关于短区间的并集中 Woods 问题的一个推广

刘华宁*, 张珍珍

西北大学数学学院, 西安 710127

E-mail: hnliu@nwu.edu.cn, zhangzzke@126.com

收稿日期: 2015-10-08; 接受日期: 2016-10-17; 网络出版日期: 2016-11-14; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11571277)、陕西省青年科技新星 (批准号: 2014KJXX-61) 和陕西省自然科学基金 (批准号: 2014JM1007) 资助项目

摘要 本文利用不完全 Kloosterman 和的估计来研究短区间的并集中 Woods 问题的一个推广, 并且给出了渐近公式. 具体来讲, 设 p 是奇素数, $1 \leq H \leq p$, 实数 δ 满足 $0 < \delta \leq 1$, 并设 $I^{(j)}$ ($1 \leq j \leq J$) 是 $(0, p)$ 的互不相交的子区间, 满足 $\frac{H}{2} \leq |I^{(j)}| \leq H$. 定义 $I = \bigcup_{j=1}^J I^{(j)}$, 以及 $A(\delta, p) = \{a \in \mathbb{Z} : 1 \leq a, \bar{a} \leq p-1, |a - \bar{a}| < \delta p\}$, 其中 $\bar{a}$ 是 a 关于模 p 的乘法逆, 满足 $a\bar{a} \equiv 1 \pmod{p}$. 设 χ 是模 p 的 Dirichlet 非主特征. 本文证明了

$$\sum_{\substack{x \in I \\ x \in A(\delta, p)}} 1 = \frac{1}{p} \int_0^{[\delta p]} \left(\sum_{\substack{x \in I \\ x \leq p-1-t}} 1 + \sum_{\substack{x \in I \\ x \geq t+1}} 1 \right) dt + O(J^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \log H \log^2 p),$$

以及

$$\sum_{\substack{x \in I \\ x \in A(\delta, p)}} \chi(x) \ll J^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \log H \log^2 p.$$

关键词 整数及其逆 Kloosterman 和 短区间 特征**MSC (2010) 主题分类** 11A07, 11L40, 11L05

1 引言

设奇整数 $q > 2$. 对任意与 q 互素的整数 a , 存在唯一的整数逆 $\bar{a}$ 满足 $1 \leq \bar{a} \leq q$ 和 $a\bar{a} \equiv 1 \pmod{q}$. 设 k 为正整数, Zhang^[1] 证明了

$$\sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q (a - \bar{a})^{2k} = \frac{1}{(2k+1)(k+1)} \phi(q) q^{2k} + O(4^k q^{\frac{4k+1}{2}} d^2(q) \log^2 q),$$

其中 $\phi(q)$ 为 Euler 函数, $d(q)$ 为除数函数, O 表示绝对常数.

英文引用格式: Liu H N, Zhang Z Z. A generalization of Woods problem in unions of short intervals (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 467–478, doi: 10.1360/N012015-00310

设 δ 满足 $0 < \delta \leq 1$. 1994 年, Woods 在一次学术交流中询问张文鹏关于 $|a - \bar{a}|$ 的一个分布问题, 即当 $q \rightarrow \infty, 0 < \delta \leq 1$ 时, 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{a : 1 \leq a \leq q, (a, q) = 1, |a - \bar{a}| < \delta q\}}{\phi(q)}$$

是否存在?

定义

$$A(\delta, q) = \{a \in \mathbb{Z} : (a, q) = 1, 1 \leq a, \bar{a} \leq q, |a - \bar{a}| < \delta q\}.$$

Zhang [2] 给出了渐近公式

$$\sum_{a \in A(\delta, q)} 1 = \phi(q)\delta(2 - \delta) + O(q^{\frac{1}{2}}d^2(q)\log^2 q),$$

从而解决了这个问题. 设实数 $l \geq 0$, Zhang [3] 还证明了

$$\sum_{a \in A(\delta, q)} |a - \bar{a}|^l = 2\phi(q)q^l \left(\frac{\delta^{l+1}}{l+1} - \frac{\delta^{l+2}}{l+2} \right) + O(q^{l+\frac{1}{2}}d^2(q)\log^2 q).$$

本文进一步考虑 Woods 问题在短区间的并集上的推广. 主要结论如下.

定理 1.1 设 p 是奇素数, $1 \leq H \leq p$, 实数 δ 满足 $0 < \delta \leq 1$, 并设 $I^{(j)}$ ($1 \leq j \leq J$) 是 $(0, p)$ 的互不相交的子区间, 满足 $\frac{H}{2} \leq |I^{(j)}| \leq H$. 设 $I = \bigcup_{j=1}^J I^{(j)}$, 则有

$$\sum_{\substack{x \in I \\ x \in A(\delta, p)}} 1 = \frac{1}{p} \int_0^{[\delta p]} \left(\sum_{\substack{x \in I \\ x \leq p-1-t}} 1 + \sum_{\substack{x \in I \\ x \geq t+1}} 1 \right) dt + O(J^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}\log H \log^2 p).$$

