评述

原子核协变密度泛函理论及其应用专辑

多准粒子组态的手征转动模型

亓斌*, 贾慧

山东大学空间科学研究院, 山东大学(威海)空间科学与物理学院, 山东省光学天文与日地空间环境重点实验室, 威海 264209

* 联系人, E-mail: bqj@sdu.edu.cn

收稿日期: 2015-07-15; 接受日期: 2015-08-25; 网络出版日期: 2015-12-14

国家自然科学基金资助项目(批准号: 11405096, 1146114100)

摘要 原子核的手征转动现象近年来引起了广泛的关注. 本文将介绍两种用于分析多准粒子组态手征转动的模型, 即粒子转子模型和倾斜轴推转模型. 对于粒子转子模型, 主要介绍基矢的构造和模型的求解: 通过选取价核子单粒子态及角动量量子数的限制条件来构造严格满足 D_2 对称性的强耦合基矢; 当考虑多个价核子时, 模型的空间维数巨大, 通过 Lanczos 对角化方法来求解大规模哈密顿量矩阵. 对于倾斜轴推转模型, 分别介绍了基于对力加四极相互作用和基于壳修正方法的两种版本: 由转动参考系下的两体 Routhian 量出发给出推转的 Hartree-Fock-Bogoliubov 方程; 在内禀的主轴系中分析了三维倾斜轴转动的自治解, 此时角速度矢量与角动量期待值矢量平行. 通过总结和进一步发展两种理论模型, 将为澄清原子核手征转动研究中的种种争论奠定基础.

关键词 手征转动, 粒子转子模型, 倾斜轴推转模型, 多准粒子组态

PACS: 21.60.Ev, 21.10.Re, 23.20.Lv

1 引言

1997 年, 原子核的手征性被 Frauendorf 和 Meng 预言^[1]: 考虑一个三轴形变的原子核, 其价质子和价中子处于高 $-j$ 壳上, 分别具有粒子性和空穴性. 为了使得整个转动体系的能量最小, 粒子性的价质子、空穴性的价中子和由其余核子所组成的核芯的角动量 j_p , j_n 和 R 将分别沿原子核的三个惯性主轴排列. 三个互相垂直的角动量可以形成两种具有相反手性的体系, 即左手系和右手系, 于是本体系下发生了手征对称性

的自发破缺. 通过手征变换 $\chi = \mathcal{TR}(\pi)$ 可以使得左手系和右手系进行相互转换. 而左手系和右手系之间的量子隧穿效应, 使得能够从实验上观察到原子核的手征对称性破缺——近简并的两条 $\Delta I = 1$ 的转动带, 即手征双重带.

自从手征双重带被预言以后, 引起了各大实验室的探索热情. 2001 年在 $N = 75$ 的同中子素中观测到一系列候选的手征双重带^[2]. 随后, 在质量数 $A \sim 130$ ^[3-18]和 $A \sim 100$ ^[19-28]区报道了近 30 例候选的手征双重带, 形成两个“手征核岛”. 而在 $A \sim 190$ ^[29,30]和 $A \sim 80$ ^[31]质量区, 也各报道了一两例候选

引用格式: 亓斌, 贾慧. 多准粒子组态的手征转动模型. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2016, 46: 012014

Qi B, Jia H. Chiral rotational model with multi-quasi-particle configuration (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2016, 46: 012014, doi: 10.1360/SSPMA2015-00362

手征核, 能否形成新的“手征核岛”需要进一步的实验探索. 为了确认原子核手性的存在, 除了观测到近简并的转动带之外, 电磁跃迁性质的测量也非常重要. 2006年首先对候选手征核 ^{134}Pr 进行了能级寿命测量, 提取了电四极跃迁和磁偶极跃迁几率^[32,33], 似乎并不符合手征带所期待的电磁跃迁信号^[34]. 而随后 ^{128}Cs ^[35], ^{135}Nd ^[36] 的实验结果则非常符合手征带所期待的特征. 近期对 ^{126}Cs ^[37], ^{102}Rh ^[38] 和 ^{106}Ag ^[39,40]等核也进行了能级寿命测量. 多手征带 ($M\chi D$) 是近两年实验组关注的又一有趣现象, 这一概念最早由理论所预言^[41-44], 即在一个原子核中可能存在多对手征双重带. 在 2013 年第一个多手征带的实验证据在 ^{133}Ce ^[45] 中被报道, 2014 年在 ^{103}Rh ^[46] 中也报道了 $M\chi D$ 的证据. 关于原子核手征转动研究进展的较全面的总结可以参考文献^[47-51].

在理论研究方面, 手征双重带的最初提出, 源于倾斜轴推转模型(TAC) 近似和粒子转子模型(PRM)^[1]. 之后很多努力致力于发展这两种模型来研究实际核中的手征双重带. 此外, 相互作用玻色子模型^[32], 投影壳模型^[52] 和集体哈密顿量^[53]也用于描述原子核的手征转动. 最初采用的三维倾斜轴推转模型基于单 j 壳模型^[1], 之后发展为基于 Woods-Saxon 或 Nilsson 势场^[54,55], 或基于微观的 Skyrme Hartree Fock 模型^[56,57]. 二维倾斜轴推转的相对论平均场模型也已经成功地描述了磁转动和反磁转动等^[42,58-62], 但三维倾斜轴推转的版本仍在发展之中. 倾斜轴推转模型的优点在于能对原子核的转动现象做完全微观的描述. 但是, 平均场近似破坏了转动不变性, 因此其角动量并不是好量子数. 作为一个半经典理论, 它只能给出原子核是否存在倾斜转动, 并不能给出双带. 想要计算双带的能谱结构, 需要超越平均场, 如考虑无规相位近似等^[36]; 此外计算电磁跃迁在此模型中也采用半经典的近似处理.

