基于 Benson-Carlson 商环的双 Frobenius 代数的构造

王志华^{1,2*}, 李立斌³, Yinhuo Zhang⁴

1. 泰州学院数理学院, 泰州 225300;

2. 南京大学数学系, 南京 210093;

3. 扬州大学数学科学学院, 扬州 225002;

4. Department of Mathematics and Statistics, University of Hasselt, Diepenbeek 3590, Belgium

E-mail: mailzhwhua@126.com, lbli@yzu.edu.cn, yinhuo.zhang@uhasselt.be

收稿日期: 2017-04-12; 接受日期: 2017-07-12; 网络出版日期: 2017-09-15; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11471282) 和中国博士后基金 (批准号: 2017M610316) 资助项目

摘要 设 H 为有限维球面 (spherical) Hopf 代数, $r(H)$ 为 H 的 Green 环, $\mathcal{P}$ 为量子维数为 0 的 H -模的同构类生成的 $r(H)$ 的理想. 本文利用可除 (negligible) 态射空间的维数在 $r(H)$ 上定义了一个双线性型. 该双线性型为结合、对称双线性型并且双线性型的根为 $r(H)$ 中某中心元的零化理想. 然后讨论了 Green 环 $r(H)$ 的一类商环, 即所谓的 Benson-Carlson 商环 $r(H)/\mathcal{P}$. 该商环可以视为 H -模范畴的一类商范畴的 Green 环. 进一步, 如果 H 作为代数还是有限表示型的, 那么 Benson-Carlson 商环 $r(H)/\mathcal{P}$ 具有类群代数和双 Frobenius 代数结构.

关键词 Green 环 球面 Hopf 代数 类群代数 双 Frobenius 代数

MSC (2010) 主题分类 16G10, 16T05, 18D10

1 引言

双 Frobenius 代数概念是 Doi 和 Takeuchi 于 2000 年在文献 [1] 中提出的. 该代数既是 Frobenius 代数又是 Frobenius 余代数, 并且存在对极满足一些相容条件. 双 Frobenius 代数是有限维 Hopf 代数的自然推广, 因而具备有限维 Hopf 代数所具备的一些性质 (参见文献 [1–4]). 构造非平凡的双 Frobenius 代数 (即本身不是 Hopf 代数的双 Frobenius 代数) 是有意义的工作. 目前可以用多种方法来构造非平凡的双 Frobenius 代数, 例如, 文献 [5] 中的 Hadamard 矩阵方法, 文献 [6, 7] 中的箭图方法等. Wang 等 [8, 9] 发现秩为 1 的有限维点 (pointed) Hopf 代数的稳定范畴的 Green 环具有双 Frobenius 代数结构, 这从 Green 环角度实现了双 Frobenius 代数的构造.

英文引用格式: Wang Z H, Li L B, Zhang Y H. Construction of bi-Frobenius algebras via the Benson-Carlson quotient rings (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 471–482, doi: 10.1360/SCM-2017-0211

本文参照文献 [8,9] 的研究思路, 从球面 Hopf 代数的 Green 环出发, 研究该 Green 环的 Benson-Carlson 商环, 从 Benson-Carlson 商环角度实现双 Frobenius 代数的构造. 简言之, 设 H 为有限维球面 Hopf 代数, 则 H 的有限维表示范畴 $H\text{-mod}$ 为球面范畴 (参见文献 [10–12]). 该范畴的 Green 环 $r(H)$ 模去范畴 $H\text{-mod}$ 中所有量子维数为 0 的对象所得的商环, 称为 Green 环 $r(H)$ 的 Benson-Carlson 商环 (该称呼源于文献 [13], 是因为 Benson 和 Carlson^[14] 率先研究了这类商环). Green 环 $r(H)$ 的 Benson-Carlson 商环具备一些特殊性质: 该商环可以视为球面范畴 $H\text{-mod}$ 模去所有 negligible 态射所得商范畴的 Green 环. 特别地, 如果 H 作为代数还是有限表示型的, 该商环具有类群代数和双 Frobenius 代数结构. 这从 Benson-Carlson 商环角度实现了非平凡双 Frobenius 代数的构造.

本文结构如下: 第 2 节主要回顾了任意有限维 Hopf 代数 A 的 Green 环 $r(A)$ 的一些性质 (参见文献 [15]). 特别地, 利用态射空间的维数在 Green 环 $r(A)$ 上定义了一个结合、非退化的双线性型 $([X], [Y]) = \dim \text{Hom}_A(X, Y^*)$. 因此, 当 Hopf 代数 A 是有限表示型代数时, Green 环 $r(A)$ 成为整数环 $\mathbb{Z}$ 上的 Frobenius 代数, 其对偶基与 $A\text{-mod}$ 范畴中的几乎可裂序列有关.

第 3 节主要考虑有限维球面 Hopf 代数 H 的 Green 环 $r(H)$. 首先, 在 Green 环 $r(H)$ 上定义新的双线性型 $([X], [Y]) = \dim \mathcal{J}(X, Y^*)$, 其中 $\mathcal{J}(X, Y^*)$ 表示 H -模 X 到 Y^* 的所有 negligible 态射的全体. 证明了该双线性型是结合、对称的. 然后, 揭示了双线性型 $(-, -)$ 与 $\langle -, - \rangle$ 之间的关系. 利用双线性型 $(-, -)$ 的非退化性证明了双线性型 $\langle -, - \rangle$ 的根就是 $r(H)$ 的某中心元的零化理想.

第 4 节讨论了 Green 环 $r(H)$ 的一类商环, 即所谓的 Benson-Carlson 商环 $r(H)/\mathcal{P}$, 其中 $\mathcal{P}$ 为范畴 $H\text{-mod}$ 中所有量子维数为 0 的对象的同构类生成的 $r(H)$ 的理想. 该 Benson-Carlson 商环可以视为球面范畴 $H\text{-mod}$ 模去所有 negligible 态射所得商范畴 $H\text{-mod}$ 的 Green 环. 利用 Frobenius 代数的积分空间理论, 给出了商范畴 $H\text{-mod}$ 为球面融合 (spherical fusion) 范畴的充分必要条件.

第 5 节当 H 作为代数是有限表示型时, 证明了 Benson-Carlson 商环具有类群代数与双 Frobenius 代数结构. 这从 Benson-Carlson 商环角度实现了双 Frobenius 代数的构造.

文中 $\mathbb{K}$ 为代数闭域. 如无特别说明, 文中涉及的 Hopf 代数及其模首先都是域 $\mathbb{K}$ 上的有限维线性空间. 域 $\mathbb{K}$ 上的张量积符号 $\otimes_{\mathbb{K}}$ 和线性空间的维数符号 $\dim_{\mathbb{K}}$ 分别简记为 $\otimes$ 和 $\dim$. 对于模 X 和 Y , 符号 $X \mid Y$ ($X \nmid Y$) 表示 X 是 (不是) Y 的直和项. 有关 Hopf 代数基本理论, 参见文献 [16,17].

2 预备知识

本节主要回顾 Hopf 代数 Green 环的有关结论. 设 A 为域 $\mathbb{K}$ 上有限维 Hopf 代数, $A\text{-mod}$ 为有限维左 A -模范畴, $F(A)$ 为 $A\text{-mod}$ 中对象 X 的同构类 $[X]$ 生成的自由 Abel 群. 注意到范畴 $A\text{-mod}$ 为幺半 (monoidal) 范畴, $F(A)$ 在乘法运算 $[X][Y] = [X \otimes Y]$ 下成为有单位元 $1 := [\mathbb{K}]$ 的结合环, 这里 $\mathbb{K}$ 为平凡 A -模. Hopf 代数 A 的 Green 环或表示环 $r(A)$ 定义为 $F(A)$ 模去所有关系式 $[X \oplus Y] = [X] + [Y]$ 得到的商环. 为方便起见, $F(A)$ 中的元 $[X]$ 在商环 $r(A)$ 中的像仍记为 $[X]$. 根据 Krull-Schmidt 定理可知, Green 环 $r(A)$ 有一组 $\mathbb{Z}$ -基 $\text{ind}(A) = \{[X] \mid X \text{ 为 } A\text{-mod 中不可分解对象}\}$ (参见文献 [18–21]).

