m -重代数 $A^{(m)}$ 上的倾斜模

献给刘绍学教授 90 华诞

张顺华

山东大学数学学院, 济南 250100

E-mail: shzhang@sdu.edu.cn

收稿日期: 2017-12-08; 接受日期: 2018-03-12; 网络出版日期: 2018-08-07

国家自然科学基金 (批准号: 11671230 和 11371165) 资助项目

摘要 设 A 是代数闭域 k 上的有限维遗传代数, $A^{(m)}$ 和 $\mathcal{C}_m(A)$ 分别是 A 的 m -重代数和 m -丛范畴. 众所周知, 代数 $A^{(m)}$ 的投射维数不超过 m 的基本的 (basic) 倾斜模与 m -丛范畴 $\mathcal{C}_m(A)$ 的基本的倾斜对象一一对应, 这是本文进一步研究 m -重代数的倾斜模的原因. 本文综述 m -重代数 $A^{(m)}$ 的偏倾斜模的补、倾斜箭图、倾斜模的自同态代数以及生成子-余生成子的自同态代数的整体维数的值分布.

关键词 m -重代数 倾斜模 倾斜箭图 生成子-余生成子 m -丛范畴

MSC (2010) 主题分类 16G10, 16G70

1 引言和预备知识

设 Λ 是代数闭域 k 上的有限维代数, $\Lambda\text{-mod}$ 表示有限生成的左 Λ -模范畴, $\Lambda\text{-ind}$ 表示 $\Lambda\text{-mod}$ 的由不可分解 Λ -模的同构类构成的子范畴. $D = \text{Hom}_k(-, k)$ 是 $\Lambda\text{-mod}$ 到 $\Lambda^{\text{op}}\text{-mod}$ 的对偶函子, $\text{gl.dim } \Lambda$ 是代数 Λ 的整体维数. τ_Λ 是代数 Λ 的 Auslander-Reiten 变换, Γ_Λ 是 Λ 的 Auslander-Reiten 箭图.

设 $\mathcal{C}$ 是 $\Lambda\text{-mod}$ 的一个满子范畴, $C_M \in \mathcal{C}$, $M \in \Lambda\text{-mod}$. 根据文献 [1], 称同态 $\varphi: C_M \rightarrow M$ 是 M 的一个右 $\mathcal{C}$ -逼近, 如果对每个 $C \in \mathcal{C}$, 同态

$$\text{Hom}_\Lambda(C, \varphi): \text{Hom}_\Lambda(C, C_M) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(C, M)$$

都是满射. M 的一个极小右 $\mathcal{C}$ -逼近既是一个右 $\mathcal{C}$ -逼近也是一个右极小映射. 称 $\mathcal{C}$ 是一个反变有限子范畴, 如果每个 $M \in \Lambda\text{-mod}$ 都有 (极小) 右 $\mathcal{C}$ -逼近. 对偶地可以定义 (极小) 左 $\mathcal{C}$ -逼近和共变有限子范畴.

英文引用格式: Zhang S H. Tilting modules over m -replicated algebra $A^{(m)}$ (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1641–1650, doi: 10.1360/N012017-00259

给定 $M \in \Lambda\text{-mod}$. 令

$$M^\perp = \{X \in \Lambda\text{-mod} \mid \text{Ext}_\Lambda^i(M, X) = 0, i \geq 1\},$$

$${}^\perp M = \{X \in \Lambda\text{-mod} \mid \text{Ext}_\Lambda^i(X, M) = 0, i \geq 1\}.$$

我们用 $\Omega_\Lambda^i M$ 和 $\Omega_\Lambda^{-i} M$ 分别表示 M 的第 i 次合冲 (syzygy) 和余合冲 (cosyzygy). 设 M 有直和分解 $M = \bigoplus_{i=1}^m M_i^{d_i}$, 其中每个 M_i 都是不可分解模, 并且对每个 i , $d_i > 0$, 当 $i \neq j$ 时, M_i 与 M_j 不同构. M 称为基本的 (basic), 如果每个 $d_i = 1$. $\delta(M)$ 是 M 的互不同构的不可分解直和项的个数, $\text{pd}_\Lambda M$ 是 Λ -模 M 的投射维数. 我们用 $\text{gen} M$ 表示由 M 生成的子范畴, 用 $\text{add} M$ 表示由 M 的不可分解直和项的有限直和构成的满子范畴.

设 M 和 N 是两个不可分解 Λ -模. $\Lambda\text{-ind}$ 中的一个非零同态序列链

$$M = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_t} M_t = N$$

称为从 M 到 N 的一条路. 我们用 $M \leq N$ 表示存在从 M 到 N 的一条路, 也称 M 是 N 的一个前继 (或称 N 是 M 的一个后继).

$T \in \Lambda\text{-mod}$ 称为 (Γ 义) 倾斜模, 如果 T 满足以下条件:

- (1) $\text{pd}_\Lambda T = n < \infty$;
- (2) $\text{Ext}_\Lambda^i(T, T) = 0$ 对所有的 $i > 0$ 成立;
- (3) 存在长正合列

$$0 \rightarrow A \rightarrow T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow \cdots \rightarrow T_n \rightarrow 0,$$

其中 $T_i \in \text{add } T$, $0 \leq i \leq n$.

