_1, m_2 > 1$ 的焦流形都不是 Riemann 乘积这一结论时, 使用了特征值估计这个有力工具. 在证明过程中, 我们首先指出, 若此时的焦流形是 Riemann 乘积, 则其重数对只有 $(2, 2)$ 和 $2m_2 \geq m_1 + 3$ (或 $2m_1 \geq m_2 + 3$) 两种可能. 对于 $(2, 2)$ 的情形, 通过计算同伦类和利用文献 [18] 关于 $g = 4$ 的 Einstein 焦流形的分类就可以排除; 而 $2m_2 \geq m_1 + 3$ (或 $2m_1 \geq m_2 + 3$) 的情形是非常多且复杂的, 我们利用定理 7 (参见文献 [44]) 中关于焦流形的第一特征值的估计把这种情形也排除掉了. 可见特征值估计有广泛的几何应用.

参考文献

- 1 Schoen R, Yau S T. Lectures on Differential Geometry. Cambridge: International Press, 1994
- 2 Cecil T E, Chi Q S, Jensen G R. Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures. *Ann of Math* (2), 2007, 166: 1–76
- 3 Immervoll S. On the classification of isoparametric hypersurfaces with four distinct curvatures in spheres. *Ann of Math* (2), 2008, 168: 1011–1024
- 4 Chi Q S. Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures, III. *J Differential Geom*, 2013, 94: 487–522
- 5 Chi Q S. Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures, IV. *ArXiv*:1605.00976, 2017
- 6 Dorfmeister J, Neher E. Isoparametric hypersurfaces, case $g = 6, m = 1$. *Comm Algebra*, 1985, 13: 2299–2368
- 7 Miyaoka R. Isoparametric hypersurfaces with $(g, m) = (6, 2)$. *Ann of Math* (2), 2013, 177: 53–110
- 8 Miyaoka R. Errata of “Isoparametric hypersurfaces with $(g, m) = (6, 2)$ ”. *Ann of Math* (2), 2016, 183: 1057–1071
- 9 Ge J Q. Isoparametric foliations, diffeomorphism groups and exotic smooth structures. *Adv Math*, 2016, 302: 851–868
- 10 Ge J Q, Qian C. Finiteness results for equifocal hypersurfaces in compact symmetric spaces. *Sci China Math*, 2014, 57: 1975–1982
- 11 Ge J Q, Tang Z Z. Geometry of isoparametric hypersurfaces in Riemannian manifolds. *Asian J Math*, 2014, 18: 117–126
- 12 Ge J Q, Tang Z Z, Yan W J. A filtration for isoparametric hypersurfaces in Riemannian manifolds. *J Math Soc Japan*, 2015, 67: 1179–1212
- 13 Peng C K, Qian C. Ricci curvature of double manifolds via isoparametric foliations. *Adv Math*, 2017, 311: 469–480
- 14 Qian C, Tang Z Z. Recent progress in isoparametric functions and isoparametric hypersurfaces. In: *Real and Complex Submanifolds. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol. 106. Tokyo: Springer, 2014, 65–76
- 15 Xie Y Q. Willmore submanifolds in the unit sphere via isoparametric functions. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2015, 31: 1963–1969
- 16 Qian C, Tang Z Z. Isoparametric functions on exotic spheres. *Adv Math*, 2015, 272: 611–629
- 17 Qian C, Tang Z Z. Isoparametric foliations, a problem of Eells-Lemaire and conjectures of Leung. *Proc Lond Math Soc* (3), 2016, 112: 979–1001

