标准特征值问题扰动分析的精确方法

邱志平*, 姜南

北京航空航天大学航空科学与工程学院固体力学研究所, 北京 100191

* 联系人, E-mail: zpqi@buaa.edu.cn

2016-11-09 收稿, 2017-03-24 修回, 2017-03-27 接受, 2017-06-15 网络版发表

国家自然科学基金(11372025, 11432002)、国防基础科研计划基金(JCKY2013601B001, JCKY2016204B101, JCKY2016601B001)、科技部民用飞机专项(MJ-F-2012-04)、国家重点研发计划(2016YFB0200704)和高等学校学科创新引智计划(B07009)资助

摘要 在扰动量存在的情况下, 准确计算特征值的扰动量是确保结构安全性的重要问题. 针对标准特征值问题扰动分析提出了一种精确方法, 能够高效地计算特征值扰动量的准确值, 克服了矩阵摄动级数展开法忽略高阶项导致的计算精度不足的缺点. 提出的方法推导得到了标准特征值问题扰动分析求解方程. 求解方程推导过程中没有经过近似处理, 将求解标称系统标准特征值问题方程得到的特征值标称值代入, 就能求得特征值扰动量的准确值, 从而能够有效满足高精度和高效率要求. 3个数值算例分别对所提出的精确方法进行了验证, 与矩阵摄动级数展开法的计算结果相比, 能够准确高效地计算特征值的扰动量, 具有精确和高效的双重优势.

关键词 标准特征值问题, 摄动理论, 精确方法, 扰动分析, 实特征值, 摄动级数展开法

随着科学技术的飞速发展, 工程结构系统变得越来越复杂^[1]. 同时, 对结构系统的要求也越来越高, 即要有更高的可靠性和鲁棒性, 又要降低成本和风险. 在工程问题中, 受装配、测量、操作条件、环境等因素的影响, 结构参数经常会发生改变. 通常而言, 当结构参数发生变化时, 工程结构的设计过程是一个迭代修正过程^[2,3]. 在工程结构设计中, 为了取得最优的设计方案, 需要多次修改方案, 而经典方法是每修改一次方案就要求解一次特征值问题^[4]. 对于无阻尼系统来说, 特征值问题的解是实数. 因而, 当系统存在扰动量或修正项时, 求解实特征值扰动问题显得尤为重要.

作为能够解决结构动态设计修正中的两个基本问题(快速灵敏度分析和快速结构重分析)的有力工具^[5,6], 矩阵摄动理论主要研究在结构参数变化小的情况下结构固有特性和响应特性的变化情况, 具有重要的学术价值和工程背景. 作为矩阵摄动理论的

一部分, 特征值摄动理论研究矩阵参数受到小扰动时特征值的变化范围. 在扰动量存在的情况下, 准确计算特征值的扰动量是确保结构安全性的重要问题. 因此, 发展建立高效的扰动参数特征值问题的精确方法具有重要的理论和工程意义.

在早些年, 特征值摄动理论由于其计算效率高、耗时少的突出特点, 吸引了众多研究人员的关注, 被应用于求解各种不同问题, 并在许多书籍^[7,8]和研究论文^[9-12]中均有介绍.

20世纪末至21世纪初, 对特征值摄动理论的研究进入了一个高潮, 发展迅猛. 陈塑寰^[5]用摄动级数展开法将刚度矩阵和质量矩阵展开计算孤立特征值的第一阶和第二阶特征值扰动量. 文献[13]提出了一种计算连续系统扰动特征值的方法, 通过将其转化为一般边界值问题模型, 提高了计算精度. Chen等人^[14]基于第一阶摄动方法和瑞利商, 建立了一种新的特征值问题求解方法, 精度与文献[13]相比得以提

引用格式: 邱志平, 姜南. 标准特征值问题扰动分析的精确方法. 科学通报, 2017, 62: 3400-3408

Qiu Z P, Jiang N. An exact solution method for perturbation analysis of standard eigenvalue problems (in Chinese). Chin Sci Bull, 2017, 62: 3400-3408, doi: 10.1360/N972016-01254