如果 Λ -模 M 仅满足上述条件 (1) 和 (2), 则称 M 是一个偏倾斜模. 一个偏倾斜模 M 若还满足 $\delta(M) = \delta(\Lambda) - 1$, 则称 M 是几乎倾斜模. 设 M 是偏倾斜模, 一个 Λ -模 X 若还满足 $M \oplus X$ 是倾斜模, 且 $\text{add} M \cap \text{add} X = 0$, 则称 X 是 M 的一个倾斜补.

倾斜理论是 Morita 等价的自然推广, 也是代数表示论的核心内容之一. 一方面, 我们关注代数 Λ 的表示范畴与 Λ 的倾斜模的自同态代数的表示范畴之间的联系; 另一方面, 我们还关注代数 Λ 的全体倾斜模的结构性质.

投射维数不超过 1 的 (偏) 倾斜模称为经典 (偏) 倾斜. 众所周知, 经典偏倾斜模 M 总存在倾斜补, 且 M 是倾斜模当且仅当 $\delta(M) = \delta(\Lambda)$ (参见文献 [2]). 一般情形下, 满足 $\delta(M) = \delta(\Lambda)$ 的偏倾斜模 M 是否是倾斜模至今还是一个公开问题, 偏倾斜模的补也并不是总是存在. Rickard 和 Schofield [3] 给出了以下反例.

例 1.1 设 Λ 是由箭图

给出的路代数, 满足关系 $fc = 0, bg = 0, gf = 0$.

计算得 $\text{gl.dim} \Lambda = 4$, 单模 S_1 满足 $\text{pd} S_1 = 2$ 且 $\text{Ext}_{\Lambda}^i(S_1, S_1) = 0, i > 0$, 即 S_1 是投射维数等于 2 的偏倾斜模, 但是 S_1 没有倾斜补.

因此, 给出偏倾斜模都有倾斜补的有限维代数的分类是一个有趣的问题, 除了遗传代数之外, 我们在文献 [4] 证明了遗传代数的 m -重代数的偏倾斜模都有倾斜补. 我们还研究了 m -重代数 $A^{(m)}$ 的倾斜模的一些结构性质以及这类代数的组合同调性质. m -重代数的倾斜理论与 m -丛范畴关系紧密, Assem 等 [5] 证明了重复代数的投射维数不超过 1 的倾斜模与丛范畴的倾斜对象一一对应, 他们在文献 [6] 证明了 m -重代数 $A^{(m)}$ 的投射维数不超过 m 的倾斜模与 m -丛范畴 $\mathcal{C}_m(A)$ 的倾斜对象一一对应.

以下总是假定 A 是代数闭域 k 上的有限维遗传代数, $A^{(m)}$ 是 A 的 m -重代数, $\mathcal{C}_m(A) = D^b(A - \text{mod})/\tau^{-1}[m]$ 是 A 的 m -丛范畴 (参见文献 [7]), $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}_1(A)$ 是丛范畴 (参见文献 [8]). 第 2 节总结 m -重代数 $A^{(m)}$ 的偏倾斜模的结构性质和几乎倾斜模的倾斜补的个数; 第 3 节讨论 $A^{(m)}$ 的倾斜箭图和倾斜模的自同态代数; 最后一节给出 m -重代数 $A^{(m)}$ 的生成子 - 余生成子的自同态代数的整体维数的值分布.

我们总假定所考虑的 $\Lambda\text{-mod}$ 的子范畴是取同构和直和项闭的满子范畴, 文中采用的概念和记号可以参见文献 [2, 9, 10].

2 $A^{(m)}$ 的偏倾斜模

根据文献 [6], 遗传代数 A 的 m -重代数 $A^{(m)}$ 是下列矩阵代数:

$$A^{(m)} = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ Q_1 & A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_2 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_m & A_m \end{bmatrix},$$

对每个 i , $A_i = A$, $Q_i = DA$, 其他元素为 0, 加法为矩阵的通常加法, 乘法由自然同构 $A \otimes_A DA \cong_A DA_A \cong DA \otimes_A A$ 和零态射 $DA \otimes_A DA \rightarrow 0$ 诱导.

约定 $A = A_0$, $A_i\text{-ind}$ 是 $A^{(m)}\text{-ind}$ 的子范畴, $0 \leq i \leq m$. 我们用 Σ_0 表示互不同构的不可分解投射 A_0 -模构成的集合, 用 Σ_i 表示 $\Omega_{A^{(m)}}^{-i} \Sigma_0$.

注 2.1 (1) 根据文献 [6], 可得 $m+1 \leq \text{gl.dim} A^{(m)} \leq 2m+1$. 如果 A 是无限表示型, 则 $\text{gl.dim} A^{(m)} = 2m+1$. 当 $m=1$ 时, $A^{(1)}$ 称为 A 的一重代数 (参见文献 [5]), 这类代数的倾斜突变和倾斜箭图参见文献 [11].