作为一个量子化的模型, 粒子转子模型也广泛应用于手征双重带的理论分析. 一粒子一空穴的粒子转子模型常用于分析理想手征带的性质^[63-65]. 考虑对关联后, 准质子准中子与三轴转子耦合的模型对奇奇核的手征双重带提供了较好的描述^[35,66-69]. 但是对于奇 A 核中的手征带, 它主要建立在三准粒子组态之上, 而对于偶偶核, 可能建立基于四准粒子组

态的手征带. 为此, 2009 年文献^[70]建立了多粒子多空穴与三轴转子耦合的模型, 并用于处理涉及多个价核子组态的原子核的手征转动现象^[40,46,71-73]. 粒子转子模型中, 总角动量是好量子数. 能量和跃迁几率被完全量子化地处理. 特别地, 在整个自旋范围内, 即遍及手征振动到静态手性区域, 它可以给出双带间的能量劈裂. 不过这一模型是一个唯象的模型, 转子的形变以及价核子运动的势场是唯象给定的. 此外, 当处理多个价核子时, 基矢维数巨大, 计算耗时.

倾斜轴推转模型和粒子转子模型是目前用于分析手征转动的两种主要模型, 两者都有其各自的优缺点, 在分析原子核手征转动时需要互相补充. 本文将介绍这两种用于分析手征转动的模型. 我们将在多准粒子组态下介绍理论框架, 从而能够用于各种组态的候选手征双重带的理论分析.

2 多准粒子组态的粒子转子模型

为了描述单粒子运动和集体运动之间的相互影响, Bohr 和 Mottelson^[74] 建议考虑几个所谓的价核子, 它们在核芯的形变势场中近似独立地运动, 将价核子与代表所有剩余核子的集体转子进行耦合, 这就是粒子转子模型 (PRM). 一般地, 将 PRM 哈密顿量分为两部分:

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{coll}} + \hat{H}_{\text{intr}}. \quad (1)$$

唯象的集体部分 H_{coll} 描述惰性的核芯, 微观的内禀部分 H_{intr} 描述一个价核子或几个价核子, 乃至费米能附近整个子壳上的核子^[75].

2.1 模型基矢

为了表述方便, 这里我们考虑单- j 壳模型, 价核子的单粒子态为

$$\begin{aligned} a_{\nu}^{\dagger}|0\rangle &= \sum_{\Omega} c_{\Omega}^{(\nu)}|j, \Omega\rangle, \\ a_{\bar{\nu}}^{\dagger}|0\rangle &= \sum_{\Omega} (-1)^{j-\Omega} c_{\Omega}^{(\nu)}|j, -\Omega\rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 Ω 是单粒子角动量 $\hat{j}$ 沿 3- 轴的投影, 由于时间反演对称性的存在, Ω 取值通常为 $\dots, -7/2, -3/2, +1/2, +5/2, \dots$. 将单粒子态分成互为时间反演态的

两个子空间是必要的, 这样取值能够在构造 PRM 基矢时考虑满足 $D_2(\hat{R}_1(\pi), \hat{R}_2(\pi), \hat{R}_3(\pi))$ 对称性的形式.

于是对于具有 z 个价质子和 n 个价中子的体系, 内禀波函数为

$$|\varphi\rangle = |\varphi_p\rangle |\varphi_n\rangle \\ = \left(\prod_{i=1}^{z_1} a_{p,v_i}^\dagger \right) \left(\prod_{i=1}^{z_2} a_{p,\bar{\mu}_i}^\dagger \right) \left(\prod_{i=1}^{n_1} a_{n,v'_i}^\dagger \right) \left(\prod_{i=1}^{n_2} a_{n,\bar{\mu}'_i}^\dagger \right) |0\rangle \quad (3)$$

其中 $z_1 + z_2 = z$, $n_1 + n_2 = n$, $0 \leq z_1 \leq z$, $0 \leq n_1 \leq n$. $a_{p,v_1}^\dagger |0\rangle, \dots, a_{p,v_{z_1}}^\dagger |0\rangle, a_{p,\bar{\mu}_1}^\dagger |0\rangle, \dots, a_{p,\bar{\mu}_{z_2}}^\dagger |0\rangle$ 是从 $2j_p + 1$ 个单质子态中选取的任意的 z 个态, 中子情况类似.

我们构造强耦合基矢为

$$|IMK\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+\delta_{K0}\delta_{\varphi,\bar{\varphi}})}} \\ \times (|IMK\rangle |\varphi\rangle + (-1)^{I-K} |IM-K\rangle |\bar{\varphi}\rangle), \quad (4)$$

其中 $|\bar{\varphi}\rangle$ 为

$$|\bar{\varphi}\rangle = \hat{R}_2(\pi) |\varphi\rangle \\ = (-1)^{z_2} (-1)^{n_2} \left(\prod_{i=1}^{z_1} a_{p,\bar{v}_i}^\dagger \right) \left(\prod_{i=1}^{z_2} a_{p,\mu_i}^\dagger \right) \\ \times \left(\prod_{i=1}^{n_1} a_{n,\bar{v}'_i}^\dagger \right) \left(\prod_{i=1}^{n_2} a_{n,\mu'_i}^\dagger \right) |0\rangle \\ = (-1)^{z_2} (-1)^{z_1 z_2} \left(\prod_{i=1}^{z_2} a_{p,\mu_i}^\dagger \right) \left(\prod_{i=1}^{z_1} a_{p,\bar{v}_i}^\dagger \right) \\ \times (-1)^{n_2} (-1)^{n_1 n_2} \left(\prod_{i=1}^{n_2} a_{n,\mu'_i}^\dagger \right) \left(\prod_{i=1}^{n_1} a_{n,\bar{v}'_i}^\dagger \right) |0\rangle, \quad (5)$$

式中出现的相因子 $(-1)^{z_2}, (-1)^{n_2}$ 源自每个单粒子态转动 2π 后会出现的因子, 即

$$\hat{R}_2(\pi)^2 a_v^\dagger |0\rangle = -a_v^\dagger |0\rangle.$$

如上构造的基矢满足 $\hat{R}_2(\pi)$ 对称性, 为避免基矢被重复考虑, 需要对 z_1, z_2, n_1, n_2 的取值做限制. 进一步要求基矢满足 $\hat{R}_3(\pi)$ 对称性, 这将限制 $K - \frac{1}{2}(z_1 - z_2) - \frac{1}{2}(n_1 - n_2)$ 为偶数. 这样, 构造的基矢最终就满足了 D_2 对称性.