高。随后,一种考虑大刚度轻质量结构的扰动特征值分析方法被提出^[15],仅通过第一阶摄动也能得到特征值和特征向量较好的扰动量计算结果。在文献[16]中,摄动理论被应用于求解小扰动广义特征值及其相应标准特征值问题第一阶特征值扰动量的近似值计算结果,并对比分析了两者结果不同的原因。Yang等人^[17]将Pade逼近方法应用到矩阵摄动理论中,提高了特征值的精度。文献[18]在扰动分析中引入瑞利商,扰动特征值的精度与经典方法相比有所提高。文献[19]使用特征值摄动理论求解结构动力学的各种不同问题,并用数值算例证明了方法的良好精度。

以上摄动方法都是基于幂级数展开忽略高阶项计算的,都是近似解法。这些方法有一个固有的缺点,那就是在计算过程中忽略高阶项可能会导致不可预知的结果,从而对精度造成影响^[20,21]。目前,考虑所有项显著提高精度的方法主要有迭代算法^[22]和分步摄动法^[23]。文献[22]提出了一种针对存在大扰动设计变量的非线性特征值扰动问题方程的高精度求解方法。在所提方法中,考虑了摄动展开的所有项,通过迭代算法求得高精度结果。Lü等人^[23]研究了提高扰动特征值问题分析计算精度的方法,提出了一种高精度分步摄动法。这两种方法虽然能显著提高精度,但是大大增加了计算量,并不适用于复杂结构计算分析。

到目前为止,特征值摄动理论在结构动态修正^[24]、鲁棒控制^[25]、故障诊断^[26,27]等领域都有着广泛的应用,并且已经推广至含不确定性的结构分析中^[28~30]。然而,绝大多数求解方法都是基于幂级数展开忽略高阶项计算的近似解法。计算精度可以通过考虑更高阶项来提高,但往往会显著提高计算成本。这种一直存在着的准确性与高效性之间的矛盾也使得这部分研究近几年近乎进入瓶颈期。

本文针对标准特征值问题扰动分析给出了一种精确、高效的方法,克服了矩阵摄动级数展开法由于忽略高阶项导致计算精度不足的缺点。通过求解无近似处理的标准特征值问题扰动分析求解方程可以高效得到特征值扰动量的准确值,从而确保结构设计与分析的安全性。

1 精确方法

考虑标准特征值问题

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad (1)$$

式中, $\mathbf{A}$ 是一个 n 阶方阵, λ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值, $\mathbf{x}$ 表示特征值 λ 对应的特征向量。

当矩阵元素存在扰动时,矩阵 $\mathbf{A}$ 可以表示成标称部分和扰动部分之和,即

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_r, \quad (2)$$

式中, $\mathbf{A}_0$ 和 $\mathbf{A}_r$ 分别表示矩阵 $\mathbf{A}$ 的标称部分和扰动部分。

类似地,矩阵特征值和特征向量也可以分解成标称部分和扰动部分之和,即

$$\lambda^{(i)} = \lambda_0^{(i)} + \lambda_r^{(i)}, \quad \mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}_0^{(i)} + \mathbf{x}_r^{(i)}, \quad (3)$$

式中, $\lambda_0^{(i)}$ 和 $\mathbf{x}_0^{(i)}$ 分别是标称系统第 i 阶特征值及其对应的特征向量, $\lambda_r^{(i)}$ 和 $\mathbf{x}_r^{(i)}$ 分别是 $\lambda_0^{(i)}$ 和 $\mathbf{x}_0^{(i)}$ 的扰动部分, $i=1,2,\dots,n$ 。

标称矩阵的标准特征值问题可以表示为

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}_0^{(i)} = \lambda_0^{(i)}\mathbf{x}_0^{(i)}. \quad (4)$$

假定特征值 $\lambda_0^{(i)}, i=1,2,\dots,n$ 全部为孤立特征值,特征向量 $\mathbf{x}_0^{(i)}, i=1,2,\dots,n$ 满足如下正交性条件:

$$\mathbf{x}_0^{(i)\mathrm{T}}\mathbf{A}_0\mathbf{x}_0^{(s)} = \delta_{is}\lambda_0^{(s)}, \quad (5)$$

$$\mathbf{x}_0^{(i)\mathrm{T}}\mathbf{x}_0^{(s)} = \delta_{is}, \quad (6)$$

式中 δ_{is} 是克罗内克函数,即

$$\delta_{is} = \begin{cases} 0, & i \neq s, \\ 1, & i = s. \end{cases} \quad (7)$$