对于 $A\text{-mod}$ 中任意不可分解对象 Z , 如果 Z 不是投射模, 那么在同构意义下存在唯一的以 Z 为末端的几乎可裂序列 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$, 此时记 $\delta_{[Z]} = [X] - [Y] + [Z] \in r(A)$; 如果 Z 是投射模, 记 $\delta_{[Z]} = [Z] - [\text{rad}Z] \in r(A)$, 其中 $\text{rad}Z$ 为 Z 的根, 则集合 $\{\delta_{[Z]} \mid [Z] \in \text{ind}(A)\}$ 线性无关. 进一步, 如果 A 还是有限表示型代数, 那么该集合构成 $r(A)$ 的一组 $\mathbb{Z}$ -基 (参见文献 [22, 第 6 章第 4 节]).

范畴 $A\text{-mod}$ 上的对偶函子 $(-)^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(-, \mathbb{K})$ 自然诱导出 Green 环 $r(A)$ 上的对偶算子 $*$:

$[X]^* = [X^*]$. 该算子为 $r(A)$ 上的反自同构. 进一步, 如果 Hopf 代数 A 的对极平方 S^2 为 A 的内自同构, 那么对偶算子 $*$ 为 $r(A)$ 上的对合 (参见文献 [23]).

对于 $A\text{-mod}$ 中任意对象 X 和 Y , 定义 $([X], [Y]) := \dim \text{Hom}_A(X, Y^*)$, 则 $(-, -)$ 线性扩张为 $r(A)$ 上的 $\mathbb{Z}$ -双线性型. 该双线性型不仅是结合的: $(xy, z) = (x, yz)$, $\forall x, y, z \in r(A)$; 而且还是非退化的: 给定非零 $x \in r(A)$, 总存在 $y, z \in r(A)$ 使得 $(x, y) \neq 0$, $(z, x) \neq 0$. 如果对极的平方 S^2 为 A 的内自同构, 那么该双线性型还是对称的: $(x, y) = (y, x)$, $\forall x, y \in r(A)$. 对于 $A\text{-mod}$ 中任意不可分解对象 X 和 Y , $\delta_{[X]}$ 在对偶算子 $*$ 下的像记为 $\delta_{[X]}^*$. 由文献 [22, 第 6 章命题 4.1] 知,

$$(\delta_{[X]}^*, [Y]) = \begin{cases} 1, & X \cong Y, \\ 0, & X \not\cong Y. \end{cases}$$

由此可得

$$x = \sum_{[X] \in \text{ind}(A)} (\delta_{[X]}^*, x) [X], \quad \forall x \in r(A). \quad (2.1)$$

进一步, 如果 A 还是有限表示型代数, 那么等式 (2.1) 等价于

$$x = \sum_{[X] \in \text{ind}(A)} (x, [X]) \delta_{[X]}^*, \quad \forall x \in r(A). \quad (2.2)$$

此时, Green 环 $r(A)$ 成为整数环 $\mathbb{Z}$ 上的 Frobenius 代数. 集合 $\{\delta_{[X]}^*, [X] \mid [X] \in \text{ind}(A)\}$ 构成与双线性型 $(-, -)$ 对应的 $r(A)$ 上的一组对偶基.

下面的定理源自文献 [15, 定理 5.2.2], 该定理揭示了 $[X]$ 、 $\delta_{[\mathbb{K}]}$ 和 $\delta_{[X]}$ 三者之间的关系.

定理 2.1 设 X 为 $A\text{-mod}$ 中任意不可分解对象.

- (1) $\mathbb{K} \nmid X^* \otimes X$ 当且仅当 $[X] \delta_{[\mathbb{K}]} = 0$;
- (2) $\mathbb{K} \nmid X \otimes X^*$ 当且仅当 $\delta_{[\mathbb{K}]} [X] = 0$;
- (3) $\mathbb{K} \mid X^* \otimes X$ 当且仅当 $[X] \delta_{[\mathbb{K}]} = \delta_{[X]}$;
- (4) $\mathbb{K} \mid X \otimes X^*$ 当且仅当 $\delta_{[\mathbb{K}]} [X] = \delta_{[X]}$.

定理 2.1 可以用来构造 Green 环 $r(A)$ 的一些单边理想. 设 $\mathcal{J}_+$ 和 $\mathcal{J}_-$ 分别为 $r(A)$ 的如下子群:

$$\mathcal{J}_+ := \mathbb{Z}\{\delta_{[X]} \mid [X] \in \text{ind}(A) \text{ 且 } \mathbb{K} \mid X \otimes X^*\}, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{J}_- := \mathbb{Z}\{\delta_{[X]} \mid [X] \in \text{ind}(A) \text{ 且 } \mathbb{K} \mid X^* \otimes X\}. \quad (2.4)$$

由定理 2.1 可知, $\mathcal{J}_+$ 为 $\delta_{[\mathbb{K}]}$ 生成的 $r(A)$ 的右理想, $\mathcal{J}_-$ 为 $\delta_{[\mathbb{K}]}$ 生成的 $r(A)$ 的左理想, 并且由文献 [15, 命题 5.2.4] 可得 $\mathcal{J}_+^* = \mathcal{J}_-$, $\mathcal{J}_-^* = \mathcal{J}_+$.

设 $\mathcal{P}_+$ 和 $\mathcal{P}_-$ 分别为 $r(A)$ 的如下子群:

$$\mathcal{P}_+ := \mathbb{Z}\{[X] \in \text{ind}(A) \mid \mathbb{K} \nmid X \otimes X^*\}, \quad (2.5)$$

$$\mathcal{P}_- := \mathbb{Z}\{[X] \in \text{ind}(A) \mid \mathbb{K} \nmid X^* \otimes X\}. \quad (2.6)$$

由文献 [15, 推论 5.1.9] 可推出 $\mathcal{P}_+$ 为 $r(A)$ 的右理想, $\mathcal{P}_-$ 为 $r(A)$ 的左理想.

3 双线性型

本节主要考虑有限维球面 Hopf 代数上的 Green 环. 该 Green 环可以赋予一个新的结合、对称双线性型 $\langle -, - \rangle$. 通过揭示双线性型 $\langle -, - \rangle$ 与 $(-, -)$ 之间的关系, 证明双线性型 $\langle -, - \rangle$ 的根为 Green 环的中心元 $1 - \delta_{[\mathbb{K}]}$ 的零化理想.

设 H 为域 $\mathbb{K}$ 上有限维非半单球面 Hopf 代数. 换言之, H 为域 $\mathbb{K}$ 上有限维非半单 Hopf 代数, 存在类群元 $\omega \in H$ 使得如下两个条件成立 (参见文献 [10, 第 2.1 小节]):

$$S^2(h) = \omega h \omega^{-1}, \quad \forall h \in H, \quad (3.1)$$

$$\mathrm{tr}_X(\vartheta \omega) = \mathrm{tr}_X(\vartheta \omega^{-1}), \quad \forall X \in H\text{-mod}, \quad \forall \vartheta \in \mathrm{End}_H(X). \quad (3.2)$$

Spherical Hopf 代数 H 的有限维左 H -模范畴 $H\text{-mod}$ 为球面范畴 (参见文献 [10–12]). 由 (3.1) 可知, 对于任意 $X \in H\text{-mod}$, 都有 $X \cong X^{**}$, 其同构定义为 $\theta_X : X \rightarrow X^{**}$, $\theta_X(x)(f) = f(\omega x)$, 其中 $x \in X$, $f \in X^*$. 同构 θ_X 称为球面范畴 $H\text{-mod}$ 的中枢 (pivotal) 结构. 在 (3.2) 中取 $\vartheta = \mathrm{id}_X$, 得到 X 的量子维数如下:

$$\mathbf{d}(X) := \mathrm{tr}_X(\omega) = \mathrm{tr}_X(\omega^{-1}).$$

注意到 $\mathbf{d}(X \otimes Y) = \mathbf{d}(X)\mathbf{d}(Y)$, $\mathbf{d}(X) = \mathbf{d}(X^*)$. 因此从 Hopf 代数 H 的 Green 环 $r(H)$ 到域 $\mathbb{K}$ 的线性映射 $\mathbf{d} : r(H) \rightarrow \mathbb{K}$, $\mathbf{d}([X]) = \mathbf{d}(X)$ 为环同态, 该同态保持对偶算子 $*$ 不变: $\mathbf{d}([X]^*) = \mathbf{d}([X])$.