(2) 设 M 是一个不可分解 $A^{(m)}$ -模. 如果 M 不是 $A^{(0)}$ -模, 则 M 在 $A^{(m)}\text{-mod}$ 中的投射盖是一个双射模 (既是投射模也是内射模).

Lei 等 [12] 证明了以下结论:

命题 2.2 设 T 是一个忠实的几乎倾斜 $A^{(m)}$ -模且 $\text{pd}_{A^{(m)}} T \leq m$, 则在 $A^{(m)}\text{-mod}$ 中存在正合列

$$(*) \quad 0 \rightarrow X_0 \xrightarrow{g_0} T'_0 \xrightarrow{g_1} T'_1 \rightarrow \cdots \rightarrow T'_{m-2} \xrightarrow{g_{m-1}} T'_{m-1} \rightarrow X_m \rightarrow 0$$

满足以下条件:

- (1) $T'_i \in \text{add } T$, $0 \leq i \leq m-1$;
- (2) 令 $X_i = \text{Coker } g_{i-1}$, $1 \leq i \leq m$, 则 $i \leq \text{pd}_{A^{(m)}} X_i \leq i+1$, $0 \leq i \leq m$;
- (3) 每个单同态 $X_i \hookrightarrow T'_i$ 都是极小的左 $\text{add } T$ -逼近;
- (4) T 恰好有 $m+1$ 投射维数不超过 m 的互不同构的不可分解倾斜补 $X_0, X_1, \dots, X_m$;
- (5) 设 $\text{pd}_{A^{(m)}} T = t \leq m$, T 的上述倾斜补的分布如下:
 - (i) 如果 $\text{pd}_{A^{(m)}} X_0 = 0$, 则对每个 i , 有 $\text{pd}_{A^{(m)}} X_i = i$,
 - (ii) 如果 $\text{pd}_{A^{(m)}} X_0 \neq 0$, 则存在唯一的 j 使得 $0 \leq j \leq t-1$ 并满足

$$\text{pd}_{A^{(m)}} X_j = \text{pd}_{A^{(m)}} X_{j+1} = j+1.$$

对每个 i , $0 \leq i \leq j$, 都有 $\text{pd}_{A^{(m)}} X_i = i+1$, 而对于每个满足 $i \geq j+1$ 的 i , 有 $\text{pd}_{A^{(m)}} X_i = i$;

- (6) T 的互不同构的倾斜补的个数是 $2m+1$ 或 $2m+2$.

关于 m -重代数 $A^{(m)}$ 的偏倾斜模, 我们在文献 [4] 中得到了下面的一系列结果.

定理 2.3 设 M 是一个偏倾斜 $A^{(m)}$ -模, 则在 $A^{(m)}\text{-mod}$ 中存在 M 的倾斜补, 即存在一个 $A^{(m)}$ -模 C 使得 $M \oplus C$ 是倾斜模.

由此可得下面的定理:

定理 2.4 设 T 是一个偏倾斜 $A^{(m)}$ -模, 则 T 是倾斜模当且仅当 $\delta(T) = \delta(A^{(m)})$.

推论 2.5 设 T 是一个忠实的几乎倾斜 $A^{(m)}$ -模. 如果 A 是无限表示型遗传代数, 则 T 的互不同构的不可分解倾斜补的个数为 $2m+1$ 或 $2m+2$.

我们以一重代数为例, 讨论当 $m=1$ 时, 一个忠实的几乎倾斜 $A^{(1)}$ -模的互不同构的不可分解倾斜补的个数何时为 3, 何时为 4? 假定 A 是无限表示型遗传代数, 因此, $A^{(1)}$ 也是无限表示型代数, 并且 $\text{gl.dim } A^{(1)} = 3$. 此时, 一个忠实的几乎倾斜 $A^{(1)}$ -模的互不同构的不可分解倾斜补的个数至少 3, 至多为 4.

命题 2.6 设 $A^{(1)}$ 是 A 的一重代数, T_1 是一个忠实的几乎倾斜 $A^{(1)}$ -模且 $\text{pd}_{A^{(1)}} T_1 \leq 1$. 如果 T_1 恰好有 4 个互不同构的倾斜补, 则 $T_0 = T_1/P$ 是一个忠实的 A_0 -模, 其中 P 是 T_1 的双射直和项.

我们注意到命题 2.6 的逆一般不成立.

例 2.7 设 A 是 $\widetilde{D}_4$ 型的遗传代数, $A^{(1)} = k\widetilde{D}_4^{(1)}/I$,

$$\begin{array}{ccccccc} & & 2 & & 2' & & \\ & \swarrow & & \nwarrow & \swarrow & & \\ \widetilde{D}_4^{(1)} : 1 & \rightleftharpoons & 3 & \rightleftharpoons & 1' & \rightleftharpoons & 3' \\ & \searrow & 4 & \swarrow & 4' & \searrow & \\ & & 5 & & 5' & & \end{array}$$

不可分解双射 $A^{(1)}$ -模可以表示如下:

$$P'_1 = \begin{smallmatrix} 1' \\ 2345 \\ 1 \end{smallmatrix}, \quad P'_2 = \begin{smallmatrix} 2' \\ 1' \\ 2 \end{smallmatrix}, \quad P'_3 = \begin{smallmatrix} 3' \\ 1' \\ 3 \end{smallmatrix}, \quad P'_4 = \begin{smallmatrix} 4' \\ 1' \\ 4 \end{smallmatrix}, \quad P'_5 = \begin{smallmatrix} 5' \\ 1' \\ 5 \end{smallmatrix}.$$