注 1.1 由 (3.2) 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \int_0^{[\delta p]} \left(\sum_{\substack{x \in I \\ x \leq p-1-t}} 1 + \sum_{\substack{x \in I \\ x \geq t+1}} 1 \right) dt &\gg \frac{1}{p} \sum_{\substack{x \in I \\ x \leq \frac{p}{2}}} \sum_{\substack{y=1 \\ |x-y| < \delta p}}^{p-1} 1 \gg \frac{1}{p} \sum_{\substack{x \in I \\ x \leq \frac{p}{2}}} \sum_{\substack{y=1 \\ 0 \leq y-x < \delta p}}^{p-1} 1 + \frac{1}{p} \sum_{\substack{x \in I \\ x \geq \frac{p}{2}}} \sum_{\substack{y=1 \\ 0 \leq x-y < \delta p}}^{p-1} 1 \\ &\gg \delta \sum_{\substack{x \in I \\ x \leq \frac{p}{2}}} 1 + \delta \sum_{\substack{x \in I \\ x \geq \frac{p}{2}}} 1 \gg \delta JH. \end{aligned}$$

因此, 当 $\delta J^{\frac{1}{2}}H \gg p^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ 时, 定理 1.1 中的渐近公式有效.

设 $q \geq 2$ 为整数, χ 为模 q 的 Dirichlet 非主特征. 设 N 和 H 为正整数. 经典的特征和估计为 (参见文献 [4, 5])

$$\sum_{n=N+1}^{N+H} \chi(n) \ll q^{\frac{1}{2}} \log q.$$

设 r 为正整数, ϵ 为任意正实数. 当 q 为无立方因子数或者 $r \leq 3$ 时, Burgess [6, 7] 证明了

$$\sum_{n=N+1}^{N+H} \chi(n) \ll_{\epsilon, r} H^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{r+1}{4r^2}+\epsilon}.$$

在广义 Riemann 假设下, Montgomery 和 Vaughan [8] 给出了上界估计

$$\sum_{n=N+1}^{N+H} \chi(n) \ll q^{\frac{1}{2}} \log \log q.$$

很多学者考虑了特殊集合上的特征和的估计, 相关问题与进展可参见文献 [9]. 例如, Xi 和 Yi [10] 研究了 $A(\delta, q)$ 上的特征和的估计, 并证明了

$$\sum_{n \in A(\delta, q)} \chi(n) \ll q^{\frac{1}{2}} d^2(q) \log(\delta q).$$

Heath-Brown [11] 和 Shao [12] 分别研究了短区间的并集上的特征和的高次均值. 特别地, Shao [12] 还给出了下面的估计式.

命题 1.1 设 q 为无立方因子数, χ 为模 q 的 Dirichlet 原特征. 设 $B \subset [1, q]$ 是 s 个不相交的子区间 $I_1, \dots, I_s$ 的并集, 其中每个子区间的长度都至少为 q^ϵ . 设 $|B|s^{-\frac{1}{2}} > q^{\frac{1}{4}+\epsilon}$, 则存在 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ 使得

$$\sum_{n \in B} \chi(n) \ll_\epsilon |A|q^{-\delta}.$$

本文进一步考虑短区间的并集与 $A(\delta, p)$ 上的特征和的估计. 相关结论如下.

定理 1.2 设 p 是奇素数, $1 \leq H \leq p$, 实数 δ 满足 $0 < \delta \leq 1$, 并设 $I^{(j)}$ ($1 \leq j \leq J$) 是 $(0, p)$ 的互不相交的子区间, 满足 $\frac{H}{2} \leq |I^{(j)}| \leq H$. 设 $I = \bigcup_{j=1}^J I^{(j)}$, 并设 χ 是模 p 的 Dirichlet 非主特征, 则有

$$\sum_{\substack{x \in I \\ x \in A(\delta, p)}} \chi(x) \ll J^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \log H \log^2 p.$$

本文将在第 2 节中考虑短区间的并集上的 Kloosterman 和与特征和, 并给出一些估计式. 利用这些估计式, 并结合三角和与指数和的性质, 我们将在第 3 和 4 节中分别给出定理 1.1 和 1.2 的证明. 最后在第 5 节给出结论与讨论.

2 短区间的并集上 Kloosterman 和的估计

设 $p > 2$ 为素数, χ 为模 p 的 Dirichlet 非主特征. 对于任意整数 m 和 n , 经典的 Kloosterman 和定义为

$$K(m, n; p) = \sum_{a=1}^{p-1} e\left(\frac{ma + n\bar{a}}{p}\right), \quad K(m, n, \chi; p) = \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a) e\left(\frac{ma + n\bar{a}}{p}\right),$$

其中 $e(y) = e^{2\pi i y}$. 根据 Weil 的估计式, 可得

$$K(m, n; p) \ll p^{\frac{1}{2}}(m, n, p)^{\frac{1}{2}}, \quad K(m, n, \chi; p) \ll p^{\frac{1}{2}}(m, n, p)^{\frac{1}{2}}.$$

为了证明本文的两个主要定理, 我们需要考虑短区间的并集上的 Kloosterman 和与特征和的估计. 先证明下面的几个引理.

引理 2.1 设 p 是奇素数, H, l 和 a 为整数, 满足 $1 \leq H \leq p, (l, p) = 1$. 设 χ 是模 p 的非主特征, 则有

$$\sum_{n=1}^p \left| \sum_{\substack{m=n+1 \\ m \not\equiv 0 \pmod{p}}}^{n+H} e\left(\frac{am + 2l\bar{m}}{2p}\right) \right|^2 \ll pH,$$

$$\sum_{n=1}^p \left| \sum_{\substack{m=n+1 \\ m \not\equiv 0 \pmod{p}}}^{n+H} \chi(m) e\left(\frac{am + 2l\bar{m}}{2p}\right) \right|^2 \ll pH,$$

其中 $\bar{m}$ 是 m 关于模 p 的乘法逆, 满足 $1 \leq \bar{m} \leq p-1$ 和 $m\bar{m} \equiv 1 \pmod{p}$.