命题 3.1 对于 $H\text{-mod}$ 中任意不可分解对象 X , 下列论述等价:

- (1) $\mathbf{d}(X) \neq 0$;
- (2) $\mathbb{K} \mid X \otimes X^*$;
- (3) $\mathbb{K} \mid X^* \otimes X$;
- (4) $\delta_{[\mathbb{K}]}[X] = \delta_{[X]}$;
- (5) $[X]\delta_{[\mathbb{K}]} = \delta_{[X]}$.

证明 由文献 [24, 定理 2.4] 可知 (1) 与 (2) 等价. 由于 $\mathbf{d}(X^*) = \mathbf{d}(X)$, 因此 (1) 与 (3) 等价. 再由定理 2.1 知 (2) 与 (4) 等价, (3) 与 (5) 等价. $\square$

结合定理 2.1 可得命题 3.1 的逆否命题:

命题 3.2 对于 $H\text{-mod}$ 中任意不可分解对象 X , 下列论述等价:

- (1) $\mathbf{d}(X) = 0$;
- (2) $\mathbb{K} \nmid X \otimes X^*$;
- (3) $\mathbb{K} \nmid X^* \otimes X$;
- (4) $\delta_{[\mathbb{K}]}[X] = 0$;
- (5) $[X]\delta_{[\mathbb{K}]} = 0$.

注 3.3 命题 3.1 结合 (2.3) 和 (2.4) 表明 $\mathcal{J}_+ = \mathcal{J}_-$, 记为 $\mathcal{J}$. 因此, $\mathcal{J}$ 为 $r(H)$ 的中心元 $\delta_{[\mathbb{K}]}$ 生成的双边理想. 命题 3.2 结合 (2.5) 和 (2.6) 表明 $\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_-$, 记为 $\mathcal{P}$. 因此, $\mathcal{P}$ 为 $H\text{-mod}$ 中的量子维数为 0 的对象的同构类生成的 $r(H)$ 的子群且为 $r(H)$ 的双边理想, 这是因为 $H\text{-mod}$ 中任意对象与量子维数为 0 的对象的张量积其量子维数仍为 0.

注意到范畴 $H\text{-mod}$ 为球面范畴, 对于 $H\text{-mod}$ 中任意两个对象 X 和 Y , 存在如下态射空间双线性型:

$$\Theta : \mathrm{Hom}_H(X, Y) \times \mathrm{Hom}_H(Y, X) \rightarrow \mathbb{K}, \quad \Theta(f, g) = \mathrm{tr}_X(\omega g f).$$

借助于双线性型 Θ 可以定义一类特殊的态射: 态射 $f: X \rightarrow Y$ 称为 negligible 态射, 如果对于任意态射 $g: Y \rightarrow X$, 都有 $\Theta(f, g) = 0$. 对象 X 到 Y 的所有 negligible 态射的全体记为 $\mathcal{J}(X, Y)$. 范畴 $H\text{-mod}$ 中所有 negligible 态射的全体构成 $H\text{-mod}$ 的 monoidal 理想, 即任意态射合成或张量积 negligible 态射仍然得到 negligible 态射 (参见文献 [25, 第 118 页]). 范畴 $H\text{-mod}$ 模去该 monoidal 理想得到一个商范畴 $H\text{-}\underline{\text{mod}}$, 该商范畴的对象仍为 $H\text{-mod}$ 中的对象, 只不过商范畴中的态射空间为下面的商空间:

$$\underline{\text{Hom}}_H(X, Y) := \frac{\text{Hom}_H(X, Y)}{\mathcal{J}(X, Y)}.$$

商范畴 $H\text{-}\underline{\text{mod}}$ 为 $\mathbb{K}$ - 线性加法半单球面 monoidal 范畴 (参见文献 [10]), 其 monoidal 结构由 $H\text{-mod}$ 的 monoidal 结构诱导所得.

定义 Green 环 $r(H)$ 上的双线性型 $\langle -, - \rangle$ 为

$$\langle [X], [Y] \rangle := \dim \mathcal{J}(X, Y^*).$$

为了证明该双线性的结合性和对称性, 需要如下引理.

引理 3.4 对于 $H\text{-mod}$ 中任意对象 X, Y 和 Z , 有如下 $\mathbb{K}$ - 线性同构:

- (1) $\mathcal{J}(X \otimes Y, Z) \cong \mathcal{J}(X, Z \otimes Y^*);$
- (2) $\mathcal{J}(X, Y \otimes Z) \cong \mathcal{J}(Y^* \otimes X, Z).$

证明 这里仅给出引理 3.4(1) 的证明, 类似讨论可以证明引理 3.4(2). 考虑如下典范同构 (参见文献 [26, 引理 2.1.6]):

$$\Phi_{X,Y,Z}: \text{Hom}_H(X \otimes Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_H(X, Z \otimes Y^*), \quad \Phi_{X,Y,Z}(\alpha) = (\alpha \otimes \text{id}_{Y^*})(\text{id}_X \otimes \text{coev}_Y),$$

其中 $\text{coev}_Y: \mathbb{K} \rightarrow Y \otimes Y^*$ 为 Y 的余赋值映射, 即 $\text{coev}_Y(1) = \sum_i y_i \otimes y_i^*$, 其中 $\{y_i\}$ 为 Y 的一组基, $\{y_i^*\}$ 为其对偶基.

结论 (1) $\Phi_{X,Y,Z}(\mathcal{J}(X \otimes Y, Z)) \subseteq \mathcal{J}(X, Z \otimes Y^*).$

任取 $f \in \mathcal{J}(X \otimes Y, Z)$, 则对于任意 $g \in \text{Hom}_H(Z \otimes Y^*, X)$, 都有 $(\text{id}_X \otimes \theta_Y^{-1})\Phi_{Z,Y^*,X}(g) \in \text{Hom}_H(Z, X \otimes Y)$, 其中 $\theta_Y: Y \rightarrow Y^{**}$, $\theta_Y(x)(f) = f(\omega x)$ 为球面范畴 $H\text{-mod}$ 的 pivotal 结构. 由此可得 $\text{tr}_Z(f(\text{id}_X \otimes \theta_Y^{-1})\Phi_{Z,Y^*,X}(g)\omega) = 0$. 下面利用该等式证明 $\Phi_{X,Y,Z}(f) \in \mathcal{J}(X, Z \otimes Y^*)$, 即 $\text{tr}_{Z \otimes Y^*}(\Phi_{X,Y,Z}(f)g\omega) = 0$. 对于 $H\text{-mod}$ 中任意对象 M , 设 $\{m_i\}$ 为 M 的一组基, $\{m_i^*\}$ 为其对偶基, 则 $\sum_i \omega m_i \otimes \omega m_i^* = \sum_i m_i \otimes m_i^*$, 或 $\sum_i m_i \otimes \omega m_i^* = \sum_i \omega^{-1} m_i \otimes m_i^*$. 直接验证可知, 对于 Z 的一组基 $\{z_i\}$, 基元 z_i 在态射 $\omega f(\text{id}_X \otimes \theta_Y^{-1})\Phi_{Z,Y^*,X}(g)$ 下的像为 $(\omega f(\text{id}_X \otimes \theta_Y^{-1})\Phi_{Z,Y^*,X}(g))(z_i) = \sum_j f(\omega g(z_i \otimes y_j^*) \otimes y_j)$. 这就推出

$$\begin{aligned} 0 &= \text{tr}_Z(f(\text{id}_X \otimes \theta_Y^{-1})\Phi_{Z,Y^*,X}(g)\omega) \\ &= \text{tr}_Z(\omega f(\text{id}_X \otimes \theta_Y^{-1})\Phi_{Z,Y^*,X}(g)) \\ &= \sum_{i,j} \langle z_i^*, f(\omega g(z_i \otimes y_j^*) \otimes y_j) \rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