令 $P = P'_1 \oplus P'_2 \oplus P'_3 \oplus P'_4 \oplus P'_5$ 是互不同构的不可分解双射 $A^{(1)}$ -模的直和. 取

$$T_1 = \begin{smallmatrix} 2345 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus 4 \oplus 5 \oplus P,$$

则 T_1 是一个忠实的几乎倾斜 $A^{(1)}$ -模, $\text{pd } T_1 = 1$, 并且 $T_0 = T_1/P$ 是一个忠实的 A_0 -模. 但是 T_1 只有 3 个互不同构的倾斜补

$$X_0 = \begin{smallmatrix} 345 \\ 1 \end{smallmatrix}, \quad X_1 = 2, \quad X_2 = \begin{smallmatrix} 2' \\ 1' \end{smallmatrix},$$

并且 $\text{pd } X_0 = \text{pd } X_1 = 1$, $\text{pd } X_2 = 2$, T_1 没有投射维数等于 3 的倾斜补.

下面的两个定理给出了几类忠实的几乎倾斜 $A^{(1)}$ -模恰好有 4 个倾斜补的等价条件.

定理 2.8 设 T_1 是一个忠实的几乎倾斜 $A^{(1)}$ -模且 $\text{pd}_{A^{(1)}} T_1 \leq 1$, 则 T_1 恰好有 4 个互不同构的倾斜补的充要条件是 T_1 有唯一的投射维数等于 2 的倾斜补 X 并使得 X 的内射包 $E(X)$ 是投射模.

定理 2.9 设 T_2 是一个忠实的几乎倾斜 $A^{(1)}$ -模且 $\text{pd}_{A^{(1)}} T_2 \leq 2$, 则 T_2 恰好有 4 个互不同构的倾斜补的充要条件是 T_2 有一个投射维数等于 3 的倾斜补.

命题 2.10 设 T_2 是一个忠实的几乎倾斜 $A^{(1)}$ -模且 $\text{pd}_{A^{(1)}} T_2 = 2$. 如果 T_2 有一个投射维数为 2 的倾斜补 X 并且 X 的内射包 $E(X)$ 是投射模, 则 T_2 恰好有 4 个互不同构的倾斜补.

注 2.11 命题 2.10 的逆不成立. 设 T_2 是一个忠实的几乎倾斜 $A^{(1)}$ -模且 $\text{pd}_{A^{(1)}} T_2 = 2$. 如果 T_2 恰好有 4 个互不同构的倾斜补, 那么 T_2 必定有一个投射维数等于 2 的倾斜补, 但是这个倾斜补的内射包未必是投射模.

例 2.12 设 $A^{(1)} = k\widetilde{D_4}^{(1)}/I$ 如同例 2.7. 取

$$T_2 = \begin{smallmatrix} 3'4'5' \\ 1'1' \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2'4'5' \\ 1'1' \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2'3'5' \\ 1'1' \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2'3'4' \\ 1'1' \end{smallmatrix} \oplus P,$$

则 T_2 是一个忠实的几乎倾斜 $A^{(1)}$ -模并且 $\text{pd } T_2 = 2$, T_2 有 4 个互不同构的倾斜补 $X_0 = 1$,

$$X_1 = \begin{smallmatrix} 1' \\ 2345 \end{smallmatrix}, \quad X_2 = \begin{smallmatrix} 2'3'4'5' \\ 1'1'1' \end{smallmatrix}, \quad X_3 = \begin{smallmatrix} 2'2'3'3'4'4'5'5' \\ 1'1'1'1'1' \end{smallmatrix},$$

其中 $\text{pd } X_i = i$, $0 \leq i \leq 3$, 即 X_2 是投射维数等于 2 的倾斜补, 但 X_2 的内射包

$$E(X_2) = \left(\begin{smallmatrix} 2'3'4'5' \\ 1' \end{smallmatrix} \right)^3$$

不是投射模.

下面的例子说明, 如果一个忠实的投射维数等于 3 的几乎倾斜 $A^{(1)}$ -模 T_3 有一个投射维数等于 3 的倾斜补, 并不能保证 T_3 恰好有 4 个互不同构的倾斜补.

例 2.13 设 $Q: 1 \rightleftharpoons 2 \rightleftharpoons 1' \rightleftharpoons 2'$, $A^{(1)} = kQ/I$ 是 Kronecker 代数的重复代数. 不可分解双射 $A^{(1)}$ -模如下:

$$P'_1 = \begin{smallmatrix} 1' \\ 22 \\ 1 \end{smallmatrix}, \quad P'_2 = \begin{smallmatrix} 2' \\ 11 \\ 2 \end{smallmatrix}.$$

取

$$T_3 = 2' \oplus \begin{smallmatrix} 1' \\ 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2' \\ 11 \\ 2 \end{smallmatrix},$$

则 $\text{pd}_{A^{(1)}} T_3 = 3$, 且 T_3 只有 3 个互不同构的倾斜补

$$X_1 = \begin{smallmatrix} 2222 \\ 111 \end{smallmatrix}, \quad X_2 = \begin{smallmatrix} 1'1'1' \\ 22 \end{smallmatrix}, \quad X_3 = \begin{smallmatrix} 2'2' \\ 1' \end{smallmatrix},$$

计算可得 $\mathrm{pd}_{A(1)} X_i = i, 1 \leq i \leq 3$.