证明 我们只证第一个估计式, 类似可得第二个. 由剩余系的性质可得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^p \left| \sum_{\substack{m=n+1 \\ m \not\equiv 0 \pmod{p}}}^{n+H} e\left(\frac{am + 2l\bar{m}}{2p}\right) \right|^2 \\ &= \sum_{n=1}^p \left| \sum_{\substack{h=1 \\ n+h \not\equiv 0 \pmod{p}}}^H e\left(\frac{a(n+h) + 2l\overline{n+h}}{2p}\right) \right|^2 \\ &= \sum_{n=1}^p \sum_{\substack{h_1=1 \\ n+h_1 \not\equiv 0 \pmod{p}}}^H e\left(\frac{a(n+h_1) + 2l\overline{n+h_1}}{2p}\right) \sum_{\substack{h_2=1 \\ n+h_2 \not\equiv 0 \pmod{p}}}^H e\left(-\frac{a(n+h_2) + 2l\overline{n+h_2}}{2p}\right) \\ &= \sum_{h_1=1}^H \sum_{h_2=1}^H \sum_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv -h_1, -h_2 \pmod{p}}}^p e\left(\frac{a(h_1 - h_2) + 2l(\overline{n+h_1} - \overline{n+h_2})}{2p}\right) \\ &= \sum_{h_1=1}^H e\left(\frac{ah_1}{2p}\right) \sum_{h_2=1}^H e\left(-\frac{ah_2}{2p}\right) \sum_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv -h_1, -h_2 \pmod{p}}}^p e\left(\frac{l(\overline{n+h_1} - \overline{n+h_2})}{p}\right). \end{aligned}$$

另一方面, 由三角和恒等式有

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv -h_1, -h_2 \pmod{p}}}^p e\left(\frac{l(\overline{n+h_1} - \overline{n+h_2})}{p}\right) \\ &= \frac{1}{p^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv -h_1, -h_2 \pmod{p}}}^p \sum_{x=1}^{p-1} \sum_{y=1}^{p-1} e\left(\frac{l(\bar{x} - \bar{y})}{p}\right) \\ & \quad \times \sum_{s=1}^p e\left(\frac{s(x - (n+h_1))}{p}\right) \sum_{t=1}^p e\left(\frac{t(y - (n+h_2))}{p}\right) \\ &= \frac{1}{p^2} \sum_{n=1}^p \sum_{x=1}^{p-1} \sum_{y=1}^{p-1} e\left(\frac{l(\bar{x} - \bar{y})}{p}\right) \sum_{s=1}^p e\left(\frac{s(x - (n+h_1))}{p}\right) \sum_{t=1}^p e\left(\frac{t(y - (n+h_2))}{p}\right) \\ &= \frac{1}{p^2} \sum_{s=1}^p e\left(-\frac{sh_1}{p}\right) \sum_{t=1}^p e\left(-\frac{th_2}{p}\right) \sum_{x=1}^{p-1} e\left(\frac{sx + l\bar{x}}{p}\right) \sum_{y=1}^{p-1} e\left(\frac{ty - l\bar{y}}{p}\right) \sum_{n=1}^p e\left(-\frac{n(s+t)}{p}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p e\left(\frac{s(h_2 - h_1)}{p}\right) \left| \sum_{x=1}^{p-1} e\left(\frac{sx + l\bar{x}}{p}\right) \right|^2.$$

因此, 由 Kloosterman 和的经典估计可得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^p \left| \sum_{\substack{m=n+1 \\ m \not\equiv 0 \pmod{p}}}^{n+H} e\left(\frac{am + 2l\bar{m}}{2p}\right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{p} \sum_{h_1=1}^H e\left(\frac{ah_1}{2p}\right) \sum_{h_2=1}^H e\left(-\frac{ah_2}{2p}\right) \sum_{s=1}^p e\left(\frac{s(h_2 - h_1)}{p}\right) \left| \sum_{x=1}^{p-1} e\left(\frac{sx + l\bar{x}}{p}\right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p \left| \sum_{h=1}^H e\left(\frac{h(a - 2s)}{2p}\right) \right|^2 \left| \sum_{x=1}^{p-1} e\left(\frac{sx + l\bar{x}}{p}\right) \right|^2 \\ &\ll \sum_{s=1}^p \left| \sum_{h=1}^H e\left(\frac{h(a - 2s)}{2p}\right) \right|^2 = \sum_{h_1=1}^H e\left(\frac{ah_1}{2p}\right) \sum_{h_2=1}^H e\left(-\frac{ah_2}{2p}\right) \sum_{s=1}^p e\left(\frac{s(h_2 - h_1)}{p}\right) \\ &= pH. \end{aligned}$$

证毕. $\square$

引理 2.2 设 p 是奇素数, H 是整数, t 为实数, 满足 $1 \leq H \leq p$ 和 $0 < t < p$. 设 χ 是模 p 的非主特征, 则有

$$\sum_{n=1}^p \left| \sum_{\substack{m=n+1 \\ m \leq p-1-t}}^{n+H} \chi(m) \right|^2 \ll pH \log^2 p, \quad \sum_{n=1}^p \left| \sum_{\substack{m=n+1 \\ m \geq t+1}}^{n+H} \chi(m) \right|^2 \ll pH \log^2 p.$$