注意到对于 $Z \otimes Y^*$ 的一组基 $\{z_i \otimes y_k^*\}$, 基元 $z_i \otimes y_k^*$ 在态射 $\omega \Phi_{X,Y,Z}(f)g$ 下的像为 $(\omega \Phi_{X,Y,Z}(f)g)(z_i \otimes y_k^*) = \sum_j f(\omega g(z_i \otimes y_k^*) \otimes y_j) \otimes y_j^*$. 因此,

$$\text{tr}_{Z \otimes Y^*}(\Phi_{X,Y,Z}(f)g\omega) = \text{tr}_{Z \otimes Y^*}(\omega \Phi_{X,Y,Z}(f)g)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i,k,j} \langle z_i^* \otimes y_k^{**}, f(\omega g(z_i \otimes y_k^*) \otimes y_j) \otimes y_j^* \rangle \\
 &= \sum_{i,j} \langle z_i^*, f(\omega g(z_i \otimes y_j^*) \otimes y_j) \rangle. \\
 &= 0 \quad (\text{由 (3.3) 可得}).
 \end{aligned}$$

结论 (2) $\Phi_{X,Y,Z}(\mathcal{J}(X \otimes Y, Z)) = \mathcal{J}(X, Z \otimes Y^*)$.

对于任意的态射 $\alpha \in \mathcal{J}(X, Z \otimes Y^*) \subseteq \text{Hom}_H(X, Z \otimes Y^*) = \Phi_{X,Y,Z}(\text{Hom}_H(X \otimes Y, Z))$, 存在态射 $f \in \text{Hom}_H(X \otimes Y, Z)$ 使得 $\alpha = \Phi_{X,Y,Z}(f)$. 现在验证 $f \in \mathcal{J}(X \otimes Y, Z)$, 即证明任意的 $g \in \text{Hom}_H(Z, X \otimes Y)$, 都有 $\text{tr}_Z(fg\omega) = 0$. 注意到态射 $\Phi_{Z,Y^*,X}^{-1}((\text{id}_X \otimes \theta_Y)g) \in \text{Hom}_H(Z \otimes Y^*, X)$, 因而 $\text{tr}_{Z \otimes Y^*}(\alpha \Phi_{Z,Y^*,X}^{-1}((\text{id}_X \otimes \theta_Y)g)\omega) = 0$. 记 $g(z_i) = \sum_j x_{ij} \otimes y_j \in X \otimes Y$, 则 $Z \otimes Y^*$ 的基元 $z_i \otimes y_k^*$ 在态射 $\omega \alpha \Phi_{Z,Y^*,X}^{-1}((\text{id}_X \otimes \theta_Y)g)$ 下的像为 $(\omega \alpha \Phi_{Z,Y^*,X}^{-1}((\text{id}_X \otimes \theta_Y)g))(z_i \otimes y_k^*) = \sum_{j,s} \langle y_k^*, \omega y_j \rangle \omega f(x_{ij} \otimes y_s) \otimes \omega y_s^*$. 这就推出

$$\begin{aligned}
 0 &= \text{tr}_{Z \otimes Y^*}(\alpha \Phi_{Z,Y^*,X}^{-1}((\text{id}_X \otimes \theta_Y)g)\omega) = \text{tr}_{Z \otimes Y^*}(\omega \alpha \Phi_{Z,Y^*,X}^{-1}((\text{id}_X \otimes \theta_Y)g)) \\
 &= \sum_{i,k,j,s} \langle y_k^*, \omega y_j \rangle \langle z_i^* \otimes y_k^{**}, \omega f(x_{ij} \otimes y_s) \otimes \omega y_s^* \rangle \\
 &= \sum_{i,k,j,s} \langle y_k^*, \omega y_j \rangle \langle z_i^* \otimes y_k^{**}, \omega f(x_{ij} \otimes \omega^{-1}y_s) \otimes y_s^* \rangle \\
 &= \sum_{i,k,j} \langle y_k^*, \omega y_j \rangle \langle z_i^*, \omega f(x_{ij} \otimes \omega^{-1}y_k) \rangle \\
 &= \sum_{i,k,j} \langle \omega y_k^*, \omega y_j \rangle \langle z_i^*, \omega f(x_{ij} \otimes y_k) \rangle \\
 &= \sum_{i,k,j} \langle y_k^*, y_j \rangle \langle z_i^*, \omega f(x_{ij} \otimes y_k) \rangle \\
 &= \sum_{i,j} \langle z_i^*, \omega f(x_{ij} \otimes y_j) \rangle. \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

现在 Z 的基元 z_i 在态射 $\omega f g$ 下的像为 $(\omega f g)(z_i) = \sum_j \omega f(x_{ij} \otimes y_j)$. 由 (3.4) 知, $\text{tr}_Z(fg\omega) = \text{tr}_Z(\omega f g) = \sum_{i,j} \langle z_i^*, \omega f(x_{ij} \otimes y_j) \rangle = 0$. 证毕. $\square$

定理 3.5 双线性型 $\langle -, - \rangle$ 具有如下性质:

- (1) 双线性型 $\langle -, - \rangle$ 是结合、对称的;
- (2) 双线性型 $\langle -, - \rangle$ 与 $\langle -, - \rangle$ 之间满足关系式 $\langle [X], [Y] \rangle = ([X](1 - \delta_{[\mathbb{K}]})^*, [Y])$.

证明 (1) 双线性型 $\langle -, - \rangle$ 的结合性由引理 3.4 可得, 即

$$\langle [X][Y], [Z] \rangle = \dim \mathcal{J}(X \otimes Y, Z^*) = \dim \mathcal{J}(X, (Y \otimes Z)^*) = \langle [X], [Y][Z] \rangle.$$

由引理 3.4 同样得 $\mathbb{K}$ -线性同构 $\mathcal{J}(X, Y^*) \cong \mathcal{J}(Y^{**}, X^*) \cong \mathcal{J}(Y, X^*)$. 这就推出 $\langle [X], [Y] \rangle = \langle [Y], [X] \rangle$.

(2) 注意到商范畴 $H\text{-}\underline{\text{mod}}$ 为 $\mathbb{K}$ -线性加法半单球面范畴, 而且在同构意义下 $H\text{-}\underline{\text{mod}}$ 中单对象的全体与 $H\text{-mod}$ 中量子维数不为 0 的不可分解对象的全体之间一一对应 (参见文献 [10, 定理 2.7]). 因此, 对于 $H\text{-mod}$ 中任意两个不可分解对象 X 和 Y , 有

$$([X], [Y]) - \langle [X], [Y] \rangle = \dim \underline{\text{Hom}}_H(X, Y^*) = \begin{cases} 1, & X \cong Y^* \text{ 且 } d(X) \neq 0, \\ 0, & \text{其余.} \end{cases}$$

此表明

$$\langle [X], [Y] \rangle = ([X], [Y]) - ([X]\delta_{[\mathbb{K}]}^*, [Y]) = ([X](1 - \delta_{[\mathbb{K}]}^*), [Y]),$$

证毕. $\square$

双线性型 $\langle -, - \rangle$ 的根定义为集合 $\{x \in r(H) \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in r(H)\}$. 由定理 3.5 知, x 属于 $\langle -, - \rangle$ 的根当且仅当 $x(1 - \delta_{[\mathbb{K}]}^*) = 0$, 这是因为双线性型 $\langle -, - \rangle$ 是非退化的. 显然, 如果 $r(H)$ 的中心元 $1 - \delta_{[\mathbb{K}]}^*$ 可逆, 则双线性型 $\langle -, - \rangle$ 是非退化的.