3 $A^{(m)}$ 的倾斜箭图和倾斜模的自同态代数

设 $\mathcal{T}_{A^{(m)}}$ 是由全体基本的倾斜 $A^{(m)}$ -模的同构类构成的集合. 根据文献 [13], m -重代数 $A^{(m)}$ 的倾斜箭图 $\vec{\mathcal{K}}_{A^{(m)}}$ 定义如下. $\vec{\mathcal{K}}_{A^{(m)}}$ 的顶点集是集合 $\mathcal{T}_{A^{(m)}}$ 中的元素; 任取 $T, T' \in \vec{\mathcal{K}}_{A^{(m)}}$, 存在箭向 $T' \rightarrow T$ 当且仅当 $T' = \bar{T} \oplus X, T = \bar{T} \oplus Y, X$ 和 Y 都是不可分解模, 且存在短正合列 $0 \rightarrow X \rightarrow E \rightarrow Y \rightarrow 0$ 使得 $E \in \mathrm{add} \bar{T}$.

定理 3.1 设 $A^{(m)}$ 是遗传代数 A 的 m -重代数, 则 $A^{(m)}$ 的倾斜箭图 $\vec{\mathcal{K}}_{A^{(m)}}$ 是连通的.

遗传代数的倾斜箭图通常是不连通的, 例如, Kronecker 代数 A 的倾斜箭图就是由两条不连通的射线构成:

$$\begin{aligned} * &\rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \cdots, \\ \cdots &\leftarrow \circ \leftarrow \circ \leftarrow \star, \end{aligned}$$

其中 $*$ 是投射倾斜模, $\star$ 是内射倾斜模. 根据定理 3.1, 倾斜箭图 $\vec{\mathcal{K}}_{A(1)}$ 是连通的.

下面给出 m -重代数 $A^{(m)}$ 的倾斜模与 BB (Brenner-Butler)-倾斜模的关系.

定义 3.2 设 S 是一个非内射单 Λ -模, $P(S)$ 是 S 的投射盖, 且满足以下性质:

- (1) $\mathrm{pd}_{\Lambda} \tau^{-1} S \leq 1$;
- (2) $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^1(S, S) = 0$;
- (3) $\Lambda = P(S) \oplus P, T = \tau^{-1} S \oplus P$.

此时 T 是一个经典倾斜模, 称为由单模 S 诱导的 BB-倾斜模.

下面的两个定理说明了 $A^{(m)}$ 的倾斜模的自同态代数可以看作某个代数的 BB-倾斜模的自同态代数.

定理 3.3 [14] 设 M 是一个忠实的几乎倾斜 $A^{(m)}$ -模, $X_0, \dots, X_t$ 是 M 的互不同构的倾斜补. 令 $\Gamma_i = \mathrm{End}_{A^{(m)}}(X_i \oplus M)$, 则存在 BB-倾斜 Γ_i -模 T_i 使得 $\mathrm{End}_{\Gamma_i} T_i \simeq \Gamma_{i+1}, 0 \leq i \leq t-1$.

定理 3.4 [14] m -重代数 $A^{(m)}$ 的倾斜模的自同态代数可以通过 BB-倾斜模的自同态代数实现.

Zhu [7] 及 Zhou 和 Zhu [15] 证明了 m -丛范畴 $\mathcal{C}_m(A)$ 中的每个几乎倾斜对象恰好有 $m+1$ 个互不同构的倾斜补, 这些倾斜补通过 $m+1$ 个三角连接. 我们证明了 m -重代数 $A^{(m)}$ 的倾斜模也有类似的结果, 并且 $A^{(m)}$ 的投射维数不超过 m 的倾斜突变与 $\mathcal{C}_m(A)$ 的倾斜突变密切相关.

定义 3.5 [16] 由非投射非内射不可分解 $A^{(m)}$ -模构成的一个集合 $\{X_0, X_1, \dots, X_t\}$ 称为 $A^{(m)}$ -mod 中的一个偏突变队, 如果这个集合满足

$$\dim_k \mathrm{Ext}_{A^{(m)}}^s(X_j, X_i) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } i+s=j, \quad s \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

一个极大的偏突变队称为突变队.

定理 3.6 [16] 设 T 是一个忠实的几乎倾斜 $A^{(m)}$ -模, $X_0, \dots, X_t$ 是 T 的全部的互不同构的倾斜补, 则 $\{X_0, \dots, X_t\}$ 是 $A^{(m)}$ -mod 的一个突变队, 即

$$\dim_k \mathrm{Ext}_{A^{(m)}}^s(X_j, X_i) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } i+s=j, \quad s \geq 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

而且对每个 $0 \leq i \leq t-1$ 和 $0 \leq i+s \leq t$, 正合列 $0 \rightarrow X_i \rightarrow T_i \rightarrow T_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow T_{i+s-1} \rightarrow X_{i+s} \rightarrow 0$ 构成 $\text{Ext}_{A^{(m)}}^s(X_{i+s}, X_i)$ 的一组 k -基.