当矩阵 $\mathbf{A}_0$ 已知时,求解式(4)可以得到标称系统特征值 $\lambda_0^{(i)}$ 。

将式(2)和(3)代入式(1),可得扰动矩阵的标准特征值问题方程

$$(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_r)(\mathbf{x}_0^{(i)} + \mathbf{x}_r^{(i)}) = (\lambda_0^{(i)} + \lambda_r^{(i)})(\mathbf{x}_0^{(i)} + \mathbf{x}_r^{(i)}), \quad (8)$$

令

$$\mathbf{y}^{(i)} = \mathbf{x}_0^{(i)} + \mathbf{x}_r^{(i)}, \quad (9)$$

式(8)可表示为

$$(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_r)\mathbf{y}^{(i)} = (\lambda_0^{(i)} + \lambda_r^{(i)})\mathbf{y}^{(i)}, \quad (10)$$

将式(10)右边展开为

$$(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_r)\mathbf{y}^{(i)} = \lambda_0^{(i)}\mathbf{y}^{(i)} + \lambda_r^{(i)}\mathbf{y}^{(i)}, \quad (11)$$

整理式(11),可得

$$(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_r - \lambda_0^{(i)}\mathbf{I})\mathbf{y}^{(i)} = \lambda_r^{(i)}\mathbf{y}^{(i)}, \quad (12)$$

上式即为标准特征值问题扰动分析求解方程。求解式(12)可以得到特征值扰动量的准确值。

本方法共需2次特征值求解运算、 n^2+n 次加法运算和 n 次乘法运算,无需求解特征向量。其中,特征值求解运算所需加法运算和乘法运算次数与求解方法有关。

2 矩阵摄动级数展开法

陈塑寰^[5,6]提出的矩阵摄动级数展开法具体如下:
扰动矩阵 $\mathbf{A}$ 表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \varepsilon \mathbf{A}_r, \quad (13)$$

式中, ε 是一个小参数, $\mathbf{A}_0$ 表示标称系统, $\varepsilon \mathbf{A}_r$ 表示其扰动量, 并且当 $\varepsilon \mathbf{A}_r \rightarrow 0$ 时, $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_0$.

在这种情况下, 当 $\varepsilon \mathbf{A}_r$ 很小时, 特征值和特征向量都只有小变化.

根据摄动理论, 可将特征值 λ 和特征向量 $\mathbf{x}$ 按小参数 ε 展开为幂级数, 即

$$\lambda^{(i)} = \lambda_0^{(i)} + \varepsilon \lambda_1^{(i)} + \varepsilon^2 \lambda_2^{(i)} + \cdots, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \quad (14)$$

$$\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}_0^{(i)} + \varepsilon \mathbf{x}_1^{(i)} + \varepsilon^2 \mathbf{x}_2^{(i)} + \cdots, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \quad (15)$$

式中, $\lambda_0^{(i)}$ 是标称系统的第 i 阶特征值, $\lambda_1^{(i)}$ 和 $\lambda_2^{(i)}$ 分别是第 i 阶特征值的一阶扰动量和二阶扰动量; $\mathbf{x}_0^{(i)}$ 是标称系统的第 i 阶特征值对应的特征向量, $\mathbf{x}_1^{(i)}$ 和 $\mathbf{x}_2^{(i)}$ 分别是第 i 阶特征值对应的特征向量的一阶扰动量和二阶扰动量.