命题 3.6 设 $0 \rightarrow \tau(\mathbb{K}) \rightarrow E \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow 0$ 是以 $\mathbb{K}$ 为末端的几乎可裂序列, 则 $1 - \delta_{[\mathbb{K}]}^*$ 可逆且其逆元为 $1 - \delta_{[\mathbb{K}]}$ 当且仅当 $[E] \in \mathcal{P}$.

证明 用对偶函子 $*$ 作用几乎可裂序列 $0 \rightarrow \tau(\mathbb{K}) \rightarrow E \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow 0$, 得到几乎可裂序列 $0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow E^* \rightarrow \tau(\mathbb{K})^* \rightarrow 0$. 这就推出 $\delta_{[\mathbb{K}]}^* = \delta_{[\tau(\mathbb{K})^*]}$. 注意到 $\tau(\mathbb{K})^*$ 是不可分解模且 $d(\tau(\mathbb{K})^*) \neq 0$ (参见文献 [15, 命题 5.2.4]). 由命题 3.1 知, $\delta_{[\tau(\mathbb{K})^*]} = \delta_{[\mathbb{K}]}[\tau(\mathbb{K})^*]$. 现在 $\delta_{[\mathbb{K}]}^* = \delta_{[\tau(\mathbb{K})^*]} = \delta_{[\mathbb{K}]}[\tau(\mathbb{K})^*]$, 由此可得

$$\begin{aligned} (1 - \delta_{[\mathbb{K}]})(1 - \delta_{[\mathbb{K}]}^*) &= (1 - \delta_{[\mathbb{K}]})([E]^* - [\tau(\mathbb{K})]^*) \\ &= [E]^* - [\tau(\mathbb{K})]^* - \delta_{[\mathbb{K}]}[E]^* + \delta_{[\mathbb{K}]}[\tau(\mathbb{K})]^* \\ &= ([E]^* - [\tau(\mathbb{K})]^* + \delta_{[\mathbb{K}]}^*) - \delta_{[\mathbb{K}]}[E]^* \\ &= 1 - \delta_{[\mathbb{K}]}[E]^*. \end{aligned}$$

由命题 3.1 和 3.2 知, $\delta_{[\mathbb{K}]}[E]^* = 0$ 当且仅当 $[E]^*$ 可表示为 $H\text{-mod}$ 中量子维数为 0 的不可分解对象的不同构类的线性组合, 当且仅当 $[E] \in \mathcal{P}$. $\square$

例 3.7 设 H 为 4 维 Sweedler Hopf 代数, 则 H 为球面 Hopf 代数. 设 $0 \rightarrow \tau(\mathbb{K}) \rightarrow E \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow 0$ 是以平凡模 $\mathbb{K}$ 为末端的几乎可裂序列, 则 E 为投射模 (参见文献 [10, 例 2.5]), 因而 $[E] \in \mathcal{P}$. 由命题 3.6 知, $1 - \delta_{[\mathbb{K}]}^*$ 可逆, 因此, $r(H)$ 上的双线性型 $\langle -, - \rangle$ 是非退化的.

4 Benson-Carlson 商环

本节主要讨论 Benson-Carlson 商环 $r(H)/\mathcal{P}$, 证明商环 $r(H)/\mathcal{P}$ 可以视为商范畴 $H\text{-mod}$ 的 Green 环.

记 $B_0 = \{[X] \in \text{ind}(H) \mid d(X) = 0\}$, $B_1 = \{[X] \in \text{ind}(H) \mid d(X) \neq 0\}$, 则集合 $\text{ind}(H) = B_0 \cup B_1$. 设 $\mathbb{Z}B_1$ 为集合 B_1 生成的 $r(H)$ 的子群.

注意到 $\mathcal{P} = \mathbb{Z}B_0$. 集合 $\text{ind}(H) = B_0 \cup B_1$ 在 B_1 上的投射自然诱导出 Abel 群同构 $\mathbb{Z}B_1 \cong r(H)/\mathcal{P}$. 下面在 Abel 群 $\mathbb{Z}B_1$ 上定义一个环结构, 使得 Abel 群同构 $\mathbb{Z}B_1 \cong r(H)/\mathcal{P}$ 为环同构.

在 Abel 群 $\mathbb{Z}B_1$ 上定义双线性算子

$$x \cdot y = \sum_{[X] \in B_1} (\delta_{[X]}^*, xy)[X], \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}B_1. \quad (4.1)$$

命题 4.1 在双线性算子 (4.1) 下, $\mathbb{Z}B_1$ 具有如下性质:

- (1) $\mathbb{Z}B_1$ 成为有单位元 1 的结合环;
- (2) Green 环 $r(H)$ 上的对偶算子 $*$ 限制到 $\mathbb{Z}B_1$ 上为环反自同构;
- (3) 由量子维数定义的映射 $d: \mathbb{Z}B_1 \rightarrow \mathbb{K}$ 为环同态;
- (4) 环 $\mathbb{Z}B_1$ 与商环 $r(H)/\mathcal{P}$ 同构.

证明 (1) 双线性算子 (4.1) 满足结合律, 直接验证如下:

$$\begin{aligned}
 (x \cdot y) \cdot z &= \sum_{[X] \in \mathbf{B}_1} (\delta_{[X]}^*, xy)[X] \cdot z = \sum_{[X] \in \mathbf{B}_1} (\delta_{[X]}^*, xy) \sum_{[Y] \in \mathbf{B}_1} (\delta_{[Y]}^*, [X]z)[Y] \\
 &= \sum_{[Y] \in \mathbf{B}_1} \left(\delta_{[Y]}^*, \sum_{[X] \in \mathbf{B}_1} (\delta_{[X]}^*, xy)[X]z \right) [Y] = \sum_{[Y] \in \mathbf{B}_1} \left(\delta_{[Y]}^*, xyz - \sum_{[X] \in \mathbf{B}_0} (\delta_{[X]}^*, xy)[X]z \right) [Y] \\
 &= \sum_{[Y] \in \mathbf{B}_1} (\delta_{[Y]}^*, xyz)[Y]. \tag{4.2}
 \end{aligned}$$

(4.2) 最后两个等式成立是因为, 一方面, 由 (2.1) 可得 $xy = \sum_{[X] \in \mathbf{B}_0} (\delta_{[X]}^*, xy)[X] + \sum_{[X] \in \mathbf{B}_1} (\delta_{[X]}^*, xy)[X]$; 另一方面, $\mathcal{J}$ 与 $\mathcal{P}$ 之间满足正交关系: $(\mathcal{J}, \mathcal{P}) = 0$. 类似可证

$$x \cdot (y \cdot z) = \sum_{[Y] \in \mathbf{B}_1} (\delta_{[Y]}^*, xyz)[Y].$$

环 $\mathbb{Z}\mathbf{B}_1$ 的单位元为 1, 这是因为 $\mathbb{Z}\mathbf{B}_1$ 中任意元 x 总可表示为 $x = \sum_{[X] \in \mathbf{B}_1} (\delta_{[X]}^*, x)[X]$.

