论文

低渗非达西渗流运动方程研究

王睿, 周宏伟*, 钟江城, 易海洋, 陈超凡, 赵阳

中国矿业大学(北京)力学与建筑工程学院, 北京 100083

*联系人, E-mail: zhw@cumb.edu.cn

收稿日期: 2016-08-24; 接受日期: 2016-12-20; 网络出版日期: 2017-04-20

国家自然科学基金(编号: 51674266)和国家重点研发计划(编号: 2016YFC0600704)资助

摘要 低速非达西渗流现象广泛存在于高放废物地质处置库及能源开发领域, 描述这种非线性过程具有重要的意义. 本文利用分数阶微积分方法对幂函数型、指数型两种常用的非线性运动方程进行了研究. 首先从达西定律出发, 通过拉普拉斯变换得到了与Hansbo幂函数型方程相一致的渗流运动方程. 进而对Swartzenruber指数型方程进行研究, 得到了分数阶导数意义下的Swartzenruber运动方程及其解析表达式. 验证了在求导阶次为1的情况下, 原Swartzenruber运动方程是分数阶Swartzenruber方程的一种特例. 基于非饱和渗流实验数据, 采用最小二乘法拟合获得了新运动方程中的相关参数, 对参数变化趋势进行了分析. 由曲线拟合结果可知, 分数阶Swartzenruber方程精度较高, 可以更好地描述非线性渗流过程.

关键词 低速渗流, 非达西模型, 分数阶微分

PACS: 47.27.-i, 47.27.Eq, 47.27.Nz, 47.40.Ki, 47.85.Gj

1 引言

在核废物深部地下处置过程中, 高放废物深部地下处置库选用低渗透岩土介质作为工程屏障, 以避免释放的核素随地下水发生迁移^[1]. 为了能够更好地发挥低渗透岩土介质的屏障作用, 保障高放废物处置库在其长期服务年限内有效运行, 开展对低渗透岩土介质渗流规律的研究十分重要.

对于岩土渗流问题, Darcy (1856)通过水在直立均质砂柱中的渗流实验研究发现流速与水力梯度成线性关系, 即

$$q = Ki, \quad (1)$$

其中 q (m/s)是流速, i 是水力梯度, K (m/s)是水力传导率.

然而在低渗透岩土介质中, 渗流规律不再符合达西定律. Deng等人^[2]、Cui等人^[3]研究发现在岩土中的饱和、非饱和渗流运动过程偏离了达西定律. 郝斐等人^[4]、时宇等人^[5]进一步研究了以出现启动水力梯度为主要特征的非线性渗流现象. 为了能够刻画这种非线性渗流现象, 国内外学者进行了大量研究, 提出了多种渗流运动方程, 总体上可分为分段函数与连续函数两种类型, 在函数形式上主要有幂函数、指数函数、多项式等. 黄延章^[6]提出了具有3种选择方案的数学模型; 姚约东等人^[7]提出了分别描述超低速区、

引用格式: 王睿, 周宏伟, 钟江城, 等. 低渗非达西渗流运动方程研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2017, 47: 064702
Wang R, Zhou H W, Zhong J C, et al. The study on non-Darcy seepage equation of low velocity flow (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2017, 47: 064702, doi: 10.1360/SSPMA2016-00366

低速区、达西流区三阶段运动方程; Bear^[8]建立了带有水力梯度的渗流模型, 其数学表达式是带截距的线性方程; Hansbo^[9,10]建立了幂函数形式的双阶段模型; Swartzendruber^[11]提出了指数形式的渗流运动方程. 其中Hansbo的分段幂函数型与Swartzendruber连续指数型方程广泛应用于固结分析问题^[12-14]. 分段函数模型特点是拟合精度较高, 但分段区间难以确定. 连续函数模型的特点是能够描述渗流连续运动的趋势, 但拟合精度有待提高.

分数阶微积分是研究任意阶微分和积分的理论, 是整数阶微积分向任意阶的推广. 与整数阶微分方程相比, 分数阶微分方程能更好地描述非线性物理现象和动态系统过程. 近年来分数阶微积分方法广泛应用于非线性问题的研究, 如Zhou等人^[15,16]基于分数阶微积分理论, 构建了盐岩分数阶流变的本构模型; Chen等人^[17]构建了分数阶反常扩散方程来描述钢筋混凝土结构中氯离子的扩散过程; Tian等人^[18]利用分数阶方法研究了分形孔隙介质条件下的径向渗流问题. 可见, 分数阶微积分方法在研究非线性问题提供了新的思路.