将式(13)~(15)代入式(1), 得

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A}_0 + \varepsilon \mathbf{A}_r)(\mathbf{x}_0^{(i)} + \varepsilon \mathbf{x}_1^{(i)} + \varepsilon^2 \mathbf{x}_2^{(i)}) \\ &= (\lambda_0^{(i)} + \varepsilon \lambda_1^{(i)} + \varepsilon^2 \lambda_2^{(i)})(\mathbf{x}_0^{(i)} + \varepsilon \mathbf{x}_1^{(i)} + \varepsilon^2 \mathbf{x}_2^{(i)}), \end{aligned} \quad (16)$$

将式(16)展开并略去 $o(\varepsilon^3)$ 项, 比较 ε 的同次幂系数, 可得

$$\varepsilon^0: \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_0^{(i)} = \lambda_0^{(i)} \mathbf{x}_0^{(i)}, \quad (17)$$

$$\varepsilon^1: \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_1^{(i)} + \mathbf{A}_r \mathbf{x}_0^{(i)} = \lambda_0^{(i)} \mathbf{x}_1^{(i)} + \lambda_1^{(i)} \mathbf{x}_0^{(i)}, \quad (18)$$

$$\varepsilon^2: \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_2^{(i)} + \mathbf{A}_r \mathbf{x}_1^{(i)} = \lambda_0^{(i)} \mathbf{x}_2^{(i)} + \lambda_1^{(i)} \mathbf{x}_1^{(i)} + \lambda_2^{(i)} \mathbf{x}_0^{(i)}. \quad (19)$$

根据展开定理, 将 $\mathbf{x}_1^{(i)}$ 按标称系统的特征向量 $\mathbf{x}_0^{(s)}$ 展开

$$\mathbf{x}_1^{(i)} = \sum_{s=1}^n C_s^{(1)} \mathbf{x}_0^{(s)}, \quad (20)$$

式中, $C_s^{(1)}$ 是未知展开系数.

将式(20)代入式(18), 得

$$\mathbf{A}_0 \sum_{s=1}^n C_s^{(1)} \mathbf{x}_0^{(s)} + \mathbf{A}_r \mathbf{x}_0^{(i)} = \lambda_0^{(i)} \sum_{s=1}^n C_s^{(1)} \mathbf{x}_0^{(s)} + \lambda_1^{(i)} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_0^{(i)}, \quad (21)$$

上式两边分别左乘 $\mathbf{x}_0^{(s)T}$, 得

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^n C_s^{(1)} \mathbf{x}_0^{(s)T} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_0^{(s)} + \mathbf{x}_0^{(s)T} \mathbf{A}_r \mathbf{x}_0^{(i)} \\ &= \lambda_0^{(i)} \sum_{s=1}^n C_s^{(1)} \mathbf{x}_0^{(s)T} \mathbf{x}_0^{(s)} + \lambda_1^{(i)} \mathbf{x}_0^{(s)T} \mathbf{x}_0^{(i)}. \end{aligned} \quad (22)$$

标称系统特征向量的正交性条件如下:

$$\mathbf{x}_0^{(i)T} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_0^{(s)} = \delta_{is} \lambda_0^{(s)}, \quad (23)$$

$$\mathbf{x}_0^{(i)T} \mathbf{x}_0^{(s)} = \delta_{is}. \quad (24)$$

将式(23)和(24)代入式(22), 可得

$$C_s^{(1)} \lambda_0^{(s)} + \mathbf{x}_0^{(s)T} \mathbf{A}_r \mathbf{x}_0^{(i)} = C_s^{(1)} \lambda_0^{(i)} + \lambda_1^{(i)} \delta_{is}. \quad (25)$$

整理式(25), 可得

$$C_s^{(1)} (\lambda_0^{(i)} - \lambda_0^{(s)}) + \lambda_1^{(i)} \delta_{is} = \mathbf{x}_0^{(s)T} \mathbf{A}_r \mathbf{x}_0^{(i)}. \quad (26)$$

当 $i=s$ 时, $\lambda_0^{(i)} = \lambda_0^{(s)}$, 由式(26)可得

$$\lambda_1^{(i)} = \mathbf{x}_0^{(i)T} \mathbf{A}_r \mathbf{x}_0^{(i)}. \quad (27)$$

当 $i \neq s$ 时, $\delta_{is} = 0$, 由式(26)可得

$$C_s^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(s)T} \mathbf{A}_r \mathbf{x}_0^{(i)} / (\lambda_0^{(i)} - \lambda_0^{(s)}). \quad (28)$$

根据式(27), 只要知道标称系统的特征向量 $\mathbf{x}_0^{(i)}$ 就可计算出 $\lambda_1^{(i)}$.