对于一个确定的自旋 I , 当采用单- j 壳模型描述价核子时, PRM 基矢空间的维数将是

$$C_{2j_p+1}^z C_{2j_n+1}^n (2I+1)/4. \quad (6)$$

第一个因子是从 $2j_p + 1$ 个单质子态中任意选取 z 个态的组态数目, 第二个因子来自中子态的选取. 因子 $2I+1$ 是 K 的可能取值数目, 因子 $1/4$ 来自基矢满足 D_2 对称性的限制. 当考虑较多价核子组态时, 模型基矢维数会过大. 这时, 可以采用多粒子组态能量截断方案, 即只考虑满足价核子的激发能量之和小于某一截断能量值这一条件的组态作为基矢, 以有效减少基矢维数.

2.2 模型的求解

下面在这样一组对称化的强耦合基上来构建哈密顿量矩阵. 由于选取的基矢中包含着单粒子本征态, 因此内禀部分的哈密顿量, 其非零的矩阵元只在对角项存在, 是容易给出的.

由于基矢中涉及全同的多个价质子或价中子体系, 因此对于集体部分哈密顿量

$$\hat{H}_{\text{coll}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{R}_i^2}{2\mathcal{J}_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{L}_i^2}{2\mathcal{J}_i} - \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{L}_i \hat{J}_i}{\mathcal{J}_i} + \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{J}_i^2}{2\mathcal{J}_i}, \quad (7)$$

采用二次量子化形式是方便的. 角动量 $\hat{J}_\alpha$ (代表 $\hat{J}_+, \hat{J}_-, \hat{J}_3$) 为单体算符,

$$\hat{J}_\alpha = \sum_{\tau_3} \sum_{\mu\nu} \langle \hat{J}_\alpha \rangle_{\mu\nu} a_{\tau_3,\mu}^\dagger a_{\tau_3,\nu}, \quad (8)$$

其中 τ_3 为同位旋标记, $\tau_3 = 1/2$ 代表质子, $\tau_3 = -1/2$ 代表中子. 角动量平方项 $\hat{J}_\alpha^2$ (代表 $\hat{J}_+^2, \hat{J}_-^2, \hat{J}_3^2$) 中包含单体算符和两体算符:

$$\hat{J}_\alpha^2 = \sum_{\tau_3, \tau'_3} \sum_{\mu\nu\mu'\nu'} \langle j_{\tau_3, \alpha} \rangle_{\mu\nu} a_{\tau_3,\mu}^\dagger a_{\tau_3,\nu} \langle j_{\tau'_3, \alpha} \rangle_{\mu'\nu'} a_{\tau'_3,\mu'}^\dagger a_{\tau'_3,\nu'} \\ = \sum_{\tau_3} \sum_{\mu\nu} \langle j_{\tau_3, \alpha}^2 \rangle_{\mu\nu} a_{\tau_3,\mu}^\dagger a_{\tau_3,\nu} \\ + \sum_{\tau_3 \neq \tau'_3} \sum_{\mu\nu} \langle j_{\tau_3, \alpha} \rangle_{\mu\nu} a_{\tau_3,\mu}^\dagger a_{\tau_3,\nu} \langle j_{\tau'_3, \alpha} \rangle_{\mu'\nu'} a_{\tau'_3,\mu'}^\dagger a_{\tau'_3,\nu'} \\ + 2 \sum_{\tau_3} \sum_{\nu < \nu', \mu < \mu'} (\langle j_{\tau_3, \alpha} \rangle_{\mu\nu} \langle j_{\tau_3, \alpha} \rangle_{\mu'\nu'} \\ - \langle j_{\tau_3, \alpha} \rangle_{\mu'\nu} \langle j_{\tau_3, \alpha} \rangle_{\mu\nu'}) a_{\tau_3,\mu}^\dagger a_{\tau_3,\nu} a_{\tau_3,\mu'}^\dagger a_{\tau_3,\nu'}. \quad (9)$$

由此我们可以求解哈密顿量的矩阵元. 通过求解哈密顿量矩阵, 可以得到 PRM 的波函数

$$|IM\rangle = \sum_{K\varphi} C_{K\varphi} |IMK\varphi\rangle. \quad (10)$$

在求解过程中, 需要对角化一个大规模的矩阵, 在程序中采用 Lanczos 对角化方法, 其标准化程序 LAPACK 见文献 [76], 其基本原理如下.

(1) 选择一个初始的 Lanczos 矢量 $|lanc_0\rangle$ 作为最低本征矢的零阶近似.

(2) 通过

$$|new_{p+1}\rangle = \hat{H}|lanc_p\rangle \quad (11)$$

产生一个新的矢量.

(3) 新的矢量 $|new_{p+1}\rangle$ 与前面计算的 Lanczos 矢量正交化,

$$|new'_{p+1}\rangle = |new_{p+1}\rangle - \sum_{q=0}^p |lanc_q\rangle \langle lanc_q | new_{p+1} \rangle, \quad (12)$$

然后归一化产生一个新的 Lanczos 矢量

$$|lanc_{p+1}\rangle = \alpha_{p+1} |new'_{p+1}\rangle. \quad (13)$$

(4) 在这个 Lanczos 基矢上构造哈密顿量矩阵元

$$\begin{aligned} H_{p,p} &= \langle lanc_p | H | lanc_p \rangle = \langle lanc_p | new_{p+1} \rangle \\ H_{p+1,p} &= \langle lanc_{p+1} | H | lanc_p \rangle, \end{aligned} \quad (14)$$

所有其他矩阵元则为 0.