证明 我们只证第一个估计式, 类似可得第二个. 由剩余系的性质与三角和恒等式可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^p \left| \sum_{\substack{m=n+1 \\ m \leq p-1-t}}^{n+H} \chi(m) \right|^2 &= \sum_{n=1}^p \left| \sum_{\substack{h=1 \\ h \leq p-1-t-n}}^H \chi(n+h) \right|^2 \\ &= \sum_{n=1}^p \sum_{\substack{h_1=1 \\ h_1 \leq p-1-t-n}}^H \sum_{\substack{h_2=1 \\ h_2 \leq p-1-t-n}}^H \chi(n+h_1) \bar{\chi}(n+h_2) \\ &= \frac{1}{p^2} \sum_{n=1}^p \sum_{h_1=1}^H \sum_{h_2=1}^H \sum_{x \leq p-1-t} \sum_{y \leq p-1-t} \chi(x) \bar{\chi}(y) \\ &\quad \times \sum_{s=1}^p e\left(\frac{s(x - (n+h_1))}{p}\right) \sum_{t=1}^p e\left(\frac{t((n+h_2) - y)}{p}\right) \\ &= \frac{1}{p^2} \sum_{h_1=1}^H \sum_{h_2=1}^H \sum_{s=1}^p e\left(-\frac{sh_1}{p}\right) \sum_{t=1}^p e\left(\frac{th_2}{p}\right) \sum_{x \leq p-1-t} \chi(x) e\left(\frac{sx}{p}\right) \\ &\quad \times \sum_{y \leq p-1-t} \bar{\chi}(y) e\left(-\frac{ty}{p}\right) \sum_{n=1}^p e\left(\frac{n(t-s)}{p}\right) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p \left| \sum_{h=1}^H e\left(\frac{sh}{p}\right) \right|^2 \left| \sum_{x \leq p-1-t} \chi(x) e\left(\frac{sx}{p}\right) \right|^2. \end{aligned}$$

利用 Gauss 和的经典估计 (参见文献 [13]) 以及三角和恒等式, 有

$$\begin{aligned}
 \sum_{x \leq p-1-t} \chi(x) e\left(\frac{sx}{p}\right) &= \frac{1}{p} \sum_{x \leq p-1-t} \sum_{y=1}^{p-1} \chi(y) e\left(\frac{sy}{p}\right) \sum_{u=1}^p e\left(\frac{u(x-y)}{p}\right) \\
 &= \frac{1}{p} \sum_{u=1}^p \sum_{x \leq p-1-t} e\left(\frac{ux}{p}\right) \sum_{y=1}^{p-1} \chi(y) e\left(\frac{y(s-u)}{p}\right) \\
 &= \frac{1}{p} \sum_{x \leq p-1-t} \sum_{y=1}^{p-1} \chi(y) e\left(\frac{sy}{p}\right) \\
 &\quad + \frac{1}{p} \sum_{u=1}^{p-1} \sum_{x \leq p-1-t} e\left(\frac{ux}{p}\right) \sum_{y=1}^{p-1} \chi(y) e\left(\frac{y(s-u)}{p}\right) \\
 &\ll p^{\frac{1}{2}} \log p.
 \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^p \left| \sum_{\substack{m=n+1 \\ m \leq p-1-t}}^{n+H} \chi(m) \right|^2 &\ll \log^2 p \sum_{s=1}^p \left| \sum_{h=1}^H e\left(\frac{sh}{p}\right) \right|^2 \\
 &= \log^2 p \sum_{h_1=1}^H \sum_{h_2=1}^H \sum_{s=1}^p e\left(\frac{s(h_1-h_2)}{p}\right) = pH \log^2 p.
 \end{aligned}$$

证毕. □

下面的引理 2.3 是文献 [14] 中的上界估计

$$\sum_{j=1}^J \left| \sum_{n \in I_j} e\left(\frac{a\bar{n}}{p}\right) \right|^2 \leq 2^{12} p \log^2 H$$

的推广或变形.

引理 2.3 设 p 是奇素数, $I_1, I_2, \dots, I_J \subseteq (0, p)$ 是互不相交的子区间, 且对任意的 j 满足 $\frac{H}{2} < |I_j| \leq H$, 其中 $1 \leq H \leq p$, 且 H 为整数. 设 a 和 l 为任意整数, 满足 $(l, p) = 1$. 设 χ 是模 p 的非主特征, 实数 t 满足 $0 < t < p$, 则有

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^J \left| \sum_{n \in I_j} e\left(\frac{an + 2l\bar{n}}{2p}\right) \right|^2 &\ll p \log^2 H, \\
 \sum_{j=1}^J \left| \sum_{n \in I_j} \chi(n) e\left(\frac{an + 2l\bar{n}}{2p}\right) \right|^2 &\ll p \log^2 H, \\
 \sum_{j=1}^J \left| \sum_{\substack{n \in I_j \\ n \leq p-1-t}} \chi(n) \right|^2 &\ll p \log^2 H \log^2 p, \\
 \sum_{j=1}^J \left| \sum_{\substack{n \in I_j \\ n \geq t+1}} \chi(n) \right|^2 &\ll p \log^2 H \log^2 p.
 \end{aligned}$$

证明 我们只证第一个估计式, 利用同样的方法与引理 2.1 和 2.2 可得其余的估计式.