一阶摄动法仅适用于结构参数变化很小的情况. 当结构参数变化较大时, 便得不到必要的精度, 需要用二阶甚至高阶摄动才能得到足够的精度.

根据展开定理, 将特征向量的二阶摄动 $\mathbf{x}_2^{(i)}$ 按标称系统的特征向量 $\mathbf{x}_0^{(s)}$ 展开

$$\mathbf{x}_2^{(i)} = \sum_{s=1}^n C_s^{(2)} \mathbf{x}_0^{(s)}, \quad (29)$$

式中, $C_s^{(2)}$ 同样是未知展开系数.

将式(29)代入式(19)中, 得

$$\mathbf{A}_0 \sum_{s=1}^n C_s^{(2)} \mathbf{x}_0^{(s)} + \mathbf{A}_r \mathbf{x}_1^{(i)} = \lambda_0^{(i)} \sum_{s=1}^n C_s^{(2)} \mathbf{x}_0^{(s)} + \lambda_1^{(i)} \mathbf{x}_1^{(i)} + \lambda_2^{(i)} \mathbf{x}_0^{(i)}. \quad (30)$$

与一阶扰动求解过程相仿, 可得二阶扰动如下:

$$\lambda_2^{(i)} = \mathbf{x}_0^{(i)T} \mathbf{A}_r \mathbf{x}_1^{(i)} - \lambda_1^{(i)} \mathbf{x}_0^{(i)T} \mathbf{x}_1^{(i)}. \quad (31)$$

类似地, 可进而得到三阶扰动和四阶扰动

$$\lambda_3^{(i)} = \mathbf{x}_0^{(i)T} \mathbf{A}_r \mathbf{x}_2^{(i)} - \lambda_1^{(i)} \mathbf{x}_0^{(i)T} \mathbf{x}_2^{(i)} - \lambda_2^{(i)} \mathbf{x}_0^{(i)T} \mathbf{x}_1^{(i)}, \quad (32)$$

$$\lambda_4^{(i)} = \mathbf{x}_0^{(i)T} \mathbf{A}_r \mathbf{x}_3^{(i)} - \lambda_1^{(i)} \mathbf{x}_0^{(i)T} \mathbf{x}_3^{(i)} - \lambda_2^{(i)} \mathbf{x}_0^{(i)T} \mathbf{x}_2^{(i)} - \lambda_3^{(i)} \mathbf{x}_0^{(i)T} \mathbf{x}_1^{(i)}. \quad (33)$$

综上, 矩阵摄动级数展开法的特征值扰动量可表示为

$$\lambda_r^{(i)} = \varepsilon \lambda_1^{(i)} + \varepsilon^2 \lambda_2^{(i)} + \cdots, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \quad (34)$$

矩阵摄动级数展开法所需运算次数分别为: 一阶摄动法共需1次特征向量求解运算、 $n^3 - n$ 次加法运算和 $n^3 + n^2$ 次乘法运算; 二阶摄动法共需1次特征值和特征向量求解运算、 $n^4 + 2n^3 - n^2 - n$ 次加法运算和 $n^4 + 3n^3 + 3n^2 - n$ 次乘法运算; 三阶摄动法共需1次特征值和特征向量求解运算、 $2n^4 + 4n^3 - 2n^2 - 2n + 1$ 次加法运算和 $2n^4 + 7n^3 + 5n^2 - 2n$ 次乘法运算; 四阶摄动法共需1次特征值和特征向量求解运算、 $3n^4 + 7n^3 - 3n^2 - n + 2$ 次加法运算和 $3n^4 + 13n^3 + 7n^2$

$-3n$ 次乘法运算. 其中, 特征值和特征向量求解运算所需加法运算和乘法运算次数与求解方法有关. 本文精确方法与矩阵摄动级数展开法相比, 尤其是与高阶摄动法相比, 加法运算次数和乘法运算次数都大大减少, 能够明显提高计算效率.

3 数值算例

3.1 无阻尼弹簧质量系统

考虑如图1所示具有单位质量而弹簧刚度系数有扰动的无阻尼弹簧质量系统.