(5) 在 p 步迭代之后, 有一个能量矩阵, 形式为

$$\begin{pmatrix} H_{0,0} & H_{0,1} & 0 & \dots & 0 \\ H_{1,0} & H_{1,1} & H_{1,2} & \dots & 0 \\ 0 & H_{2,1} & H_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & H_{p-1,p} \\ 0 & 0 & 0 & H_{p,p-1} & H_{p,p} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

p 是相对较小的数, 可以通过标准的方法对角化矩阵, 得到 p 步时的能量本征值.

(6) 重复步骤 2-5 直到第 p 步和 $p+1$ 步的能量本征值的差值小于一个设定的精度, 则认为解收敛.

通过对角化哈密顿量矩阵, 我们得到能量本征值和本征波函数. 利用波函数, 可以计算电磁跃迁几率和角动量期待值等, 具体公式见文献 [66, 70].

3 多准粒子组态的倾斜轴推转模型

推转壳模型最早由 Inglis 于 1954 年提出 [77], 后来非常成功地描述了快速转动的原子核. 最初的推转壳模型主要是沿着惯量主轴转动, 后来 Frauendorf 等人在此基础上推广到倾斜轴推转 [1, 55, 78-80], 即转动轴偏离惯量主轴. 三维倾斜轴推转模型广泛用来描述手征转动. 目前发展了两种版本的倾斜轴推转 (TAC) 模型 [78, 80]: (1) 对力加四极相互作用模型 (PQ-TAC), (2) 壳修正方法 (SCTAC).

一般来讲, PQTAC 更适合描述小形变的原子核, 而 SCTAC 更适合大形变的原子核 [80].

3.1 对力加四极相互作用模型

假定 z 轴为转动轴, 倾斜轴推转模型由两体 Routhin 量出发

$$\hat{H}' = \hat{H} - \omega \hat{J}_z. \quad (16)$$

它包含转动不变的两体哈密顿量 H 和推转项 $\omega \hat{J}_z$. 两体哈密顿量可采用对力加四极相互作用:

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{sph}} - \frac{\chi}{2} \sum_{\mu=-2}^2 \hat{Q}_{\mu}^{+} \hat{Q}_{\mu} - G \hat{P}^{+} \hat{P} - \lambda N, \quad (17)$$

其解释见文献 [75]. 在此模型中我们调节 χ 的值, 使得从中导出的平均场哈密顿量和 Nilsson 哈密顿量 [75, 81] 相一致. 球形部分哈密顿量

$$\hat{H}_{\text{sph}} = \sum_k \epsilon_k c_k^{+} c_k \quad (18)$$

与 Nilsson 哈密顿量具有同样的参数.

对力相互作用由单极对力场定义为

$$\hat{P}^{+} = \sum_{k>0} c_k^{+} c_k^{+}, \quad (19)$$

其中 $\bar{k}$ 是 k 的时间反演态. 四极相互作用由算符定义为

$$\hat{Q}_{\mu} = \sum_{kk'} \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \langle k | r^2 Y_{2\mu} | k' \rangle c_k^{+} c_{k'}, \quad (20)$$

表达式中的粒子包括质子和中子.

波函数由 Hartree-Fock-Bogoliubov(HFB) 平均场表达式 $|\rangle$ 近似表示. 忽略交换项, HFB-Routhian 变成

$$\hat{h}' = \hat{h}_{\text{sph}} - \sum_{\mu=-2}^2 (q_{\mu} \hat{Q}_{\mu}^{+} + q_{\mu}^{*} \hat{Q}_{\mu}) - \Delta(\hat{P}^{+} + \hat{P}) - \lambda \hat{N} - \omega \hat{J}_z. \quad (21)$$

这个自洽方程确定形变势 $q_{\mu} = \chi \langle \hat{Q}_{\mu} \rangle$ 和对力势 $\Delta = G \langle \hat{P} \rangle$. 化学势 λ 由标准条件 $N = \langle \hat{N} \rangle$ 决定. 准粒子算符为

$$\alpha_i^{+} = \sum_k (U_{ki} c_k^{+} + V_{ki} c_k), \quad (22)$$

遵守运动方程

$$[h', \alpha_i^{+}] = e_i' \alpha_i^{+}, \quad (23)$$

这就是决定准粒子振幅 U_{ki} 和 V_{ki} 的 HFB 本征方程^[75]. 在粒子空穴共轭下它们具有对称性, 因此, 对于每一个准粒子 i 就会有相应的共轭态 i^{+}

$$e_{i^{+}}' = -e_i', \quad U_{ki^{+}} = V_{ki}, \quad V_{ki^{+}} = U_{ki}. \quad (24)$$

准粒子的宇称是好量子数, 但是一般情况下旋称不是好量子数.

激发的准粒子组态定义为

$$|i_1, i_2, \dots\rangle = \alpha_{i_1}^{+} \alpha_{i_2}^{+} \cdots |0\rangle, \quad (25)$$

其中 $|0\rangle$ 表示准粒子真空态.

对于任意组态 $|i_1, i_2, \dots\rangle$, HFB 的一系列方程可以被求解. 对于自洽解, 总 Routhian

$$E' = \langle \hat{H}' \rangle \quad (26)$$

存在极值

$$\frac{\partial E'}{\partial q_{\mu}}|_{\omega} = 0, \quad \frac{\partial E'}{\partial \Delta}|_{\omega} = 0. \quad (27)$$

总能量作为角动量 J 的函数, 如下

$$E(J) = E'(\omega) + \omega J(\omega), \quad (28)$$

其中 $J(\omega) = \langle \hat{J}_z \rangle$. 对于自洽解, 总能量也有极值

$$\frac{\partial E}{\partial q_{\mu}}|_J = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \Delta}|_J = 0. \quad (29)$$

这个求解必须在 J 固定时进行. 对于一系列的自洽解 $|\omega\rangle$, 都遵守正则关系

$$\frac{dE'}{d\omega} = -J, \quad \frac{dE}{dJ} = \omega. \quad (30)$$

结果表明对于一个自洽解, 角速度矢量和角动量矢量必须平行.

$$\hat{\omega} \parallel \mathbf{J}. \quad (31)$$

这个结论在内禀坐标系下也成立.