用 $\mathcal{L}_m(A^{(m)})$ 表示前继的投射维数不超过 m 的不可分解 $A^{(m)}$ -模构成的集合, 称 $\mathcal{L}_m(A^{(m)})$ 是 $A^{(m)}$ -mod 的 m -左部分. 下面的结果说明了突变队与倾斜模之间的联系.

定理 3.7^[16] 设 $\mathcal{N}$ 是一个偏突变队. 如果 $\mathcal{N}$ 中的元素全都在 $\mathcal{L}_m(A^{(m)})$ 中, 则 $\mathcal{N}$ 恰好由 $m+1$ 个元素 $\{X_0, \dots, X_m\}$ 构成, 并且存在一个忠实的几乎倾斜 $A^{(m)}$ -模 T , 使得 $T \oplus X_i$ ($0 \leq i \leq m$) 都是倾斜 $A^{(m)}$ -模.

注 3.8 上述两个定理可以用来解释 $A^{(m)}$ -mod 的倾斜突变与 m -丛范畴 $\mathcal{C}_m(A)$ 的倾斜突变的联系.

定义 3.9^[17] 设 T 是 m -丛范畴 $\mathcal{C}_m(A)$ 的一个 m -倾斜对象. 由 $m+1$ 个三角

$$X_i \xrightarrow{a_i} T_i \xrightarrow{b_{i+1}} X_{i+1} \rightarrow X_i[1], \quad i = 0, 1, \dots, m$$

诱导的一个 $(m+3)$ -角

$$X_0 \xrightarrow{a_0} T_0 \rightarrow \cdots \rightarrow T_m \xrightarrow{b_{m+1}} X_0$$

称为 Auslander-Reiten $(m+3)$ -角, 如果满足以下条件:

- (1) X_0 和 T_i ($0 \leq i \leq m$) 都属于 $\text{add } T$;
- (2) a_0 是一个始于 X_0 的 source 映射, b_{m+1} 是一个止于 $X_{m+1} = X_0$ 的 sink 映射;
- (3) a_i 是 X_i 的一个极小左 $\text{add } T$ -逼近, $1 \leq i \leq m$;
- (4) b_i 是 X_i 的一个极小右 $\text{add } T$ -逼近, $1 \leq i \leq m$.

设 T 是一个忠实的投射维数不超过 m 的几乎倾斜 $A^{(m)}$ -模. 根据命题 2.2, T 恰好有 $m+1$ 个投射维数不超过 m 的互不同构的倾斜补 $X_0, \dots, X_m$, 这些倾斜补由一个长正合列连接,

$$(*) \quad 0 \rightarrow X_0 \xrightarrow{g_0} T_0 \xrightarrow{g_1} T_1 \xrightarrow{g_2} \cdots \rightarrow T_{m-1} \xrightarrow{g_m} X_m \rightarrow 0,$$

其中 $T_i \in \text{add } T$, $0 \leq i \leq m-1$, 且 $X_j = \text{Im } g_j$, $0 \leq j \leq m$. $X_i \xrightarrow{f_i} T_i$ 是极小左 $\text{add } T$ -逼近.

令 π 是下列合成函子:

$$\pi: \text{mod } A^{(m)} \hookrightarrow \text{mod } \hat{A} \rightarrow \underline{\text{mod}} \hat{A} \cong \mathcal{D}^b(A) \rightarrow \mathcal{C}_m(A).$$

$\pi(T)$ 是 $\mathcal{C}_m(A)$ 中的一个几乎倾斜对象, $\pi(X_0), \dots, \pi(X_m)$ 是 $\pi(T)$ 的 $m+1$ 个互不同构的倾斜补.

对于每个 $0 \leq i \leq m-1$, $A^{(m)}$ -mod 中的第 i 个连接序列

$$0 \rightarrow X_i \xrightarrow{f_i} T_i \xrightarrow{g_i} X_{i+1} \rightarrow 0$$

诱导 $\mathcal{C}_m(A)$ 的一个三角:

$$\pi(X_i) \xrightarrow{\bar{f}_i} \pi(T_i) \xrightarrow{\bar{g}_i} \pi(X_{i+1}) \rightarrow \pi(X_i)[1],$$

其中 $\bar{f}_i$ 是 $\pi(X_i)$ 的极小左 $\text{add } \pi(T)$ -逼近, $\bar{g}_i$ 是 $\pi(X_{i+1})$ 的极小右 $\text{add } \pi(T)$ -逼近.

这些连接三角可以构成一个 $(m+3)$ -角:

$$(**) \quad \pi(X_0) \rightarrow \pi(T_0) \rightarrow \pi(T_1) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi(T_m) \rightarrow \pi(X_0).$$

我们有以下结果.