弹簧质量系统标称刚度矩阵为

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

弹簧 k_1, k_5 存在扰动, 扰动刚度矩阵为

$$\mathbf{A}_r = 10\% \times \text{diag}([1, 0, 0, 0, -1]). \quad (36)$$

由本文精确方法和前四阶矩阵摄动级数展开法计算得到的特征值的标称值和扰动量及其计算时间见表1. 其中, λ_{0E} 和 λ_{0M} 分别是由本文精确方法和前四阶矩阵摄动级数展开法计算得到的特征值的标称值, λ_{rE} 是由本文精确方法计算得到的特征值的扰动量, $\lambda_{r1}, \lambda_{r2}, \lambda_{r3}, \lambda_{r4}$ 分别是由前四阶矩阵摄动级数展开法计算得到的特征值的扰动量. 为方便比较, 将本文精确方法求得的计算结果作为参考值, 分别按下式计算前四阶摄动级数展开法求得的特征值扰动量的计算误差, 并列入表. 计算误差的计算公式为

$$\text{计算误差}(i) = \frac{\lambda_{ri} - \lambda_{rE}}{\lambda_{rE}} \times 100\%, i = 1, 2, 3, 4. \quad (37)$$

从计算结果可知, 由本文精确方法和摄动级数展开法计算得到的特征值的标称值相同. 低阶摄动级数展开法计算得到的特征值的扰动量与本文精确方法误差较大, 但随着阶数的升高, 扰动量越来越接近本文精确方法的计算结果. 由于摄动级数展开法计算精度随着阶数增加而提高, 本文方法的准确性从而得以证明. 此外, 本文精确方法计算时间短, 计算效率高, 而高阶摄动级数展开法尽管计算精度较高, 但计算时间较长, 四阶展开计算时间已是本文精确方法计算时间的10倍. 因此, 与矩阵摄动级数展开法相比, 本文精确方法具有准确、高效的优势.

为进一步研究本文精确方法中参数扰动程度对结果精度的影响, 引入扰动变量 γ 描述刚度矩阵的扰动程度, 即

$$\mathbf{A}_r = \gamma \times \text{diag}([1, 0, 0, 0, -1]). \quad (38)$$

在此将第一阶和第五阶特征值作为例证研究参数扰动程度对结果精度的影响. 当扰动变量 γ 从0变化到0.4时, 由本文精确方法和前四阶摄动级数展开法计算得到的第一阶和第五阶特征值的扰动量如图2和3所示.

从图2和3可知, 当扰动变量较小时, 由本文精确方法和摄动级数展开法计算得到的特征值扰动量非常接近. 随着扰动变量的增大, 由本文精确方法和摄动级数展开法计算得到的特征值扰动量均逐渐增大, 摄动级数展开法计算得到的特征值扰动量与本文精确方法计算结果相比误差也逐渐增大. 同一扰动变量值下,

图1 无阻尼弹簧质量系统
Figure 1 Undamped spring-mass system

表1 无阻尼弹簧质量系统特征值的标称值和扰动量

Table 1 The normal and perturbed values of the eigenvalues of the undamped spring-mass system

特征值	本文精确方法(0.003 s)			矩阵摄动级数展开法							
	λ_{0E}	λ_{rE}	λ_{0M}	一阶(0.003 s)		二阶(0.009 s)		三阶(0.020 s)		四阶(0.030 s)	
				λ_{r1}	误差(%)	λ_{r2}	误差(%)	λ_{r3}	误差(%)	λ_{r4}	误差(%)
$\lambda^{(1)}$	0.08101	-3.5874×10^{-2}	0.08101	-3.2741×10^{-2}	-8.734	-3.5916×10^{-2}	1.163×10^{-1}	-3.5879×10^{-2}	1.309×10^{-2}	-3.5874×10^{-2}	-6.306×10^{-5}
$\lambda^{(2)}$	0.69028	-9.4163×10^{-3}	0.69028	-9.3190×10^{-3}	-1.033	-9.5062×10^{-3}	9.547×10^{-1}	-9.4108×10^{-3}	-5.862×10^{-2}	-9.4160×10^{-3}	-3.824×10^{-3}
$\lambda^{(3)}$	1.71537	1.5484×10^{-2}	1.71537	1.4858×10^{-2}	-4.045	1.5593×10^{-2}	7.042×10^{-1}	1.5482×10^{-2}	-1.528×10^{-2}	1.5484×10^{-2}	-2.601×10^{-3}
$\lambda^{(4)}$	2.83083	2.1118×10^{-2}	2.83083	1.9460×10^{-2}	-7.873	2.1117×10^{-2}	2.528×10^{-1}	2.1121×10^{-2}	1.526×10^{-2}	2.1118×10^{-2}	1.680×10^{-4}
$\lambda^{(5)}$	3.68251	8.6884×10^{-3}	3.68251	7.7425×10^{-3}	-10.89	8.6577×10^{-3}	-3.544×10^{-1}	8.6868×10^{-3}	-1.932×10^{-2}	8.6884×10^{-3}	-1.771×10^{-4}