Hansbo幂函数型、Swartzendruber指数型渗流方程是研究非线性饱和渗流问题常用的两种模型^[13,14]. 相较于Hansbo模型, Swartzendruber模型具有连续函数型的数学表达式, 不需要确定分段函数区间, 但对于非饱和渗流问题, 其描述能力有待提高^[19]. 本文首先从达西定律出发, 借助分数阶微积分方法得到了Hansbo幂函数型非线性渗流运动方程, 表明分数阶微积分方法可以应用于渗流问题的研究. 其次, 运用分数阶微积分方法研究了Swartzendruber指数型方程, 利用拉普拉斯变换、特殊函数性质得出了新模型的解析表达式. 验证了连续型指数运动方程是分数阶Swartzendruber方程的一个特例. 最后, 基于非饱和土常体积入渗实验数据, 利用数值方法确定了所建立方程的相关参数, 并对拟合结果进行了趋势分析. 结果显示, 新的分数阶Swartzendruber方程拟合效果优于原指数方程.

2 基于分数阶导数的低速非达西运动方程

2.1 分数阶导数定义

分数阶微积分具有多种定义方式, 常见的有Rie-

mann-Liouville, Caputo和Grunwald-Letnikov 3种微积分算子^[20]. 其中, Caputo定义在处理初值问题方面较为便捷, 因而本文采用Caputo分数阶导数定义:

$${}_0^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \alpha \notin \mathbb{N}, \quad (2a)$$

$${}_0^C D_x^\alpha f(x) = f^{(\alpha)}(x), \alpha \in \mathbb{N}, \quad (2b)$$

其中 $\alpha > 0, n-1 \leq \alpha < n, \alpha \notin \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ 表示正整数集合, $\Gamma(z)$ 表示伽玛函数.

2.2 分数阶Hansbo方程

对于低速非线性渗流问题, Bear^[8]提出了分段函数模型:

$$q = 0, 0 \leq i \leq I, \quad (3a)$$

$$q = K(i-I), I < i, \quad (3b)$$

其中 I 为无量纲参数, 表示启动水力梯度. 该模型认为 $0 \leq i \leq I$ 情况下流速为0, 存在一定的局限性.

Hansbo^[9,10]提出了另一种分段函数形式的模型(图1):

$$q = Ki^n, 0 \leq i \leq i_1, \quad (4a)$$

$$q = Kni_1^{n-1}(i-I), i > i_1, \quad (4b)$$

其中, $i_1 = \frac{In}{n-1}$, n 的取值在1.5左右, 该模型为三参数 K, I, n 模型, 能够描述非线性阶段与线性阶段的渗流情况.

利用分数阶方法可以得到Hansbo模型中的非线性阶段公式. 由达西定律, $q = K'i$, 该公式体现了 q 与 i 呈线性关系. 线性关系意味着两者的微分是常数, 因而该线性关系可以表达为微分形式:

$$\frac{dq}{di} = K', \quad (5)$$

写成分数阶导数形式:

$${}_0^C D_i^\alpha = K', \alpha > 0, \quad (6)$$

假设 $q^{(n)} = 0, n=0, 1, 2, \dots$, 拉普拉斯变换求解得到

$$q = K' \frac{i^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \alpha > 0, \quad (7)$$

对于线性阶段

图1 (网络版彩图) Hansbo运动方程示意图^[9,10]

Figure 1 (Color online) Schematic view of Hansbo equation [9,10].

$$q = \frac{\alpha K' (i_1)^{\alpha-1}}{\Gamma(1+\alpha)} (i - I), \quad (8)$$

$$\text{其中 } i_1 = \frac{I\alpha}{\alpha-1}.$$

当 $K' = KI(1+\alpha)$, $\alpha = n$ 时, 有 $i_1 = \frac{In}{n-1}$, 式(7)为 $q = Ki^\alpha$, 式(8)为 $q = Kn(i_1)^{n-1}(i - I)$. 公式(7)表明, 分数阶 Hansbo 方程 $q-i$ 在非线性阶段成幂函数关系, 与原 Hansbo 方程的非线性部分相类似, 只相差了一个常数. 公式(8)表明, $q-i$ 间呈线性关系. 综合式(7)和(8), 可以看出分数阶 Hansbo 方程与原 Hansbo 方程完全一致. 以上我们通过分数阶微积分方法得到了 Hansbo 渗流公式.