(2) 注意到 $(\delta_{[\mathbb{K}]}^*, x)$ 为 x 在基 $\mathbf{B}_1$ 下的线性组合中 $[\mathbb{K}]$ 前面的系数. 因此 $(\delta_{[\mathbb{K}]}^*, x) = (\delta_{[\mathbb{K}]}^*, x^*)$. 这就推出

$$\begin{aligned}
 (x \cdot y)^* &= \sum_{[X] \in \mathbf{B}_1} (\delta_{[X]}^*, xy)[X]^* = \sum_{[X] \in \mathbf{B}_1} (\delta_{[\mathbb{K}]}^*, [X]^* xy)[X]^* \\
 &= \sum_{[X] \in \mathbf{B}_1} (\delta_{[\mathbb{K}]}^*, [X]xy)[X] = \sum_{[X] \in \mathbf{B}_1} (\delta_{[\mathbb{K}]}^*, y^* x^* [X]^*) [X] \\
 &= \sum_{[X] \in \mathbf{B}_1} (\delta_{[X]}^*, y^* x^*) [X] \\
 &= y^* \cdot x^*.
 \end{aligned}$$

(3) 注意到 $d([X]) = 0, \forall [X] \in \mathbf{B}_0$. 故对任意 $x, y \in \mathbb{Z}\mathbf{B}_1$, 有

$$\begin{aligned}
 d(x \cdot y) &= \sum_{[X] \in \mathbf{B}_1} (\delta_{[X]}^*, xy)d([X]) \\
 &= \sum_{[X] \in \mathbf{B}_1} (\delta_{[X]}^*, xy)d([X]) + \sum_{[X] \in \mathbf{B}_0} (\delta_{[X]}^*, xy)d([X]) \\
 &= d\left(\sum_{[X] \in \mathbf{B}_1} (\delta_{[X]}^*, xy)[X] + \sum_{[X] \in \mathbf{B}_0} (\delta_{[X]}^*, xy)[X]\right) \\
 &= d(xy) = d(x)d(y).
 \end{aligned}$$

(4) 显然典范映射 $\varphi: \mathbb{Z}\mathbf{B}_1 \rightarrow r(H)/\mathcal{P}$, $\varphi(x) = \bar{x}$ 为 $\mathbb{Z}$ -线性双射, 该映射还保持环结构. 事实上, 对于任意 $x, y \in \mathbb{Z}\mathbf{B}_1$, 有

$$\begin{aligned}
 \varphi(x \cdot y) &= \sum_{[X] \in \mathbf{B}_1} (\delta_{[X]}^*, xy)\overline{[X]} \\
 &= \sum_{[X] \in \mathbf{B}_1} (\delta_{[X]}^*, xy)\overline{[X]} + \sum_{[X] \in \mathbf{B}_0} (\delta_{[X]}^*, xy)\overline{[X]} \\
 &= \bar{xy} = \varphi(x)\varphi(y).
 \end{aligned}$$

证毕. □

注 4.2 重复 (4.1) 可得 $x_1 \cdot x_2 \cdots x_m = \sum_{[X] \in \mathbf{B}_1} (\delta_{[X]}^*, x_1 x_2 \cdots x_m)[X]$.

下面从范畴化角度给出 $\mathbb{Z}\mathbf{B}_1$ 的一个解释: $\mathbb{Z}\mathbf{B}_1$ 为商范畴 $H\text{-}\underline{\text{mod}}$ 的 Green 环.

定理 4.3 记商范畴 $H\text{-}\underline{\text{mod}}$ 的 Green 环为 $r(\underline{H})$, 则 $r(\underline{H}) \cong \mathbb{Z}\mathbf{B}_1$.

证明 注意到典范函子 $F: H\text{-}\text{mod} \rightarrow H\text{-}\underline{\text{mod}}$, $F(X) = X$, $F(\alpha) = \bar{\alpha}$ 为满稠密张量函子. 该函子诱导出 Green 环之间的环满同态 $f: r(H) \rightarrow r(\underline{H})$ 使得 $f(\mathcal{P}) = 0$. 因此存在唯一的环满同态 $\bar{f}: r(H)/\mathcal{P} \rightarrow r(\underline{H})$ 使得 $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$, $\forall x \in r(H)$, $\bar{x} \in r(H)/\mathcal{P}$. 注意到作为自由 Abel 群, $r(\underline{H})$ 与 $r(H)/\mathcal{P}$ 具有相同的秩, 这是因为 $H\text{-}\underline{\text{mod}}$ 中单对象的全体与 $H\text{-}\text{mod}$ 中量子维数不为 0 的不可分解对象的全体之间一一对应 (参见文献 [10, 定理 2.7]). 因而有环同构 $r(\underline{H}) \cong r(H)/\mathcal{P} \cong \mathbb{Z}\mathbf{B}_1$. $\square$

注 4.4 记 $\Delta = \{\delta_{[X]}^* \mid [X] \in \mathbf{B}_0\}$, $\mathbb{Z}\Delta$ 为集合 Δ 生成的 $r(H)$ 的子群. 当 H 作为代数是有限表示型时, 同样可以在 Abel 群 $\mathbb{Z}\Delta$ 上定义乘法运算

$$x \star y = \sum_{[X] \in \mathbf{B}_0} (xy, [X]) \delta_{[X]}^*, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}\Delta \quad (4.3)$$

使得 $\mathbb{Z}\Delta$ 成为有单位元 $\sum_{[X] \in \mathbf{B}_0} (1, [X]) \delta_{[X]}^*$ 的结合环. 此时 Abel 群同构 $\mathbb{Z}\Delta \cong r(H)/\mathcal{J}$ 为环同构. 重复利用 (4.3) 可得

$$x_1 \star x_2 \star \cdots \star x_m = \sum_{[X] \in \mathbf{B}_0} (x_1 x_2 \cdots x_m, [X]) \delta_{[X]}^*.$$

一般而言, 半单球面范畴 $H\text{-}\underline{\text{mod}}$ 中的单对象的个数未必是有限的. 换言之, 半单球面范畴 $H\text{-}\underline{\text{mod}}$ 未必是球面融合范畴. 下面借助于 Frobenius 代数的积分空间理论给出 $H\text{-}\underline{\text{mod}}$ 为球面融合范畴的充分必要条件.

引理 4.5 定义 $\mathbb{Z}$ -线性映射 $T: \mathbb{Z}\mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbb{Z}$, $T(x) = (\delta_{[\mathbb{K}]}^*, x)$, 则 $\forall x, y \in \mathbb{Z}\mathbf{B}_1$, 映射 T 具有如下性质:

- (1) $T(x) = T(x^*)$;
- (2) $T(xy) = T(yx)$ 且 $T(x \cdot y) = T(xy)$;
- (3) 定义 $[x, y] = T(xy)$, 则 $[-, -]$ 为 $\mathbb{Z}\mathbf{B}_1$ 上结合、对称、非退化以及 $*$ -不变的双线性型.

证明 (1) 这是因为 $(\delta_{[\mathbb{K}]}^*, x) = (\delta_{[\mathbb{K}]}^*, x^*)$, $\forall x \in \mathbb{Z}\mathbf{B}_1$.

(2) 首先, $T(xy) = T(yx)$, 这是因为双线性型 $(-, -)$ 是对称的且 $\delta_{[\mathbb{K}]}^*$ 为 $r(H)$ 的中心元. 其次, $T(x \cdot y) = T(xy)$, 这是因为 $xy - x \cdot y = \sum_{[X] \in \mathbf{B}_0} (\delta_{[X]}^*, xy)[X]$, 而 $T([X]) = 0$, $\forall [X] \in \mathbf{B}_0$.

(3) 双线性型 $[-, -]$ 的结合性是显然的, 对称性是因为 $T(xy) = T(yx)$, 非退化性是因为 $T([X][Y]^*) = 1$ 当且仅当 $[X] = [Y]$, $\forall [X], [Y] \in \mathbf{B}_1$. 进一步, 双线性型还是 $*$ -不变的: $[x^*, y^*] = T(x^* y^*) = T(yx) = T(xy) = [x, y]$.