图2 无阻尼弹簧质量系统第一阶特征值扰动量

Figure 2 The perturbed values of the first-order eigenvalue of the undamped spring-mass system

图3 无阻尼弹簧质量系统第五阶特征值扰动量

Figure 3 The perturbed values of the fifth-order eigenvalue of the undamped spring-mass system

随着摄动级数展开法阶数升高, 摄动级数展开法计算得到的特征值扰动量逐渐接近本文精确方法计算

结果, 这一点说明了本文精确方法计算结果的准确性。

3.2 伯努利-欧拉悬臂梁

考虑如图4所示由3段组成的均匀伯努利-欧拉悬臂梁。3段结构尺寸参数完全相同, 但材料属性参数不同。其中, 每段梁长 $L=5$ m, 截面宽度 $b=0.1$ m, 截面高度 $h=0.2$ m, 弹性模量 $E_1=210$ GPa, $E_2=100$ GPa, $E_3=70$ GPa, 密度 $\rho_1=7800$ kg/m³, $\rho_2=8300$ kg/m³, $\rho_3=2700$ kg/m³。用3次梁单元方法求解特征值问题。

广义特征值方程为

$$Ku = \lambda Mu, \quad (39)$$

其中, K, M 分别为梁整体刚度矩阵和质量矩阵。

由于整体刚度矩阵 M 可逆, 广义特征值式(39)可转化为标准特征值问题

$$M^{-1}Ku = \lambda u. \quad (40)$$

材料弹性模量存在扰动

$$E_{1r} = 10\% \times E_1, E_{2r} = 10\% \times E_2. \quad (41)$$

由本文精确方法和前四阶矩阵摄动级数展开法计算得到的特征值的标称值和扰动量见表2。计算时间和前四阶摄动级数展开法求得的计算结果误差同样见表2。

由计算结果可知, 对于同一阶特征值而言, 随着摄动级数展开法阶数的升高, 由摄动级数展开法计算得到的特征值的扰动量与本文精确方法计算结果相比误差越来越小, 即越来越接近本文精确方法的

图4 伯努利-欧拉悬臂梁

Figure 4 Bernoulli-Euler cantilever beam

表2 伯努利-欧拉悬臂梁特征值的标称值和扰动量

Table 2 The normal and perturbed values of the eigenvalues of the Bernoulli-Euler cantilever beam

特征值	本文精确方法(0.005 s)			矩阵摄动级数展开法							
	λ_{0E}	λ_{rE}	λ_{0M}	一阶(0.005 s)		二阶(0.010 s)		三阶(0.023 s)		四阶(0.035 s)	
				λ_{r1}	误差(%)	λ_{r2}	误差(%)	λ_{r3}	误差(%)	λ_{r4}	误差(%)
$\lambda^{(1)}$	625.19	52.0525	625.19	52.9127	1.653	52.0433	-1.770×10^{-2}	52.0525	2.405×10^{-5}	52.0525	3.394×10^{-6}
$\lambda^{(2)}$	4986.6	313.035	4986.6	322.336	2.971	312.545	-1.565×10^{-1}	313.056	6.718×10^{-3}	313.034	-2.193×10^{-4}
$\lambda^{(3)}$	27022	1741.64	27022	1759.78	1.042	1739.84	-1.037×10^{-1}	1741.83	1.090×10^{-2}	1741.62	-9.905×10^{-4}
$\lambda^{(4)}$	73410	5656.31	73410	5676.84	0.363	5658.87	4.529×10^{-2}	5656.10	-3.661×10^{-3}	5656.32	2.998×10^{-4}
$\lambda^{(5)}$	352975	10617.5	352975	12130.6	14.25	10360.2	-2.423	10643.5	2.451×10^{-1}	10618.5	8.716×10^{-3}
$\lambda^{(6)}$	526400	40465.7	526400	38903.7	-3.860	40722.7	6.352×10^{-1}	40439.6	-6.432×10^{-2}	40464.7	-2.285×10^{-3}