倾斜轴推转模型^[80]考虑四极张量 q_{μ} 的主轴和转动轴 (z 轴) 不重合的情况, 也就是说, z 轴倾斜于主轴. 那么,

$$e^{-i\pi \hat{J}_z} |\pi, \omega\rangle \neq r |\pi, \omega\rangle \quad (32)$$

旋称不再是好量子数. 准粒子组态 $|\pi, \omega\rangle$ 描述给定宇称的 $\Delta I=1$ 的转动带,

通常在四极张量的主轴系求解 TAC 模型. 通过四极张量所满足的条件来定义内禀坐标系

$$q'_{-1} = q'_1 = 0, \quad q'_{-2} = q'_2. \quad (33)$$

主轴表示为 1, 2, 3, 在实验室系下的主轴方向由三个欧拉角 ψ, ϑ, φ 确定. 两个内禀四极矩 q'_0 和 q'_2 决定势场的形变. 实验室系下的四极矩和内禀四极矩的关系如下:

$$q_{\mu} = D_{\mu 0}^2(\psi, \vartheta, \varphi) q'_0 + (D_{\mu 2}^2(\psi, \vartheta, \varphi) + D_{\mu -2}^2(\psi, \vartheta, \varphi)) q'_2, \quad (34)$$

其中 $D_{\mu\nu}^2(\psi, \vartheta, \varphi)$ 是 Wigner D 函数^[74].

不同角度 ψ 对应于同一个内禀态, 它们是简并的. 我们选择 $\psi=0$ 的态. 用 (ϑ, φ) 表示转动轴 z 轴相对于主轴的位置. 在内禀坐标系下 HFB Routhian 为

$$\hat{h}' = \hat{h}_{\text{sph}} - q'_0 \hat{Q}'_0 - q'_2 (\hat{Q}'_2 + \hat{Q}'_{-2}) - \Delta(\hat{P}^{+} + \hat{P}) - \lambda \hat{N} - \omega (\sin \vartheta \sin \varphi \hat{J}_1 + \sin \vartheta \cos \varphi \hat{J}_2 + \cos \vartheta \hat{J}_3). \quad (35)$$

形状由两个方程

$$q'_0 = \kappa \langle \hat{Q}'_0 \rangle, \quad q'_2 = \kappa \langle \hat{Q}'_2 \rangle \quad (36)$$

和方向角 (ϑ, φ) 确定. 总 Routhian 取极值时, 角动量的期待值和角速度平行, 即

$$\begin{aligned} \vec{J} &= (\langle \hat{J}_1 \rangle, \langle \hat{J}_2 \rangle, \langle \hat{J}_3 \rangle) \parallel \omega \\ &= (\omega \sin \vartheta \sin \varphi, \omega \sin \vartheta \cos \varphi, \omega \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (37)$$

3.2 壳修正方法

另一个 TAC 版本从含 Nilsson 势的 Routhian 出发,

$$h' = \sum_{v=1}^3 \frac{(\hat{p}_v^2 + \omega_v^2 \hat{x}_v^2)}{2M} + \kappa \hat{l}_v \hat{s}_v + \mu (\hat{l}_v^2 - \langle \hat{l}_v^2 \rangle) - \Delta(\hat{P}^+ + \hat{P}) - \lambda \hat{N} - \omega(\sin \vartheta \sin \varphi J_1 + \sin \vartheta \cos \varphi J_2 + \cos \vartheta J_3). \quad (38)$$

引进拉伸的坐标系^[81], 使得矩阵元 $\langle N | J_\mu | N \pm 2 \rangle$ 可被忽略, 这是目前的 Nilsson 模型中通常采用的做法. 振荡频率由 Nilsson 形变参数 ε 和 γ 给出,

$$\omega_v = \omega_0 \left[1 - \frac{2}{3} \varepsilon \cos \left(\gamma - \frac{2\pi v}{3} \right) \right]. \quad (39)$$

将 Strutinsky 壳修正方法用于非转动系统 E_0 得到总的 Routhian. 最小化的总 Routhian 为

$$E'(\omega, \vartheta, \varphi, \varepsilon, \varepsilon_4, \gamma, \Delta, \lambda) = E_{LD}(\varepsilon, \varepsilon_4, \gamma) - \tilde{E}(\varepsilon, \varepsilon_4, \gamma) + h' + (2\Delta - G\langle P \rangle)\langle P \rangle, \quad (40)$$

其中

$$| \rangle = | \omega, \vartheta, \varphi, \varepsilon, \varepsilon_4, \gamma, \Delta, \lambda \rangle$$

是上面定义的平均场 Routhian $h'(\omega, \vartheta, \varphi, \varepsilon, \varepsilon_4, \gamma, \Delta, \lambda)$ 的一个准粒子态. 能量 $\tilde{E}$ 是由 Strutinsky 方法^[82]对单粒子的能量计算得到, 单粒子能量取为 $h'(\omega = 0, \vartheta = 0, \varphi = 0, \varepsilon, \varepsilon_4, \gamma, \Delta = 0)$ 的本征值. $E_{LD}(\varepsilon, \varepsilon_4, \gamma)$ 为液滴能量的表达式^[81].