记 $\mathbb{K}\mathbf{B}_1 := \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\mathbf{B}_1$, 则映射 $d: \mathbb{Z}\mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbb{K}$ 自然可以线性扩张为 $\mathbb{K}\mathbf{B}_1$ 到 $\mathbb{K}$ 的代数同态. $\mathbb{K}\mathbf{B}_1$ 上的与 d 相关的左积分空间定义为集合

$$\int_{\mathbb{K}\mathbf{B}_1}^l := \{t \in \mathbb{K}\mathbf{B}_1 \mid x \cdot t = d(x)t, \forall x \in \mathbb{K}\mathbf{B}_1\}.$$

类似地, $\mathbb{K}\mathbf{B}_1$ 上的与 d 相关的右积分空间定义为集合

$$\int_{\mathbb{K}\mathbf{B}_1}^r := \{t \in \mathbb{K}\mathbf{B}_1 \mid t \cdot x = d(x)t, \forall x \in \mathbb{K}\mathbf{B}_1\}.$$

如果 $\mathbb{K}\mathbf{B}_1$ 上的左右积分空间相同, 那么 $\mathbb{K}\mathbf{B}_1$ 称为幺模的 (unimodular), 参见文献 [27]. $\square$

命题 4.6 半单球面范畴 $H\text{-mod}$ 为球面融合范畴当且仅当 $\int_{\mathbb{K}B_1}^l$ 或 $\int_{\mathbb{K}B_1}^r$ 不为 0.

证明 显然范畴 $H\text{-mod}$ 为球面融合范畴当且仅当 $\mathbb{K}B_1$ 为有限维 $\mathbb{K}$ -代数. 如果 $\mathbb{K}B_1$ 为有限维 $\mathbb{K}$ -代数, 则 $\mathbb{K}B_1$ 上存在结合、对称、非退化的双线性型 $[-, -]$. 因此 $\mathbb{K}B_1$ 为 Frobenius 代数, 与双线性型 $[-, -]$ 对应的对偶基为 $\{[X], [X]^* \mid [X] \in B_1\}$. 此时非零元 $\sum_{[X] \in B_1} d([X])[X]^*$ 张成的线性空间为 $\mathbb{K}B_1$ 的左右积分空间 (参见文献 [27]). 反之, 如果 $\mathbb{K}B_1$ 上存在与 d 相关的非零左积分空间 (非零右积分空间类似可证), 设 $t = \sum_{[X] \in B_1} \lambda_{[X]}[X]$ 为该积分空间中的非零元. 注意到 $t = \sum_{[X] \in B_1} \lambda_{[X]}[X]$ 为有限和. 要证明 $\mathbb{K}B_1$ 为有限维 $\mathbb{K}$ -代数, 只要证明 B_1 为有限集, 而这只要证明任意 $[X] \in B_1$, 都有 $\lambda_{[X]} \neq 0$. 事实上,

$$\lambda_{[X]} = (\delta_{[X]}^*, t) = (\delta_{[\mathbb{K}]}^*, [X]^* t) = T([X]^* t) = T([X]^* \cdot t) = d([X]^*) \lambda_{[\mathbb{K}]}. \quad (4.4)$$

如果 $\lambda_{[\mathbb{K}]} = 0$, 那么由 (4.4) 知, 对任意 $[X] \in B_1$ 都有 $\lambda_{[X]} = 0$, 从而 $t = 0$, 这与 $t \neq 0$ 矛盾. 因此 $\lambda_{[\mathbb{K}]} \neq 0$, 从而, 由 (4.4) 知, 对任意 $[X] \in B_1$ 都有 $\lambda_{[X]} \neq 0$. 证毕. $\square$

5 类群代数与双 Frobenius 代数的构造

类群代数是 Doi 在文献 [2] 中引入的一类代数, 该代数是有限群代数的自然推广. 类群代数的具体定义如下:

定义 5.1 设 $(A, \varepsilon, \mathbf{b}, *)$ 为四元组, 其中 A 为有单位元 1 的有限维 $\mathbb{K}$ -代数, ε 为 A 到 $\mathbb{K}$ 的代数同态, 集合 $\mathbf{b} = \{b_i \mid i \in I\}$ 为 A 的一组 $\mathbb{K}$ -基使得 $0 \in I$ 且 $b_0 = 1$, $*$ 为指标集 I 上的一个对合 (即 $** = \text{id}$). $(A, \varepsilon, \mathbf{b}, *)$ 称为类群代数, 如果以下条件成立:

(G1) $\varepsilon(b_i) = \varepsilon(b_{i^*}) \neq 0, \forall i \in I$;

(G2) $p_{ij}^k = p_{j^*i^*}^{k^*}, \forall i, j, k \in I$, 其中 p_{ij}^k 为 A 在基 $\mathbf{b}$ 下的结构常数: $b_i b_j = \sum_{k \in I} p_{ij}^k b_k$;

(G3) $p_{ij}^0 = \delta_{i,j^*} \varepsilon(b_i), \forall i, j \in I$, 其中 δ_{i,j^*} 为 Kronecker 符号.

注 5.2 双 Frobenius 代数 A 既是 Frobenius 代数又是 Frobenius 余代数, 并且存在 $\phi \in A^*, t \in A$ 以及对极 S 满足一些相容条件 (参见文献 [1]). 若 $(A, \varepsilon, \mathbf{b}, *)$ 为类群代数, 则 A 具有余代数结构, 余乘为 $\Delta(b_i) = \frac{1}{\varepsilon(b_i)} b_i \otimes b_i$, 余单位为 ε . 取 $\phi \in A^*$ 使得 $\phi(b_i) = \delta_{0,i}, t = \sum_{i \in I} b_i$. 定义 A 到 A 的 $\mathbb{K}$ -线性映射 S 为 $S(b_i) = b_{i^*}, \forall i \in I$, 则 (A, ϕ, t, S) 为双 Frobenius 代数, 其对偶基为 $\{b_i, \frac{b_{i^*}}{\varepsilon(b_i)} \mid i \in I\}$ (参见文献 [2, 注 3.2]). 通过类群代数所定义的双 Frobenius 代数成为 Hopf 代数当且仅当该类群代数为群代数 (参见文献 [5, 推论 2]).

下面假设 H 为域 $\mathbb{K}$ 上有限维球面 Hopf 代数并且作为代数是有限表示型的. 此时 $\mathbb{K}B_1$ 为有限维对称代数, $[-, -]$ 为 $\mathbb{K}B_1$ 上的结合、对称、非退化、 $*$ -不变的双线性型, 对应的对偶基为 $\{[X], [X]^* \mid [X] \in B_1\}$. 进一步, $\mathbb{K}B_1$ 是 unimodular, 即 $\int_{\mathbb{K}B_1}^l = \int_{\mathbb{K}B_1}^r$ 且为 $t = \sum_{[X] \in B_1} d([X])[X]^*$ 张成的线性空间. 设 $\mathbf{b} = \{x := d([X])[X] \mid [X] \in B_1\}$, 则 $\mathbf{b}$ 为 $\mathbb{K}B_1$ 的一组基.

命题 5.3 四元组 $(\mathbb{K}B_1, d, \mathbf{b}, *)$ 为类群代数.

证明 逐一验证定义 5.1 中的条件 (G1)–(G3). 条件 (G1) 显然满足. 考虑条件 (G2), 假设

$$x \cdot y = \sum_{z \in \mathbf{b}} p_{xy}^z z, \quad (5.1)$$

其中 $p_{xy}^z \in \mathbb{K}$. 一方面, 等式 (5.1) 两边施加对偶算子 $*$, 得到 $y^* \cdot x^* = \sum_{z \in \mathbf{b}} p_{xy}^z z^*$; 另一方面,

$$y^* \cdot x^* = \sum_{z \in \mathbf{b}} p_{y^* x^*}^z z.$$

比较系数可知 $p_{xy}^z = p_{y^*x^*}^z, \forall x, y, z \in \mathbf{b}$. 对于条件 (G3), 将映射 $T: \mathbb{K}\mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbb{K}$ 线性扩张为 $T: \mathbb{K}\mathbf{B} \rightarrow \mathbb{K}$. 对于任意 $x, y \in \mathbf{b}$, 有

$$\begin{aligned} p_{xy}^1 &= T(x \cdot y) = \mathbf{d}([X])\mathbf{d}([Y])T([X] \cdot [Y]) \\ &= \mathbf{d}([X])\mathbf{d}([Y])T([X][Y]) \\ &= \mathbf{d}([X])\mathbf{d}([Y])(\delta_{[\mathbb{K}]}^*, [X][Y]) \\ &= \mathbf{d}([X])\mathbf{d}([Y])(\delta_{[X^*]}^*, [Y]) \\ &= \mathbf{d}([X])\mathbf{d}([Y])\delta_{[X^*], [Y]} \\ &= \delta_{[X^*], [Y]}\mathbf{d}(x). \end{aligned}$$

因此条件 (G3) 成立. □

由注 5.2 可知, 类群代数 $(\mathbb{K}\mathbf{B}_1, \mathbf{d}, \mathbf{b}, *)$ 自然具备双 Frobenius 代数结构, 具体论述如下.