- 18 Qian C, Tang Z Z, Yan W J. New examples of Willmore submanifolds in the unit sphere via isoparametric functions, II. *Ann Global Anal Geom*, 2013, 43: 47–62
- 19 Tang Z Z, Xie Y Q, Yan W J. Schoen-Yau-Gromov-Lawson theory and isoparametric foliations. *Comm Anal Geom*, 2012, 20: 989–1018
- 20 Tang Z Z, Yan W J. New examples of Willmore submanifolds in the unit sphere via isoparametric functions. *Ann Global Anal Geom*, 2012, 42: 403–410
- 21 Tang Z Z, Yan W J. Isoparametric foliations and critical sets of eigenfunctions. *Math Z*, 2017, 286: 1217–1226
- 22 Nomizu K. Some results in E. Cartan's theory of isoparametric families of hypersurfaces. *Bull Amer Math Soc*, 1973, 79: 1184–1188
- 23 Ge J Q, Tang Z Z. Isoparametric functions and exotic spheres. *J Reine Angew Math*, 2013, 683: 161–180
- 24 Wang Q M. Isoparametric functions on Riemannian manifolds, I. *Math Ann*, 1987, 277: 639–646
- 25 Münzner H F. Isoparametrische Hyperflächen in Sphären, I; II. *Math Ann*, 1980, 251: 57–71; 1981, 256: 215–232
- 26 Abresch U. Isoparametric hypersurfaces with four or six distinct principal curvatures. *Math Ann*, 1983, 264: 283–302
- 27 Tang Z Z. Isoparametric hypersurfaces with four distinct principal curvatures. *Chinese Sci Bull*, 1991, 36: 1237–1240
- 28 Fang F Q. Multiplicities of principal curvatures of isoparametric hypersurfaces (Max-Planck Institute Preprint Series, 96–80). <http://www.mpim-bonn.mpg.de/preblob/3920>, 1997
- 29 Fang F Q. On the topology of isoparametric hypersurfaces with four distinct principal curvatures. *Proc Amer Math Soc*, 1999, 127: 259–264
- 30 Stolz S. Multiplicities of Dupin hypersurfaces. *Invent Math*, 1999, 138: 253–279
- 31 Ozeki H, Takeuchi M. On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres, I; II. *Tohoku Math J (2)*, 1975, 27: 515–559; 1976, 28: 7–55
- 32 Ferus D, Karcher H, Münzner H F. Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen. *Math Z*, 1981, 177: 479–502
- 33 Takagi R, Takahashi T. On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a sphere. In: *Differential Geometry in Honor of Kentaro Yano*. Tokyo: Kinokuniya, 1972, 469–481
- 34 Takahashi T. Minimal immersions of Riemannian manifolds. *J Math Soc Japan*, 1966, 18: 380–385
- 35 Yau S T. Seminar on Differential Geometry, Problem Section. *Annals of Mathematics Studies*, vol. 102. Princeton: Princeton University Press, 1982
- 36 Brendle S. Embedded minimal tori in S^3 and the Lawson conjecture. *Acta Math*, 2013, 211: 177–190
- 37 Montiel S, Ros A. Minimal immersions of surfaces by the first eigenfunctions and conformal area. *Invent Math*, 1986, 83: 153–166
- 38 Choi H I, Wang A N. A first eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces. *J Differential Geom*, 1983, 18: 559–562
- 39 Choe J, Soret M. First eigenvalue of symmetric minimal surfaces in S^3 . *Indiana Univ Math J*, 2009, 58: 269–282
- 40 Muto H, Ohnita Y, Urakawa H. Homogeneous minimal hypersurfaces in the unit spheres and the first eigenvalues of their Laplacian. *Tohoku Math J (2)*, 1984, 36: 253–267
- 41 Kotani M. The first eigenvalue of homogeneous minimal hypersurfaces in a unit sphere $S^{n+1}(1)$. *Tohoku Math J (2)*, 1985, 37: 523–532
- 42 Solomon B. The harmonic analysis of cubic isoparametric minimal hypersurfaces I: Dimensions 3 and 6; II: Dimensions 12 and 24. *Amer J Math*, 1990, 112: 151–203; 1990, 112: 205–241
- 43 Muto H. The first eigenvalue of the Laplacian of an isoparametric minimal hypersurface in a unit sphere. *Math Z*, 1988, 197: 531–549
- 44 Tang Z Z, Yan W J. Isoparametric foliation and Yau conjecture on the first eigenvalue. *J Differential Geom*, 2013, 94: 539–558
- 45 Takagi R. A class of hypersurfaces with constant principal curvatures in a sphere. *J Differential Geom*, 1976, 11: 225–233
- 46 Tang Z Z, Xie Y Q, Yan W J. Isoparametric foliation and Yau conjecture on the first eigenvalue, II. *J Funct Anal*, 2014, 266: 6174–6199
- 47 Ge J Q, Tang Z Z. Chern conjecture and isoparametric hypersurfaces. In: *Differential Geometry—Under the Influence of S. S. Chern*. Beijing: Higher Education Press; Boston: International Press, 2012, 49–60
- 48 Strese H. Spektren symmetrischer Räume. *Math Nachr*, 1980, 98: 75–82

- 49 Mashimo K. Spectra of the Laplacian on the Cayley projective plane. *Tsukuba J Math*, 1997, 21: 367–396
- 50 Solomon B. Quartic isoparametric hypersurfaces and quadratic forms. *Math Ann*, 1992, 293: 387–398
- 51 Besse A L. *Einstein Manifolds*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1987
- 52 Tang Z Z, Yan W J. Isoparametric foliation and a problem of Besse on generalizations of Einstein condition. *Adv Math*, 2015, 285: 1970–2000
- 53 Tang Z Z, Yan W J. Corrigendum to “Isoparametric foliation and a problem of Besse on generalizations of Einstein condition” [*Adv Math*, 2015, 285: 1970–2000]. *Adv Math*, 2017, 318: 457–458
- 54 Li Q C, Yan W J. On Ricci tensor of focal submanifolds of isoparametric hypersurfaces. *Sci China Math*, 2015, 58: 1723–1736

Yau’s first eigenvalue conjecture in the isoparametric case

Zizhou Tang & Wenjiao Yan

Abstract In this paper, we first survey the development of S. T. Yau’s first eigenvalue conjecture and its complete solution in the isoparametric case, and introduce its relationship with Lawson’s conjecture. Furthermore, we calculate the first eigenvalues of the isoparametric focal submanifolds (minimal submanifolds of the sphere), and propose the generalization of Yau’s conjecture for the higher codimension case.

Keywords isoparametric hypersurface, focal submanifold, Laplace operator, Yau’s first eigenvalue conjecture, Lawson’s conjecture

MSC(2010) 53A30, 53C42, 58J50

doi: 10.1360/N012017-00229