定理 3.10^[16] 设 T 是一个忠实的投射维数不超过 m 的几乎倾斜 $A^{(m)}$ -模, $X_0, \dots, X_m$ 是 T 的投射维数不超过 m 的互不同构的倾斜补, 则它们在 m -丛范畴 $\mathcal{C}_m(A)$ 中诱导的 $(m+3)$ -角 $(**)$ 恰好是一个 Auslander-Reiten $(m+3)$ -角.

4 $A^{(m)}$ 的同调维数

生成子 - 余生成子的自同态代数是一类重要的代数, 它们恰好是支配维数不小于 2 的代数. Auslander^[9] 研究了生成子 - 余生成子的自同态代数的整体维数的最小值, 称为表示维数, 他证明了一个代数是有限表示型当且仅当其表示维数不超过 2. Iyama^[18] 证明了 Artin 代数的表示维数总是有限的; Rouquier^[19] 证明了 Artin 代数的表示维数无上界, 即给定整数 n , 总存在表示维数等于 n 的代数.

一般情形下, 计算一个生成子 - 余生成子的自同态代数的整体维数并不容易, Dlab 和 Ringel^[20] 确定了遗传代数的生成子 - 余生成子的自同态代数的整体维数的值分布情形. 本节给出 m -重代数 $A^{(m)}$ 的生成子 - 余生成子的自同态代数的整体维数的取值范围.

一个 Λ -模 M 称为 Λ -mod 的生成子 - 余生成子, 如果每个不可分解投射模和不可分解内射模都是在 $\text{add } M$ 中. 一个生成子 - 余生成子 M 如果还满足 $\text{gl.dim End}_{\Lambda}(M) = d$, 则称 M 是 d -维生成子 - 余生成子.

设 A 是有限维遗传代数, $A^{(m)}$ 是 A 的 m -重代数, 则 $A^{(m)}$ 与 A 有相同的表示型. 如果 $A^{(m)}$ 是有限表示型, 设 s 是 $A^{(m)}$ 的 Auslander-Reiten 箭图中 τ -轨道的最大长度, 文献 [21] 证明了存在 $A^{(m)}$ -mod 的 d -维生成子 - 余生成子, 其中 d 是整数且满足 $2 \leq d \leq s$. 若 $A^{(m)}$ 是无限表示型, 我们证明了存在 $A^{(m)}$ -mod 的 d -维生成子 - 余生成子, 其中 d 是不小于 3 的任意整数或者 $d = \infty$. 我们用 I_m 表示 m -重代数 $A^{(m)}$ 的全体互不同构的非投射不可分解内射模的直和. 以下文献 [21] 证明的主要结果.

命题 4.1^[21] 设 $d \geq 2$ 是一个整数, M 是 $A^{(m)}$ -mod 的一个生成子 - 余生成子. 如果存在不可分解 $A^{(m)}$ -模 X 不属于 $\text{add } M$ 且满足 $\tau^{d-1}X = 0$, 则

$$\text{gl.dim End}_{A^{(m)}}(M) \leq d.$$

定理 4.2^[21] 设 $d \geq 2$ 是一个整数且 $A^{(m)}$ 是有限表示型的 m -重代数, 则存在一个 d -维生成子 - 余生成子的充要条件是 $A^{(m)}$ 的 Auslander-Reiten 箭图存在长为 d 的 $\tau_{A^{(m)}}$ -轨道.

取 U_k 是 $\Sigma_k \cap \text{ind } A^{(m)}$ 中不可分解模的直和, $k \geq 0$. 令 P 是全体不可分解双射 $A^{(m)}$ -模的直和并设 $\text{gl.dim } A^{(m)} = t$.

命题 4.3^[21] 设 $A^{(m)}$ 是遗传代数 A 的 m -重代数. 令

$$E_i = A \oplus I_m \oplus P \oplus \bigoplus_{k=i}^{t-1} U_k, \quad 1 \leq i \leq t-1,$$

则

$$\text{gl.dim End}_{A^{(m)}}(E_i) = i + 2.$$

推论 4.4^[21] 设 d 是整数且 $3 \leq d \leq t+1$, 则存在 $A^{(m)}$ 的 d -维生成子 - 余生成子 M . 由此可见, $A^{(m)}$ 的表示维数不超过 3 (参见文献 [22]).

命题 4.5^[21] 设 $d \geq 2m+3$ 是整数. 设 Z 是一个非内射不可分解 $A^{(m)}$ -模且满足 $\tau^{d-(2m+2)}Z$ 是单投射 A -模,

$$0 \rightarrow \tau Z \rightarrow \bigoplus Y_j \rightarrow Z \rightarrow 0$$

是 Auslander-Reiten 序列且每个 Y_j 都是不可分解模. 令 P 是全体不可分解双射 $A^{(m)}$ -模的直和. 取

$$M = A \oplus I_m \oplus \bigoplus_{i=0}^{d-(2m+3)} (\bigoplus \tau^i Y_j) \oplus P,$$

则 M 是 $A^{(m)}\text{-mod}$ 的一个生成子 - 余生成子且 $\text{gl.dim End}_{A^{(m)}}(M) = d$.