2.3 分数阶 Swartzenruber 方程

Hansbo 模型的数学表达式是分段函数, 在工程应用上需要确定线性区间与非线性区间, 因而存在一定的局限性. Swartzenruber^[11] 提出了指数模型(图2), 其数学表达式是连续函数:

$$\frac{dq}{di} = K(1 - e^{-i/I}), \quad (9)$$

对式(9)两边积分, 且 $q(0) = 0$, 求解得

$$q = K \left[i - I \left(1 - e^{-i/I} \right) \right], \quad (10)$$

该模型共有2个参数 K, I .

从 Swartzenruber 模型出发, 利用分数阶微积分方法可以得到三参数的新模型. 推导过程如下:

将式(9)代入式(10), 得到

$$q = Ki - I \frac{dq}{di}, \quad (11)$$

图2 (网络版彩图) Swartzenruber运动方程示意图^[11]

Figure 2 (Color online) Schematic view of Swartzenruber equation [11].

表达为分数阶导数形式

$$q = Ki - I_0^C D_i^\alpha q, \quad (12)$$

边界条件 $q(0)=0, q'(0)=0$. 对公式(12)两端进行拉普拉斯变换, 得到

$$q = \frac{K}{I} i^{\alpha+1} E_{\alpha, \alpha+2} \left(-\frac{i}{I} \right), \quad (13)$$

其中 $E_{\alpha, \beta}$ 为双参数 Mittag-Leffler 函数^[21]. 当 $\alpha = 1$ 时, 有 $E_{1,3}(-i/I) = \frac{e^{-i/I} - 1 + i/I}{i^2/I^2}$, 带入式(13)得到 $q = K(i - I(1 - e^{-i/I}))$, 与原 Swartzenruber 模型公式一致. 图3为 $K=1$ m/s, $I=5$ 时, 求导阶次 α 对流速 q 的影响. 图4为 $K=1$ m/s, $\alpha=1.5$ 时, 参数 I 对流速 q 的影响.

3 分数阶 Swartzenruber 方程的参数拟合方法及结果

3.1 拟合方法

为了确定分数阶 Swartzenruber 方程(13)中的参数 K, I, α , 可通过构造最小二乘误差法完成, 即 $q_{LS}(K, I, \alpha) = \sum_{k=1}^N \{q_k - q(i_k)\}^2$, 式中 q_k, i_k 分别为实验测试的流速及对应的水力梯度, N 为实验数据个数.

当 $|z|$ 较小时, Mittag-Leffler 函数收敛较快, 但当 $|z|$ 较大时, 该无穷级数收敛很慢. 因而引入 Mittag-Leffler 函数的渐近逼近函数^[17]:

$$E_{\alpha, \beta}(z) \sim \frac{1}{\alpha} \exp(z^{1/\alpha}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)}, \quad (14)$$

图3 (网络版彩图)求导阶次 α 对流速的影响

Figure 3 (Color online) Sensitivity of the water flux to the fractional derivative order α .

图4 (网络版彩图)参数 I 对流速的影响

Figure 4 (Color online) Sensitivity of the water flux to parameter I .

采用Levenberg-Marquardt方法对分数阶Swartzenruber模型式(13)进行参数拟合, $j=1, 2, \dots, N$, 残差:

$$r_k = q_k - q(i_k) = q_k - \frac{K}{I} i^{\alpha+1} E_{\alpha, \alpha+2} \left(-\frac{i^\alpha}{I} \right), \quad (15)$$

因而非线性最小二乘问题转化为求目标函数:

$$F(K, I, \alpha) = \sum_k^N r_k^2(K, I, \alpha) \quad (16)$$

的最小值问题.