首先, $(\mathbb{K}\mathbf{B}_1, \phi)$ 为 Frobenius 代数, 其 Frobenius 同态 ϕ 定义为 $\phi(x) = \delta_{x,1}, \forall x \in \mathbf{b}$. 换言之,

$$\phi([X]) = \begin{cases} 1, & [X] = 1, \\ 0, & [X] \neq 1. \end{cases}$$

此时集合 $\{x, \frac{x^*}{\mathbf{d}(x)} \mid x \in \mathbf{b}\}$ 或者 $\{[X], [X]^* \mid [X] \in \mathbf{B}_1\}$ 构成 $(\mathbb{K}\mathbf{B}_1, \phi)$ 的一组对偶基. 需要说明的是, 这里的 Frobenius 同态 ϕ 即为映射 T .

其次, $\mathbb{K}\mathbf{B}_1$ 为余代数, 余单位为 $\mathbf{d}$, 余乘 Δ 定义为 $\Delta(x) = \frac{1}{\mathbf{d}(x)}x \otimes x, \forall x \in \mathbf{b}$. 换言之,

$$\Delta([X]) = \frac{1}{\mathbf{d}([X])}[X] \otimes [X], \quad \forall [X] \in \mathbf{B}_1.$$

记 $t = \sum_{[X] \in \mathbf{B}_1} \mathbf{d}([X])[X]$, 则 t 即为 $\mathbb{K}\mathbf{B}_1$ 的与 $\mathbf{d}$ 相关的积分. 此时 $(\mathbb{K}\mathbf{B}_1, t)$ 为 Frobenius 余代数 (定义参见文献 [1]).

最后, 定义线性映射 $S: \mathbb{K}\mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbb{K}\mathbf{B}_1$ 为 $S(x) = x^*$, S 即为对偶算子 $*$. 容易验证映射 S 为 $\mathbb{K}\mathbf{B}_1$ 上的反代数、反余代数同构, 从而为 $\mathbb{K}\mathbf{B}_1$ 的对极. 现在四元组 $(\mathbb{K}\mathbf{B}_1, \phi, t, S)$ 构成一个双 Frobenius 代数. 有关类群代数和双 Frobenius 代数的更多结果, 参见文献 [1–4].

致谢 感谢审稿人对本文提出的宝贵修改意见.

参考文献

- Doi Y, Takeuchi M. BiFrobenius algebras. *Contemp Math*, 2000, 267: 67–98
- Doi Y. Bi-Frobenius algebras and group-like algebras. In: *Hopf Algebras. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, vol. 237. New York: Marcel Dekker, 2004, 143–156
- Doi Y. Group-Like Algebras and Their Representations. *Commun Algebra*, 2010, 38: 2635–2655
- Doi Y. Substructures of bi-Frobenius algebras. *J Algebra*, 2002, 256: 568–582
- Haim M. Group-like algebras and Hadamard matrices. *J Algebra*, 2007, 308: 215–235
- Wang Y H, Chen X W. Construct non-graded bi-Frobenius algebras via quivers. *Sci China Ser A*, 2007, 50: 450–456
- Wang Y H, Zhang P. Construct bi-Frobenius algebras via quivers. *Tsukuba J Math*, 2004, 28: 215–221
- Wang Z H, Li L B, Zhang Y H. Green rings of pointed rank one Hopf algebras of nilpotent type. *Algebr Represent Theory*, 2014, 17: 1901–1924
- Wang Z H, Li L B, Zhang Y H. Green rings of pointed rank one Hopf algebras of non-nilpotent type. *J Algebra*, 2016, 449: 108–137

- 10 Andruskiewitsch N, Angiono I, Iglesias A G, et al. From Hopf algebras to tensor categories. In: Conformal Field Theories and Tensor Categories, vol. 95. Heidelberg: Springer-Verlag, 2014, 1–31
- 11 Barrett J W, Westbury B W. Spherical Categories. *Adv Math*, 1999, 143: 357–375
- 12 Barrett J W, Westbury B W. Invariants of piecewise-linear 3-manifolds. *Trans Amer Math Soc*, 1996, 348: 3997–4022
- 13 Archer L. On certain quotients of the Green rings of dihedral 2-groups. *J Pure Appl Algebra*, 2008, 212: 1888–1897
- 14 Benson D J, Carlson J F. Nilpotent elements in the Green ring. *J Algebra*, 1986, 104: 329–350
- 15 Wang Z H. Green rings of finite dimensional pointed Hopf algebras of rank one. PhD Thesis. Hasselt: University of Hasselt, 2014
- 16 Montgomery S. Hopf Algebras and Their Actions on Rings. Providence: Amer Math Soc, 1993
- 17 Sweedler M E. Hopf Algebras. New York: Benjamin, 1969
- 18 Chen H X, Van Oystaeyen F, Zhang Y H. The Green rings of Taft algebras. *Proc Amer Math Soc*, 2014, 142: 765–775
- 19 Huang H L, Van Oystaeyen F, Yang Y P, et al. The Green rings of pointed tensor categories of finite type. *J Pure Appl Algebra*, 2014, 218: 333–342
- 20 Li Y N, Hu N H. The Green rings of the 2-rank Taft algebra and its two relatives twisted. *J Algebra*, 2014, 410: 1–35
- 21 Li L B, Zhang Y H. The Green rings of the generalized Taft Hopf algebras. *Contemp Math*, 2013, 585: 275–288
- 22 Auslander M, Reiten I, Smalø S. Representation Theory of Artin Algebras. Cambridge: Cambridge University Press, 1994
- 23 Lorenz M. Representations of finite-dimensional Hopf algebras. *J Algebra*, 1997, 188: 476–505
- 24 Yang S. Finite dimensional representations of u -Hopf algebras. *Comm Algebra*, 2001, 29: 5359–5370
- 25 Müger M. Tensor categories: A selective guided tour. *Rev Un Mat Argentina*, 2010, 51: 95–163
- 26 Bakalov B, Kirillov A A. Lectures on Tensor Categories and Modular Functors. Providence: Amer Math Soc, 2001
- 27 Lorenz M. Some applications of Frobenius algebras to Hopf algebras. *Contemp Math*, 2011, 537: 269–289

Construction of bi-Frobenius algebras via the Benson-Carlson quotient rings

Zhihua Wang, Libin Li & Yinhua Zhang

Abstract Let H be a finite dimensional spherical Hopf algebra, $r(H)$ the Green ring of H and $\mathcal{P}$ the ideal of $r(H)$ generated by all H -modules of quantum dimension zero. Using dimensions of negligible morphism spaces, we define a bilinear form on the Green ring $r(H)$. This form is associative, symmetric and its radical is annihilator of a certain central element of $r(H)$. After that we consider the Benson-Carlson quotient ring $r(H)/\mathcal{P}$ of $r(H)$. This quotient ring can be thought of as the Green ring of a factor category of H -module category. Moreover, if H is of finite representation type, the Benson-Carlson quotient ring admits group-like algebra as well as bi-Frobenius algebra structure.

Keywords Green ring, spherical Hopf algebra, group-like algebra, bi-Frobenius algebra

MSC(2010) 16G10, 16T05, 18D10

doi: 10.1360/SCM-2017-0211