沿用文献 [11,12,14] 中的思路, 设 N_j 为集合 I_j 中的最小整数, 并且不妨假设 $N_1 < N_2 < \cdots < N_J$. 显然有

$$N_{j+1} - N_j \geq \frac{H}{2}.$$

定义

$$S(n, H) = \sum_{\substack{m=n+1 \\ m \not\equiv 0 \pmod{p}}}^{n+H} e\left(\frac{am + 2l\overline{m}}{2p}\right).$$

易证

$$\sum_{j=1}^J \left| \sum_{n \in I_j} e\left(\frac{an + 2l\overline{n}}{2p}\right) \right|^2 \leq \sum_{j=1}^J \max_{1 \leq h \leq H} |S(N_j, h)|^2. \quad (2.1)$$

此外对于 $1 \leq h \leq H$ 和 $N_j - H < n \leq N_j$, 可得

$$|S(N_j, h)| = |S(n, N_j - n + h) - S(n, N_j - n)| \leq 2 \max_{1 \leq k \leq 2H} |S(n, k)|.$$

上式两边对 n 求和, 有

$$|S(N_j, h)| \leq \frac{2}{H} \sum_{N_j - H < n \leq N_j} \max_{1 \leq k \leq 2H} |S(n, k)|.$$

再由 Cauchy 不等式, 可得

$$|S(N_j, h)|^2 \leq \frac{4}{H^2} \left(\sum_{N_j - H < n \leq N_j} \max_{1 \leq k \leq 2H} |S(n, k)| \right)^2 \leq \frac{4}{H} \sum_{N_j - H < n \leq N_j} \max_{1 \leq k \leq 2H} |S(n, k)|^2.$$

对 h 取最大值, 并对 j 求和, 有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J \max_{1 \leq h \leq H} |S(N_j, h)|^2 &\leq \frac{4}{H} \sum_{j=1}^J \sum_{N_j - H < n \leq N_j} \max_{1 \leq k \leq 2H} |S(n, k)|^2 \\ &= \frac{4}{H} \sum_{\substack{j=1 \\ 2 \nmid j}}^J \sum_{N_j - H < n \leq N_j} \max_{1 \leq k \leq 2H} |S(n, k)|^2 \frac{4}{H} \sum_{\substack{j=1 \\ 2 \nmid j}}^J \sum_{N_j - H < n \leq N_j} \max_{1 \leq k \leq 2H} |S(n, k)|^2. \end{aligned}$$

注意到 $N_{j+1} - N_j \geq \frac{H}{2}$, 易证

$$\begin{aligned} \bigcup_{\substack{j=1 \\ 2 \nmid j}}^J \{n : N_j - H < n \leq N_j\} &\subset \{1, 2, \dots, p\}, \\ \bigcup_{\substack{j=1 \\ 2 \nmid j}}^J \{n : N_j - H < n \leq N_j\} &\subset \{1, 2, \dots, p\}. \end{aligned}$$

从而,

$$\sum_{j=1}^J \max_{1 \leq h \leq H} |S(N_j, h)|^2 \leq \frac{8}{H} \sum_{n=1}^p \max_{1 \leq h \leq 2H} |S(n, h)|^2. \quad (2.2)$$

取正整数 t , 满足 $2H \leq 2^t \leq 4H$, 此时显然有 $t+1 \leq 4 \log H$. 对于 1 到 p 之间的每一个 n , 可以选取合适的正整数 $k = k(n) \leq 2H$, 使得

$$\max_{1 \leq h \leq 2H} |S(n, h)| = |S(n, k)|.$$

把 k 作二进制展开, 并记 $k = \sum_{d \in \mathcal{D}} 2^{t-d}$, 其中 $\mathcal{D}$ 显然是 $[0, t]$ 之间的整数的某个集合. 因此,

$$S(n, k) = \sum_{d \in \mathcal{D}} S(n + v_{n,d} 2^{t-d}, 2^{t-d}),$$

其中

$$v_{n,d} = \sum_{\substack{e \in \mathcal{D} \\ e < d}} 2^{d-e} < 2^d.$$

利用 Cauchy 不等式, 有

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq h \leq 2H} |S(n, h)|^2 &= |S(n, k)|^2 = \left(\sum_{d \in \mathcal{D}} S(n + v_{n,d} 2^{t-d}, 2^{t-d}) \right)^2 \\ &\leq |\mathcal{D}| \sum_{d \in \mathcal{D}} |S(n + v_{n,d} 2^{t-d}, 2^{t-d})|^2 \\ &\leq (t+1) \sum_{0 \leq d \leq t} \sum_{0 \leq v < 2^d} |S(n + v_{n,d} 2^{t-d}, 2^{t-d})|^2. \end{aligned}$$

在上式两边对 n 求和, 并结合引理 2.1 可得

$$\sum_{n=1}^p \max_{1 \leq h \leq 2H} |S(n, h)|^2 \leq (t+1) \sum_{0 \leq d \leq t} \sum_{0 \leq v < 2^d} p 2^{t-d} \leq p 2^t (t+1)^2 \ll p H \log^2 H. \quad (2.3)$$

最后由 (2.1)–(2.3) 立即可证得引理 2.3. $\square$

由 Cauchy 不等式和引理 2.3 立即可得如下关于短区间的并集中的 Kloosterman 和与特征和的估计式.