采用公式

$$[J^T(z_j)J(z_j) + \lambda_j D_j^T D_j](z_{j+1} - z_j) = -J(z_j)^T r$$

进行迭代, 其中 $\lambda_j \geq 0$, D_j 为对角阵(取单位矩阵). $z_j = (K^j, I^j, \alpha^j)^T$, $j=0, 1, \dots$, 表示第 j 次迭代参数 K, I, α 的取值. J 为残差向量 $r = (r_1, r_2, \dots, r_N)^T$ 的雅可比矩阵.

计算残差向量 r 及其雅可比矩阵:

$$r(z) = \begin{pmatrix} q_1 - \frac{K}{I} i^{\alpha+1} E_{\alpha, \alpha+2} \left(-\frac{i^\alpha}{I} \right) \\ q_2 - \frac{K}{I} i^{\alpha+1} E_{\alpha, \alpha+2} \left(-\frac{i^\alpha}{I} \right) \\ \dots \\ q_n - \frac{K}{I} i^{\alpha+1} E_{\alpha, \alpha+2} \left(-\frac{i^\alpha}{I} \right) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$J(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial K} & \frac{\partial r_1}{\partial I} & \frac{\partial r_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial r_2}{\partial K} & \frac{\partial r_2}{\partial I} & \frac{\partial r_2}{\partial \alpha} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial r_n}{\partial K} & \frac{\partial r_n}{\partial I} & \frac{\partial r_n}{\partial \alpha} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

其中 $z = (K, I, \alpha)^T$.

Levenberg-Marquardt 方法计算步骤如下: (1) $j = 0$, 选取初值 z_j ; (2) 将 z_j 带入雅可比矩阵式(18), 计算 $J(z_j)$, $J(z_j)^T$, 带入残差向量得到 $r(z_j)$; (3) 计算 $B = J^T(z_j)J(z_j) + \lambda_j D_j^T D_j$, $C = -J^T(z_j)r(z_j)$, 则 $s_{j+1} = B^{-1}C$; (4) $z_{j+1} = z_j + s_{j+1}$, $j = j + 1$; (5) 重复步骤(2), 结束条件 $\|r(z_j)\| < 10^{-4}$.

3.2 参数拟合结果

Cui等人^[3]对压实膨润土进行了常体积入渗实验, 取其中4组实验数据作为新模型需拟合的实验数据, 基质吸力分别为35, 37, 39和41 MPa. Liu等人^[19]指出该实验结果不同于传统实验中渗透速率与基质吸力成反比的一般认识, 经典的渗流理论与方法不能简单应用于黏土介质的非饱和和渗流问题, 有必要针对该现象进行研究. 本文对Cui等人^[3]实验数据的拟合结果见表1, 实验数据及模型拟合曲线如图5所示.

图5中4组实验数据的拟合结果表明, 分数阶Swartzenruber方程的整体拟合效果均优于原Swartzenruber方程. 如图5(a)-(d)所示, 在初始阶段, 原指数方程与实验数据偏离程度较小, 而分数阶Swartzenruber方程偏离程度较大. 在后续阶段, 分数阶Swartzenruber方程与实验数据拟合效果较好, 而原指数方程偏离程度较大.

如表1所示, 分数阶Swartzenruber方程中的参数 α 由1.95上升到3.023, 参数 I 从495.8下降为52.6, 两者

表 1 分数阶Swartzenruber方程参数拟合结果

Table 1 Parameters of fractional Swartzenruber seepage equation

基质吸力 (MPa)	Swartzenruber运动方程拟合参数			分数阶Swartzenruber运动方程拟合参数			
	K	I	R -square	K	I	α	R -square
35	126.4	660.4	0.9557	80.54	495.8	1.95	0.9935
37	142.3	630.3	0.9288	26.77	118.9	2.337	0.9921
39	182	670.3	0.9029	28.03	77.73	2.668	0.9891
41	242.9	722.2	0.8458	38.53	52.56	3.023	0.9873

图 5 (网络版彩图)分数阶渗流方程拟合结果, 基质吸力: (a) 35 MPa; (b) 37 MPa; (c) 39 MPa; (d) 41 MPa

Figure 5 (Color online) Experimental data and the fitting curves by fractional Swartzenruber equation, suction: (a) 35 MPa; (b) 37 MPa; (c) 39 MPa; (d) 41 MPa.