对于给定的 $\varepsilon, \varepsilon_4, \gamma$, 由公式 (37) 来确定倾斜角. 于是可以寻找 $E'(\omega, \varepsilon, \varepsilon_4, \gamma)$ 关于形变参数的最小值. 另一方面, 也可以固定形变参数, 寻找 E' 关于倾斜角 (ϑ, φ) 的最小值.

4 结论

粒子转子模型和倾斜轴推转模型是目前研究原子核手征转动现象时应用最广泛的两种模型. 本文详细介绍了两种模型的理论框架及模型的求解. 通过发展和完善两种理论模型, 将为澄清原子核手征转动研究中的种种争论奠定基础.

参考文献

- 1 Frauendorf S, Meng J. Tilted rotation of triaxial nuclei. Nucl Phys A, 1997, 617: 131–147
- 2 Starosta K, Koike T, Chiara C J, et al. Chiral doublet structures in Odd-Odd $N=75$ isotones: Chiral vibrations. Phys Rev Lett, 2001, 86: 971–974
- 3 Yong-Nam U, Zhu S J, Sakhae M, et al. Search for the chiral doublet bands in ^{122}Cs . J Phys G, 2005, 31: B1–B6
- 4 Zhu S, Garg U, Nayak B K, et al. A composite chiral pair of rotational bands in the Odd-A nucleus ^{135}Nd . Phys Rev Lett, 2003, 91: 132501
- 5 Wang S Y, Liu Y Z, Komatsubara T, et al. Candidate chiral doublet bands in the odd-odd nucleus ^{126}Cs . Phys Rev C, 2006, 74: 017302
- 6 Starosta K, Chiara C J, Fossan D B, et al. Role of chirality in angular momentum coupling for $A \sim 130$ odd-odd triaxial nuclei: ^{132}La . Phys Rev C, 2002, 65: 044328
- 7 Simons A J, Joshi P, Jenkins D G, et al. Evidence for chiral structures in ^{130}Cs . J Phys G, 2005, 31: 541–552
- 8 Rainovski G, Paul E S, Chantler H J, et al. Planar and aplanar tilted bands in the odd-odd nucleus ^{132}Cs . J Phys G, 2003, 29: 2763
- 9 Rainovski G, Paul E S, Chantler H J, et al. Candidate chiral twin bands in the odd-odd nucleus ^{132}Cs : Exploring the limits of chirality in the mass $A \sim 130$ region. Phys Rev C, 2003, 68: 024318
- 10 Mergel E, Petrache C M, Bianco G L, et al. Candidates for chiral doublet bands in ^{136}Nd . Eur Phys J A, 2002, 15: 417–420
- 11 Li X F, Ma Y J, Liu Y Z, et al. Search for the chiral band in the $N=71$ Odd-Odd nucleus ^{126}Cs . Chin Phys Lett, 2002, 19: 1779–1781
- 12 Koike T, Starosta K, Chiara C J, et al. Systematic search of $\pi h_{11/2} \otimes \nu h_{11/2}$ chiral doublet bands and role of triaxiality in odd-odd $Z=55$ isotopes: $^{128,130,132,134}\text{Cs}$. Phys Rev C, 2003, 67: 044319
- 13 Koike T, Starosta K, Chiara C J, et al. Observation of chiral doublet bands in odd-odd $N=73$ isotones. Phys Rev C, 2001, 63: 061304(R)
- 14 Starosta K, Koike T, Chiara C J, et al. Chirality in odd-odd triaxial nuclei. Nucl Phys A, 2001, 682: 375c–386c
- 15 Hecht A A, Beausang C W, Amro H, et al. Evidence for chiral symmetry breaking in ^{140}Eu ? Phys Rev C, 2003, 68: 054310
- 16 Hecht A A, Beausang C W, Zyromski K E, et al. Evidence for chiral symmetry breaking in ^{136}Pm and ^{138}Eu ? Phys Rev C, 2001, 63: 051302(R)