定理 2.1 设 p 是奇素数, $I_1, I_2, \dots, I_J \subseteq (0, p)$ 是互不相交的子区间, 且对任意的 j 满足 $\frac{H}{2} < |I_j| \leq H$, 其中 $1 \leq H \leq p$. 设 a 和 l 为任意整数, 满足 $(l, p) = 1$. 设 χ 是模 p 的 Dirichlet 特征, 实数 t 满足 $0 < t < p$, 则有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J \left| \sum_{x \in I_j} e\left(\frac{ax + 2l\bar{x}}{2p}\right) \right| &\ll J^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \log H, \\ \sum_{j=1}^J \left| \sum_{x \in I_j} \chi(x) e\left(\frac{ax + 2l\bar{x}}{2p}\right) \right| &\ll J^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \log H, \\ \sum_{j=1}^J \left| \sum_{\substack{x \in I_j \\ x \leq p-1-t}} \chi(x) \right| &\ll J^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \log H \log p, \\ \sum_{j=1}^J \left| \sum_{\substack{x \in I_j \\ x \geq t+1}} \chi(x) \right| &\ll J^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \log H \log p. \end{aligned}$$

3 定理 1.1 的证明

定理 1.1 的证明 由三角和恒等式与剩余系的性质, 有

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{x \in I \\ x \in A(\delta, p)}} 1 &= \sum_{\substack{x \in I \\ |x - \bar{x}| < \delta p}} 1 = \frac{1}{p} \sum_{\substack{x \in I \\ |x - y| < \delta p}} \sum_{y=1}^{p-1} \sum_{l=1}^{p-1} e\left(\frac{l(\bar{x} - y)}{p}\right) \\
 &= \frac{1}{p} \sum_{\substack{x \in I \\ |x - y| < \delta p}} \sum_{y=1}^{p-1} 1 + \frac{1}{p} \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{\substack{x \in I \\ |x - y| < \delta p}} \sum_{y=1}^{p-1} e\left(\frac{l(\bar{x} - y)}{p}\right) \\
 &=: S_1 + S_2.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

容易证明

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{1}{p} \sum_{\substack{x \in I \\ |x - y| < \delta p}} \sum_{y=1}^{p-1} 1 = \frac{1}{p} \sum_{t=-[\delta p]}^{[\delta p]} \sum_{\substack{x \in I \\ x - y = t}} \sum_{y=1}^{p-1} 1 \\
 &= \frac{1}{p} \sum_{-[\delta p] \leq t < 0} \sum_{\substack{x \in I \\ x \leq p-1+t}} 1 + \frac{1}{p} \sum_{0 \leq t \leq [\delta p]} \sum_{\substack{x \in I \\ x \geq t+1}} 1 \\
 &= \frac{1}{p} \sum_{0 \leq t \leq [\delta p]} \sum_{\substack{x \in I \\ x \leq p-1-t}} 1 + \frac{1}{p} \sum_{0 \leq t \leq [\delta p]} \sum_{\substack{x \in I \\ x \geq t+1}} 1 + O(1) \\
 &= \frac{1}{p} \int_0^{[\delta p]} \left(\sum_{\substack{x \in I \\ x \leq p-1-t}} 1 \right) dt + \frac{1}{p} \int_0^{[\delta p]} \left(\sum_{\substack{x \in I \\ x \geq t+1}} 1 \right) dt + O(1) \\
 &= \frac{1}{p} \int_0^{[\delta p]} \left(\sum_{\substack{x \in I \\ x \leq p-1-t}} 1 + \sum_{\substack{x \in I \\ x \geq t+1}} 1 \right) dt + O(1).
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

此外由三角和恒等式与指数和的性质可得

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \frac{1}{p} \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{j=1}^J \sum_{\substack{x \in I^{(j)} \\ |x - y| < \delta p}} \sum_{y=1}^{p-1} e\left(\frac{l(\bar{x} - y)}{p}\right) = \frac{1}{p} \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{j=1}^J \sum_{t=-[\delta p]}^{[\delta p]} \sum_{\substack{x \in I^{(j)} \\ x - y = t}} \sum_{y=1}^{p-1} e\left(\frac{l(\bar{x} - y)}{p}\right) \\
 &= \frac{1}{2p^2} \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{j=1}^J \sum_{t=-[\delta p]}^{[\delta p]} \sum_{x \in I^{(j)}} \sum_{y=1}^{p-1} e\left(\frac{l(\bar{x} - y)}{p}\right) \sum_{a=1}^{2p} e\left(\frac{a(x - y - t)}{2p}\right) \\
 &= \frac{1}{2p^2} \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{a=1}^{2p} \sum_{t=-[\delta p]}^{[\delta p]} e\left(-\frac{at}{2p}\right) \sum_{j=1}^J \sum_{x \in I^{(j)}} e\left(\frac{ax + 2l\bar{x}}{2p}\right) \sum_{y=1}^{p-1} e\left(-\frac{(a + 2l)y}{2p}\right) \\
 &\ll \frac{1}{p} \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{j=1}^J \left| \sum_{x \in I^{(j)}} e\left(\frac{l\bar{x}}{p}\right) \right| + \frac{1}{p^2} \sum_{a=1}^{2p-1} \frac{1}{\langle \frac{a}{2p} \rangle} \sum_{\substack{l=1 \\ a+2l=2p}}^{p-1} p \cdot \sum_{j=1}^J \left| \sum_{x \in I^{(j)}} e\left(\frac{ax + 2l\bar{x}}{2p}\right) \right| \\
 &\quad + \frac{1}{p^2} \sum_{a=1}^{2p-1} \frac{1}{\langle \frac{a}{2p} \rangle} \sum_{\substack{l=1 \\ a+2l \neq 2p}}^{p-1} \frac{1}{\langle \frac{a+2l}{2p} \rangle} \sum_{j=1}^J \left| \sum_{x \in I^{(j)}} e\left(\frac{ax + 2l\bar{x}}{2p}\right) \right|,
 \end{aligned}$$