呈现出相反的变化趋势. 参数 K 在区间26.77–80.54变化, 未呈现出明显的变化规律. 随着基质吸力的增加, 分数阶Swartzenruber方程的4组拟合曲线逐渐向纵轴靠近, 曲线陡峭程度相应的变大.

综上所述, 新建立的渗流方程拟合效果较好, 在描述非线性渗流过程方面更具优势.

4 结论

本文基于分数阶微积分方法对低速非达西基本方程进行了研究. 从经典的达西定律出发, 利用分数

阶微积分方法对幂函数、指数函数型两种常见的非达西基本运动方程进行了研究, 并分别给出了新模型的解析表达式; 分析了分数阶Swartzenruber模型中各参数对模型的影响; 引入Levenberg-Marquardt数值方法进行非饱和土实验数据拟合, 确定了新模型运动方程的拟合参数. 主要结论如下:

(1) 由达西定律出发, 运用分数阶微积分方法得到了幂函数形式的非达西运动方程, 其数学表达式与Hansbo运动方程一致, 说明了分数阶微积分方法应用于描述非达西现象的合理性;

(2) 运用分数阶微积分方法对Swartzendruber运动方程进行了改进, 得到了新的解析表达式. 当 $\alpha=1$ 时, 新的方程与原Swartzendruber方程一致;

(3) 基于本文得到的分数阶Swartzendruber运动方程, 利用Levenberg-Marquardt数值方法对非饱和土实

验数据进行了拟合. 拟合结果表明, 新的模型可以更好地描述非达西现象.

应该看到, 本文提出的分数阶导数渗流模型仅是基于分数阶导数的数学表达, 因此分数阶导数的物理意义是值得深入研究的问题.

参考文献

- Wang J, Chen W M, Su R, et al. Geological disposal of high-level radioactive waste and its key scientific issues (in Chinese). *Chin J Rock Mech Eng*, 2006, 25: 801–812 [王驹, 陈伟明, 苏锐, 等. 高放废物地质处置及其若干关键科学问题. *岩石力学与工程学报*, 2006, 25: 801–812]
- Deng Y E, Xie H P, Huang R Q, et al. Law of nonlinear flow in saturated clays and radial consolidation. *Appl Math Mech-Engl Ed*, 2007, 28: 1427–1436
- Cui Y J, Tang A M, Loiseau C, et al. Determining the unsaturated hydraulic conductivity of a compacted sand-bentonite mixture under constant-volume and free-swell conditions. *Phys Chem Earth Parts A/B/C*, 2008, 33: S462–S471
- Hao F, Cheng L S, Li C L, et al. Study on threshold pressure gradient in ultra-low permeability reservoir (in Chinese). *J Southwest Petrol Inst*, 2006, 28: 29–32, 113 [郝斐, 程林松, 李春兰, 等. 特低渗透油藏启动压力梯度研究. *西南石油学院学报*, 2006, 28: 29–32, 113]
- Shi Y, Yang Z M, Huang Y Z. Study on non-linear seepage flow model for low-permeability reservoir (in Chinese). *Acta Petrol Sin*, 2009, 30: 731–734 [时宇, 杨正明, 黄延章. 低渗透储层非线性渗流模型研究. *石油学报*, 2009, 30: 731–734]
- Huang Y Z. Nonlinear percolation feature in low permeability reservoir (in Chinese). *Special Oil Gas Res*, 1997, 01: 9–14 [黄延章. 低渗透油层非线性渗流特征. *特种油气藏*, 1997, 01: 9–14]
- Yao Y D, Ge J L. Study on non-Darcy flow pattern in low permeability oil reservoir (in Chinese). *Xinjiang Petrol Geology*, 2000, 21: 213–215, 256 [姚约东, 葛家理. 低渗透油层非达西渗流规律的研究. *新疆石油地质*, 2000, 21: 213–215, 256]
- Bear J. *Hydraulics of Groundwater*. New York: Dover Publications Inc., 1979
- Hansbo S. Consolidation of clay, with special reference to influence of vertical sand drains. In: *Proceedings of Swedish Geotechnical Institute*. Stockholm, 1960. 8: 45–50
- Hansbo S. Consolidation equation valid for both Darcian and non-Darcian flow. *Géotechnique*, 2001, 51: 51–54
- Swartzendruber D. Modification of Darcy's law for the flow of water in soils. *Soil Sci*, 1962, 93: 22–29
- Zhou Q, Zhang G X, Wang Y Y, et al. Hansbo's consolidation solution for sand-drained ground under vacuum preloading (in Chinese). *Chin J Rock Mech Eng*, 2010, 29: 3994–3999 [周琦, 张功新, 王友元, 等. 真空预压条件下的砂井地基Hansbo固结解. *岩石力学与工程学报*, 2010, 29: 3994–3999]
- Liu Z Y, Yan F Y, Wang X J. One-dimensional rheological consolidation analysis of saturated clay considering non-Darcy flow (in Chinese). *Chin J Rock Mech Eng*, 2013, 32: 1937–1944 [刘忠玉, 闫富有, 王喜军. 基于非达西渗流的饱和黏土一维流变固结分析. *岩石力学与工程学报*, 2013, 32: 1937–1944]
- Li C X, Xie K H, Lu M M, et al. Analysis of one-dimensional consolidation with non-Darcy flow described by non-Newtonian index (in Chinese). *Rock Soil Mech*, 2011, 32: 281–287 [李传勋, 谢康和, 卢萌盟, 等. 基于非牛顿指数描述的非达西渗流一维固结分析. *岩土力学*, 2011, 32: 281–287]
- Zhou H W, Wang C P, Han B B, et al. A creep constitutive model for salt rock based on fractional derivatives. *Int J Rock Mech Mining Sci*, 2011, 48: 116–121
- Zhou H W, Wang C P, Duan Z Q, et al. Time-based fractional derivative approach to creep constitutive model of salt rock (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2012, 42: 310–318 [周宏伟, 王春萍, 段志强, 等. 基于分数阶导数的盐岩流变本构模型. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2012, 42: 310–318]
- Chen W, Zhang J J, Zhang J Y. A variable-order time-fractional derivative model for chloride ions sub-diffusion in concrete structures. *Fractional Calculus Appl Anal*, 2013, 16: 76–92
- Tian J, Tong D. The flow analysis of fluids in fractal reservoir with the fractional derivative. *J Hydrodynamics Ser B*, 2006, 18: 287–293
- Liu H H, Li L, Birkholzer J. Unsaturated properties for non-Darcian water flow in clay. *J Hydrol*, 2012, 430–431: 173–178
- Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. New York: Academic Press, 1999
- Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models*. London: Imperial College Press, 2010