命题 4.6 ^[21] 设 N 是不可分解 A -模且 N 的自同态代数是除环, 如果存在不可裂的正合列

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{u} N' \xrightarrow{v} N \rightarrow 0,$$

则 $M = A \oplus I_m \oplus P \oplus N'$ 是 $A^{(m)}\text{-mod}$ 的一个生成子 - 余生成子, 并且 $\text{gl.dim End}_{A^{(m)}}(M) = \infty$, 其中 P 是全体不可分解双射 $A^{(m)}$ -模的直和.

综合上述两个结果, 我们下面的定理.

定理 4.7 ^[21] 设 $A^{(m)}$ 是无限表示型遗传代数 A 的 m -重代数, d 是一个整数且 $d \geq 3$ 或者 $d = \infty$, 则存在 $\text{mod} A^{(m)}$ 的一个生成子 - 余生成子 M 使得

$$\text{gl.dim End}_{A^{(m)}}(M) = d.$$

参考文献

- 1 Auslander M, Reiten I. Applications of contravariantly finite subcategories. *Adv Math*, 1991, 86: 111–152
- 2 Assem I, Simson D, Skowronski A. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Vol. 1. Techniques of Representation Theory. London Mathematical Society Student Texts, vol. 65. Cambridge: Cambridge University Press, 2006
- 3 Rickard J, Schofield A. Cocovers and tilting modules. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 1985, 106: 1–5
- 4 Zhang S. Partial tilting modules over m -replicated algebras. *J Algebra*, 2010, 323: 2538–2546
- 5 Assem I, Brüstle T, Schiffler R, et al. Cluster categories and duplicated algebras. *J Algebra*, 2006, 305: 548–561
- 6 Assem I, Brüstle T, Schiffler R, et al. m -Cluster categories and m -replicated algebras. *J Pure Appl Algebra*, 2008, 212: 884–901
- 7 Zhu B. Generalized cluster complexes via quiver representations. *J Algebraic Combin*, 2008, 27: 35–54
- 8 Buan A, Marsh R, Reineke M, et al. Tilting theory and cluster combinatorics. *Adv Math*, 2006, 204: 572–618
- 9 Auslander M. Representation Dimension of Artin Algebras. Queen Mary College Mathematics Notes. London: Queen Mary College, 1971
- 10 Auslander M, Reiten I, Smalø S O. Representation Theory of Artin Algebras. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- 11 Zhang S. Tilting mutation and duplicated algebras. *Comm Algebra*, 2009, 37: 3516–3524
- 12 Lei X, Lv H, Zhang S. Complements to the almost complete tilting $A^{(m)}$ -modules. *Comm Algebra*, 2009, 37: 1719–1728
- 13 Happel D, Unger L. On the quiver of tilting modules. *J Algebra*, 2005, 284: 857–868
- 14 Pei G, Yin H, Zhang S. Endomorphism algebras of tilting modules over m -replicated algebras. *Linear Algebra Appl*, 2014, 448: 292–298
- 15 Zhou Y, Zhu B. Cluster combinatorics of d -cluster categories. *J Algebra*, 2009, 321: 2898–2915
- 16 Lv H, Zhang S. Tilting mutation for m -replicated algebras. *J Algebra Appl*, 2011, 10: 649–664
- 17 Iyama O, Yoshino Y. Mutation in triangulated categories and rigid Cohen Macaulay modules. *Invent Math*, 2008, 172: 117–168
- 18 Iyama O. Finiteness of representation dimension. *Proc Amer Math Soc*, 2002, 131: 1011–1014
- 19 Rouquier R. Representation dimension of exterior algebras. *Invent Math*, 2006, 165: 357–367
- 20 Dlab D, Ringel C M. The global dimension of the endomorphism ring of a generator-cogenerator for a hereditary artin algebra. *C R Math Acad Sci Soc R Can*, 2008, 30: 89–96
- 21 Lv H, Zhang S. Global dimensions of endomorphism algebras for generator-cogenerators over m -replicated algebras. *Comm Algebra*, 2011, 39: 560–571
- 22 Lv H, Zhang S. Representation dimension of m -replicated algebras. *Sci China Math*, 2010, 53: 1603–1608

Tilting modules over m -replicated algebra $A^{(m)}$

Shunhua Zhang

Abstract Let A be a finite dimensional hereditary algebra over an algebraically closed field k , $A^{(m)}$ and $\mathcal{C}_m(A)$ be the m -replicated algebra and the m -cluster category of A respectively. It is well known that there is a one-to-one correspondence between basic tilting $A^{(m)}$ -modules with projective dimension at most m and basic tilting objects in m -cluster category $\mathcal{C}_m(A)$. This motivates the further investigation on the tilting modules over m -replicated algebras. In this paper, we review some results of our research on the complements of partial tilting $A^{(m)}$ -modules, the tilting quivers of $A^{(m)}$, the endomorphism algebras of tilting $A^{(m)}$ -modules and the values of global dimensions of the endomorphism algebras of generator-cogenerators over $A^{(m)}$.

Keywords m -replicated algebra, tilting module, tilting quiver, generator-cogenerator, m -cluster category

MSC(2010) 16G10, 16G70

doi: 10.1360/N012017-00259