其中 $\langle \alpha \rangle = \min(\{\alpha\}, 1 - \{\alpha\})$. 再由定理 2.1, 有

$$\begin{aligned} S_2 &\ll \frac{1}{p} \sum_{l=1}^{p-1} J^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \log H + \frac{1}{p} \sum_{a=1}^{2p-1} \frac{1}{\langle \frac{a}{2p} \rangle} \cdot J^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \log H \\ &\quad + \frac{1}{p^2} \sum_{a=1}^{2p-1} \frac{1}{\langle \frac{a}{2p} \rangle} \sum_{\substack{l=1 \\ a+2l \neq 2p}}^{p-1} \frac{1}{\langle \frac{a+2l}{2p} \rangle} \cdot J^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \log H \\ &\ll J^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \log H \log^2 p. \end{aligned} \quad (3.3)$$

结合 (3.1)–(3.3), 立即可得定理 1.1. $\square$

4 定理 1.2 的证明

定理 1.2 的证明 与定理 1.1 的证明类似, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x \in I \\ x \in A(\delta, p)}} \chi(x) &= \sum_{\substack{x \in I \\ |x - \bar{x}| < \delta p}} \chi(x) = \frac{1}{p} \sum_{\substack{x \in I \\ |x - y| < \delta p}} \sum_{y=1}^p \sum_{l=1}^{p-1} \chi(x) e\left(\frac{l(\bar{x} - y)}{p}\right) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{\substack{x \in I \\ |x - y| < \delta p}} \sum_{y=1}^{p-1} \chi(x) + \frac{1}{p} \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{\substack{x \in I \\ |x - y| < \delta p}} \sum_{y=1}^{p-1} \chi(x) e\left(\frac{l(\bar{x} - y)}{p}\right) \\ &=: T_1 + T_2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

易证

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{p} \sum_{\substack{x \in I \\ |x - y| < \delta p}} \sum_{y=1}^{p-1} \chi(x) = \frac{1}{p} \sum_{t=-[\delta p]}^{[\delta p]} \sum_{\substack{x \in I \\ x - y = t}} \sum_{y=1}^{p-1} \chi(x) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{-[\delta p] \leq t < 0} \sum_{\substack{x \in I \\ x \leq p-1+t}} \chi(x) + \frac{1}{p} \sum_{0 \leq t \leq [\delta p]} \sum_{\substack{x \in I \\ x \geq t+1}} \chi(x) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{0 \leq t \leq [\delta p]} \sum_{\substack{x \in I \\ x \leq p-1-t}} \chi(x) + \frac{1}{p} \sum_{0 \leq t \leq [\delta p]} \sum_{\substack{x \in I \\ x \geq t+1}} \chi(x) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{0 \leq t \leq [\delta p]} \sum_{j=1}^J \sum_{\substack{x \in I^{(j)} \\ x \leq p-1-t}} \chi(x) + \frac{1}{p} \sum_{0 \leq t \leq [\delta p]} \sum_{j=1}^J \sum_{\substack{x \in I^{(j)} \\ x \geq t+1}} \chi(x). \end{aligned}$$

再由定理 2.1, 有

$$T_1 \ll \frac{1}{p} \sum_{0 \leq t \leq [\delta p]} J^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \log H \log p \ll J^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \log H \log p. \quad (4.2)$$

此外由三角和恒等式与指数和的性质可得

$$T_2 = \frac{1}{p} \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{j=1}^J \sum_{\substack{x \in I_1^{(j)} \\ |x - y| < \delta p}} \sum_{y=1}^{p-1} \chi(x) e\left(\frac{l(\bar{x} - y)}{p}\right) = \frac{1}{p} \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{j=1}^J \sum_{t=-[\delta p]}^{[\delta p]} \sum_{\substack{x \in I_1^{(j)} \\ x - y = t}} \sum_{y=1}^{p-1} \chi(x) e\left(\frac{l(\bar{x} - y)}{p}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2p^2} \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{j=1}^J \sum_{t=-[\delta p]}^{[\delta p]} \sum_{x \in I_1^{(j)}} \sum_{y=1}^{p-1} \chi(x) e\left(\frac{l(\bar{x}-y)}{p}\right) \sum_{a=1}^{2p} e\left(\frac{a(x-y-t)}{2p}\right) \\
&= \frac{1}{2p^2} \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{a=1}^{2p} \sum_{t=-[\delta p]}^{[\delta p]} e\left(-\frac{at}{2p}\right) \sum_{j=1}^J \sum_{x \in I_1^{(j)}} \chi(x) e\left(\frac{ax+2l\bar{x}}{2p}\right) \sum_{y=1}^{p-1} e\left(-\frac{(a+2l)y}{2p}\right) \\
&\ll \frac{1}{p} \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{j=1}^J \left| \sum_{x \in I_1^{(j)}} \chi(x) e\left(\frac{l\bar{x}}{p}\right) \right| + \frac{1}{p^2} \sum_{a=1}^{2p-1} \frac{1}{\langle \frac{a}{2p} \rangle} \sum_{\substack{l=1 \\ a+2l=2p}}^{p-1} p \cdot \sum_{j=1}^J \left| \sum_{x \in I_1^{(j)}} \chi(x) e\left(\frac{ax+2l\bar{x}}{2p}\right) \right| \\
&\quad + \frac{1}{p^2} \sum_{a=1}^{2p-1} \frac{1}{\langle \frac{a}{2p} \rangle} \sum_{\substack{l=1 \\ a+2l \neq 2p}}^{p-1} \frac{1}{\langle \frac{a+2l}{2p} \rangle} \sum_{j=1}^J \left| \sum_{x \in I_1^{(j)}} \chi(x) e\left(\frac{ax+2l\bar{x}}{2p}\right) \right|.
\end{aligned}$$