- 17 Hartley D J, Riedinger L L, Riley M A, et al. Detailed spectroscopy of the chiral-twin candidate bands in ^{136}Pm . *Phys Rev C*, 2001, 64: 031304
- 18 Bark R A, Baxter A M, Byrne A P, et al. Candidate chiral band in ^{134}La . *Nucl Phys A*, 2001, 691: 577–598
- 19 Alcántara-Núñez J A, Oliveira J R B, Cybulska E W, et al. Magnetic dipole and electric quadrupole rotational structures and chirality in ^{105}Rh . *Phys Rev C*, 2004, 69: 024317
- 20 Zhu S J, Hamilton J H, Ramayya A V, et al. Soft chiral vibrations in ^{106}Mo . *Eur Phys J A*, 2005, 25: 459–462
- 21 Vaman C, Fossan D B, Koike T, et al. Chiral degeneracy in triaxial ^{104}Rh . *Phys Rev Lett*, 2004, 92: 032501
- 22 Timár J, Koike T, Pietralla N, et al. High-spin structure of ^{105}Ag : Search for chiral doublet bands. *Phys Rev C*, 2007, 76: 024307
- 23 Timár J, Vaman C, Starosta K, et al. Role of the core in degeneracy of chiral candidate band doubling: ^{103}Rh . *Phys Rev C*, 2006, 73: 011301(R)
- 24 Timár J, Joshi P, Starosta K, et al. Experimental evidence for chirality in the odd-A ^{105}Rh . *Phys Lett B*, 2004, 598: 178–187
- 25 Joshi P, Carpenter M P, Fossan D B, et al. Effect of γ softness on the stability of chiral geometry: Spectroscopy of ^{106}Ag . *Phys Rev Lett*, 2007, 98: 102501
- 26 Joshi P, Wilkinson A R, Koike T, et al. First evidence for chirality in Tc isotopes: Spectroscopy of ^{100}Tc . *Eur Phys J A*, 2005, 24: 23–29
- 27 Joshi P, Jenkins D G, Raddon P M, et al. Stability of chiral geometry in the odd-odd Rh isotopes: Spectroscopy of ^{106}Rh . *Phys Lett B*, 2004, 595: 135–142
- 28 He C Y, Zhu L H, Wu X G, et al. Experimental study on chirality in ^{106}Ag . *High Energy Phys Nucl Phys*, 2006, 30: 166–168
- 29 Lawrie E A, Vymers P A, Lawrie J J, et al. Possible chirality in the doubly-odd ^{198}Tl nucleus: Residual interaction at play. *Phys Rev C*, 2008, 78: 021305(R)
- 30 Balabanski D L, Danchev M, Hartley D J, et al. Possible assignment of chiral twin bands in ^{188}Ir . *Phys Rev C*, 2004, 70: 044305
- 31 Wang S Y, Qi B, Liu L, et al. The first candidate for chiral nuclei in the $A \sim 80$ mass region: ^{80}Br . *Phys Lett B*, 2011, 703: 40–45
- 32 Tonev D, de Angelis G, Petkov P, et al. Transition probabilities in ^{134}Pr : A test for chirality in nuclear systems. *Phys Rev Lett*, 2006, 96: 052501
- 33 Tonev D, de Angelis G, Brant S, et al. Question of dynamic chirality in nuclei: The case of ^{134}Pr . *Phys Rev C*, 2007, 76: 044313
- 34 Petrache C M, Hagemann G B, Hamamoto I, et al. Risk of misinterpretation of nearly degenerate pair bands as chiral partners in nuclei. *Phys Rev Lett*, 2006, 96: 112502
- 35 Grodner E, Srebrny J, Pasternak A A, et al. ^{128}Cs as the best example revealing chiral symmetry breaking. *Phys Rev Lett*, 2006, 97: 172501
- 36 Mukhopadhyay S, Alameh D, Garg U, et al. From chiral vibration to static chirality in ^{135}Nd . *Phys Rev Lett*, 2007, 99: 172501
- 37 Grodner E, Sankowska I, Morek T, et al. Partner bands of ^{126}Cs — first observation of chiral electromagnetic selection rules. *Phys Lett B*, 2011, 703: 46–50
- 38 Tonev D, Yavahchova M S, Goutev N, et al. Candidates for twin chiral bands in ^{102}Rh . *Phys Rev Lett*, 2014, 112: 052501
- 39 Rather N, Datta P, Chattopadhyay S, et al. Exploring the origin of degenerate doublet bands in ^{106}Ag . *Phys Rev Lett*, 2014, 112: 202503
- 40 Lieder E O, Lieder R M, Bark R A, et al. Resolution of chiral conundrum in ^{106}Ag : Doppler-shift lifetime investigation. *Phys Rev Lett*, 2014, 112: 202502
- 41 Meng J, Peng J, Zhang S Q, et al. Possible existence of multiple chiral doublets in ^{106}Rh . *Phys Rev C*, 2006, 73: 037303
- 42 Peng J, Sagawa H, Zhang S Q, et al. Search for multiple chiral doublets in rhodium isotopes. *Phys Rev C*, 2008, 77: 024309
- 43 Yao J M, Qi B, Zhang S Q, et al. Candidate $M\chi D$ nucleus ^{106}Rh in triaxial relativistic mean-field approach with time-odd fields. *Phys Rev C*, 2009, 79: 067302
- 44 Li J, Zhang S Q, Meng J. Multiple chiral doublet candidate nucleus ^{105}Rh in a relativistic mean-field approach. *Phys Rev C*, 2011, 83: 037301
- 45 Ayangeakaa A D, Garg U, Anthony M D, et al. Evidence for multiple chiral doublet bands in ^{133}Ce . *Phys Rev Lett*, 2013, 110: 172504
- 46 Kuti I, Chen Q B, Timár J, et al. Multiple chiral doublet bands of identical configuration in ^{103}Rh . *Phys Rev Lett*, 2014, 113: 032501
- 47 Meng J. Is there chirality in atomic nuclei? *Physics*, 2009, 38: 108–112 [孟杰. 原子核是否存在手性. *物理*, 2009, 38: 108–112]
- 48 Meng J, Qi B, Zhang S Q, et al. Chiral symmetry in atomic nuclei. *Mod Phys Lett A*, 2008, 23: 2560–2567
- 49 Meng J. New aspects of chiral symmetry breaking in atomic nucleus. *J Phys-Conf Ser*, 2010, 205: 012030
- 50 Meng J, Zhang S Q. Open problems in understanding the nuclear chirality. *J Phys G-Nucl Part Phys*, 2010, 37: 064025
- 51 Meng J, Chen Q B, Zhang S Q. Chirality in atomic nuclei. *Int J Modern Phys E-Nucl Phys*, 2014, 23: 11: 1430016
- 52 Dar W A, Sheikh J A, Bhat G H, et al. Microscopic study of doublet bands in odd-odd $A \sim 100$ nuclei. *Nucl Phys A*, 2015, 933: 123–134
- 53 Chen Q B, Zhang S Q, Zhao P W, et al. Collective Hamiltonian for chiral modes. *Phys Rev C*, 2013, 87: 024314
- 54 Dimitrov V I, Frauendorf S, Dönauf F. Chirality of nuclear rotation. *Phys Rev Lett*, 2000, 84: 5732