The study on non-Darcy seepage equation of low velocity flow

WANG Rui, ZHOU HongWei*, ZHONG JiangCheng, YI HaiYang,
CHEN ChaoFan & ZHAO Yang

School of Mechanics and Civil Engineering, China University of Mining and Technology, Beijing 100083, China

Many experiments have confirmed that the seepage flow in low permeability porous media is nonlinear. Mathematical model research for nonlinear seepage flow is of great significance for guiding engineering practice in geological repository and energy exploration. Aiming at modifying the typical power and exponential seepage equation, this paper attempts to study nonlinear seepage motion by using of fractional calculus. Based on the classical Darcy's Law, a seepage equation is derived via Laplace transformation which is similar to the Hansbo's power law equation. Moreover, by applying fractional derivative to Swartzenruber exponential seepage equation, we obtain a new three parameters mathematical model of continuous function with the same procedure. The parametric sensitivity analysis is conducted to investigate the effects of model parameters on the relationship between water flux and hydraulic gradient. The parametric analysis also shows that the fractional Swartzenruber seepage equation reduces to be the classical Swartzenruber seepage equation when the fractional order equals to one. All the parameters of the fractional Swartzenruber seepage equation are determined by the Levenberg-Marquardt algorithm based on the unsaturated seepage experimental data. The fitting results show that fractional Swartzenruber seepage equation has better effects than the original model, i.e. the proposed model can characterize nonlinear seepage process more precisely.

low velocity flow, non-Darcy seepage equation, fractional calculus

PACS: 47.27.-i, 47.27.Eq, 47.27.Nz, 47.40.Ki, 47.85.Gj

doi: [10.1360/SSPMA2016-00366](https://doi.org/10.1360/SSPMA2016-00366)