再由定理 2.1, 有

$$\begin{aligned}
T_2 &\ll \frac{1}{p} \sum_{l=1}^{p-1} J^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \log H + \frac{1}{p} \sum_{a=1}^{2p-1} \frac{1}{\langle \frac{a}{2p} \rangle} \cdot J^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \log H + \frac{1}{p^2} \sum_{a=1}^{2p-1} \frac{1}{\langle \frac{a}{2p} \rangle} \sum_{\substack{l=1 \\ a+2l \neq 2p}}^{p-1} \frac{1}{\langle \frac{a+2l}{2p} \rangle} \cdot J^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \log H \\
&\ll J^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \log H \log^2 p.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

结合 (4.1)–(4.3), 立即可得定理 1.2. $\square$

5 结论与讨论

本文考虑了短区间的并集上的 Kloosterman 和与特征和, 给出了一些估计式, 并由此研究了短区间的并集中 Woods 问题的一个推广. 经典的 Kloosterman 和与特征和在数论研究中有着广泛的应用, 因此, 本文中的方法与结论或许有助于一些数论问题的分析与推广.

致谢 作者对审稿人的评论与建议表示衷心的感谢.

参考文献

- 1 Zhang W P. On the difference between an integer and its inverse modulo n . J Number Theory, 1995, 52: 1–6
- 2 Zhang W P. On a problem of A. C. Woods. Adv Math (China), 1994, 23: 284–285
- 3 Zhang W P. Some estimates of trigonometric sums and their application. Acta Math Hungar, 1997, 76: 17–30
- 4 Pólya G. Über die Verteilung der quadratische Reste und Nichtreste. Göttingen Nachr, 1918, 1918: 21–29
- 5 Vinogradov I M. On the distribution of residues and non-residues of powers. J Phys Math Soc Perm, 1918, 1: 94–96
- 6 Burgess D A. On character sums and L -series, II. Proc Lond Math Soc (3), 1963, 13: 524–536
- 7 Burgess D A. The character sum estimate with $r = 3$. J Lond Math Soc (2), 1986, 33: 219–226
- 8 Montgomery H L, Vaughan R C. Exponential sums with multiplicative coefficients. Invent Math, 1977, 43: 69–82
- 9 Shparlinski I E. Open problems on exponential and character sums. In: Number Theory. Series on Number Theory and its Applications, vol. 6. Hackensack: World Scientific Publishing, 2010, 222–242
- 10 Xi P, Yi Y. On character sums over flat numbers. J Number Theory, 2010, 130: 1234–1240
- 11 Heath-Brown D R. Burgess's bounds for character sums. In: Number Theory and Related Fields. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vol. 43. New York: Springer-Verlag, 2013, 199–213
- 12 Shao X. Character sums over unions of intervals. Forum Math, 2015, 27: 3017–3026
- 13 Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory. New York: Springer-Verlag, 1976

- 14 Browning T D, Haynes A. Incomplete Kloosterman sums and multiplicative inverses in short intervals. *Int J Number Theory*, 2013, 9: 481–486

A generalization of Woods problem in unions of short intervals

LIU HuaNing & ZHANG ZhenZhen

Abstract In this paper, we study a generalization of Woods problem in unions of short intervals by using the estimates for incomplete Kloosterman sums, and give some asymptotic formulas. For details, let p be an odd prime, $1 \leq H \leq p$, $0 < \delta \leq 1$ be any fixed real number, and let $I^{(j)}$ be disjoint subintervals of $(0, p)$, $1 \leq j \leq J$, satisfying $\frac{H}{2} \leq |I^{(j)}| \leq H$. Define $I = \bigcup_{j=1}^J I^{(j)}$ and $A(\delta, p) = \{a \in \mathbb{Z} : 1 \leq a, \bar{a} \leq p-1, |a - \bar{a}| < \delta p\}$, where $\bar{a}$ is the multiplicative inverse of a modulo p with $a\bar{a} \equiv 1 \pmod{p}$. Let χ be the Dirichlet character modulo p . We prove

$$\sum_{\substack{x \in I \\ x \in A(\delta, p)}} 1 = \frac{1}{p} \int_0^{[\delta p]} \left(\sum_{\substack{x \in I \\ x \leq p-1-t}} 1 + \sum_{\substack{x \in I \\ x \geq t+1}} 1 \right) dt + O(J^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \log H \log^2 p),$$

and

$$\sum_{\substack{x \in I \\ x \in A(\delta, p)}} \chi(x) \ll J^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \log H \log^2 p.$$

Keywords integer and its inverse, Kloosterman sum, short interval, character

MSC(2010) 11A07, 11L40, 11L05

doi: 10.1360/N012015-00310