- 55 Frauendorf S. Spontaneous symmetry breaking in rotating nuclei. *Rev Mod Phys*, 2001, 73: 463
- 56 Olbratowski P, Dobazewski J, Dudek J, et al. Critical frequency in nuclear chiral rotation. *Phys Rev Lett*, 2004, 93: 052501
- 57 Olbratowski P, Dobazewski J, Dudek J. Search for the Skyrme-Hartree-Fock solutions for chiral rotation in $N = 75$ isotones. *Phys Rev C*, 2006, 73: 054308
- 58 Zhao P W, Zhang S Q, Peng J, et al. Novel structure for magnetic rotation bands in ^{60}Ni . *Phys Lett B*, 2011, 699: 181–186
- 59 Zhao P W, Peng J, Liang H Z, et al. Antimagnetic rotation band in nuclei: A microscopic description. *Phys Rev Lett*, 2011, 107: 122501
- 60 Zhao P W, Peng J, Liang H Z, et al. Covariant density functional theory for antimagnetic rotation. *Phys Rev C*, 2012, 85: 054310
- 61 Zhang P, Qi B, Wang S Y. Competition between antimagnetic and core rotation in ^{109}Cd within covariant density functional theory. *Phys Rev C*, 2014, 89: 047302
- 62 Peng J, Zhao P W. Magnetic and antimagnetic rotation in ^{110}Cd within tilted axis cranking relativistic mean-field theory. *Phys Rev C*, 2015, 91: 044329
- 63 Peng J, Meng J, Zhang S Q. Description of chiral doublets in $A \sim 130$ nuclei and the possible chiral doublets in $A \sim 100$ nuclei. *Phys Rev C*, 2003, 68: 044324
- 64 Koike T, Starosta K, Hamamoto I. Chiral bands, dynamical spontaneous symmetry breaking, and the selection rule for electromagnetic transitions in the chiral geometry. *Phys Rev Lett*, 2004, 93: 172502
- 65 Qi B, Zhang S Q, Wang S Y, et al. Examining $B(M1)$ staggering as a fingerprint for chiral doublet bands. *Phys Rev C*, 2009, 79: 041302(R)
- 66 Zhang S Q, Qi B, Wang S Y, et al. Chiral bands for a quasi-proton and quasi-neutron coupled with a triaxial rotor. *Phys Rev C*, 2007, 75: 044307
- 67 Wang S Y, Qi B, Sun D P. Theoretical study of positive-parity doublet bands in ^{124}Cs . *Phys Rev C*, 2010, 82: 027303
- 68 Wang S Y, Zhang S Q, Qi B, et al. Description of $\pi g_{9/2} \otimes \nu h_{11/2}$ doublet bands in ^{106}Rh . *Phys Rev C*, 2008, 77: 034314
- 69 Wang S Y, Zhang S Q, Qi B, et al. Doublet bands in ^{126}Cs in the triaxial rotor model coupled with two quasiparticles. *Phys Rev C*, 2007, 75: 024309
- 70 Qi B, Zhang S Q, Meng J, et al. Chirality in odd-A nucleus ^{135}Nd in particle rotor model. *Phys Lett B*, 2009, 675: 175
- 71 Qi B, Zhang S Q, Wang S Y, et al. Chirality in odd-A Rh isotopes within the triaxial particle rotor model. *Phys Rev C*, 2011, 83: 034303
- 72 Qi B, Jia H, Zhang N B, et al. Possible multiple chiral doublet bands in ^{107}Ag . *Phys Rev C*, 2013, 88: 027302
- 73 Ayangeakaa A D, Garg U, Anthony M D, et al. Evidence for multiple chiral doublet bands in ^{133}Ce . *Phys Rev Lett*, 2013, 110: 172504
- 74 Bohr A, Mottelson B. *Nuclear Structure*. New York: Benjamin, 1975
- 75 Ring P, Shuck P. *The Nuclear Many-body Problem*. New York: Springer-Verlag, 1980
- 76 Anderson E, Bai Z, Bischof C, et al. *LAPACK Users' Guide*. Philadelphia: SIAM, 1995
- 77 Inglis D R. Particle derivation of nuclear rotation properties associated with a surface wave. *Phys Rev*, 1954, 98: 1059
- 78 Frauendorf S. Tilted cranking. *Nucl Phys A*, 1993, 557: 259c–276c
- 79 Dönau F, Frauendorf S, Vogel O, et al. Tilted four-quasiparticle bands in even-even Xe and Ba nuclei. *Nucl Phys A*, 1995, 584: 241–255
- 80 Frauendorf S. Description of multi-quasiparticle bands by the tilted axis cranking model. *Nucl Phys A*, 2000, 677: 115–170
- 81 Nilsson S G, Ragnarsson I. *Shapes and Shells in Nuclear Structure*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- 82 Strutinsky V M. Shell effects in nuclear masses and deformation energies. *Nucl Phys A*, 1967, 95: 420–422

Chiral rotational models with multi-quasiparticle configuration

QI Bin* & JIA Hui

*Shandong Provincial Key Laboratory of Optical Astronomy and Solar-Terrestrial Environment, School of Space Science and Physics, and
Institute of Space Sciences, Shandong University, Weihai 264209, China*

The chiral rotation in atomic nuclei has attracted significant attention in recent years. This paper introduces the particle rotor model and the tilted axis cranking model, which are used to analyze the chiral rotation with multi-quasiparticle configuration. For the particle rotor model, the basis space and the method to solve the model are discussed in detail: by considering the single-particle states of valence nucleons and the selection rule of angular momentum, one can construct the strong coupling basis which is symmetrized under the point group D_2 ; the dimension of the basis space will be very large when several valence nucleons are included, thus the Lanczos method is adopted to diagonalize the large scale hamiltonian matrix. For the tilted axis cranking model, two versions based on the pairing plus quadrupole model and the shell correction method are introduced respectively: the cranking Hartree-Fock-Bogoliubov equations are given starting with the two-body Routhian; the 3-dimensional tilted axis cranking solutions are discussed in the intrinsic principal axes frame, and the vector of the angular velocity is parallel with the vector of the expectation values of the angular momentum components when the self-consistent solution is obtained. By summarizing and developing further the two models, it will be helpful to clarify the debates in the understanding of the nuclear chiral rotation.

chiral rotation, particle rotor model, tilted axis cranking model, multi-quasiparticle configuration

PACS: 21.60.Ev, 21.10.Re, 23.20.Lv

doi: 10.1360/SSPMA2015-00362