计算结果,证明了本文精确方法的准确性.此外,计算时间方面,本文精确方法用时与一阶摄动级数展开法用时最短,而一阶摄动级数展开法精度不高;而四阶摄动级数展开法精度很高,但用时也很长.因此,本文精确方法具有准确、高效的双重优势.

同样引入扰动变量 γ 描述材料弹性模量的扰动程度,研究本文精确方法中参数扰动程度对结果精度的影响

$$E_{1r} = \gamma \times E_1, E_{2r} = \gamma \times E_2. \quad (42)$$

在此研究了第三阶和第六阶特征值扰动量的变化情况.扰动变量 γ 从0变化到0.3时,由本文精确方法和前四阶摄动级数展开法计算得到的第三阶和第六阶特征值的扰动量如图5和6所示.

从图5和6可知,扰动变量较小时,由本文精确方

图5 伯努利-欧拉悬臂梁第三阶特征值扰动量
Figure 5 The perturbed values of the third-order eigenvalue of the Bernoulli-Euler cantilever beam

图6 伯努利-欧拉悬臂梁第六阶特征值扰动量
Figure 6 The perturbed values of the sixth-order eigenvalue of the Bernoulli-Euler cantilever beam

法和摄动级数展开法计算得到的特征值扰动量接近;当扰动变量增大时,由摄动级数展开法计算得到的特征值扰动量逐渐偏离本文精确方法计算结果,即相对误差逐渐增大,其中低阶摄动级数展开法更为显著.同一扰动变量下,摄动级数展开法阶数越高,摄动级数展开法计算得到的特征值扰动量越接近本文精确方法计算结果.这一点能够再次证明本文精确方法计算结果的准确性.

3.3 平面框架

下面考虑较为复杂的如图7所示由202个节点和357个梁单元组成的平面框架结构.其各项参数如下:对水平梁而言,长 $L_1=5$ m,弹性模量 $E_1=210$ GPa,截面高度 $H_1=0.8$ m,截面宽度 $B_1=0.5$ m;对竖直梁而言,长 $L_2=3$ m,弹性模量 $E_2=210$ GPa,截面高度 $H_2=0.6$ m,截面宽度 $B_2=0.5$ m;所有梁单元体密度均为 $\rho=7800$ kg/m³.

材料弹性模量存在扰动

$$E_{1r} = \gamma \times E_1. \quad (43)$$

分别考虑 $\gamma=0.1$ 和 0.3 的情况.由本文精确方法和前四阶矩阵摄动级数展开法计算得到的前四阶特征值的标称值和扰动量分别见表3和4.计算时间和前四阶摄动级数展开法求得的计算结果误差同样见表3和4.

由计算结果可知,当参数扰动程度较小时,即使是低阶矩阵摄动级数展开法也能得到精度较好的结

图7 平面框架
Figure 7 Plane frame

表 3 平面框架前四阶特征值的标称值和扰动量($\gamma=0.1$)Table 3 The normal and perturbed values of the first four eigenvalues of the plane frame ($\gamma=0.1$)

特征值	本文精确方法(11.782 s)			矩阵摄动级数展开法							
	λ_{0E}	λ_{rE}	λ_{0M}	一阶(0.188 s)		二阶(100.63 s)		三阶(315.34 s)		四阶(655.25 s)	
				λ_{r1}	误差(%)	λ_{r2}	误差(%)	λ_{r3}	误差(%)	λ_{r4}	误差(%)
$\lambda^{(1)}$	26.38639	1.07750	26.38639	1.13085	4.951	1.07439	-2.886×10^{-1}	1.07769	1.791×10^{-2}	1.07749	-1.149×10^{-3}
$\lambda^{(2)}$	243.08322	10.2020	243.08322	10.7063	4.943	10.1739	-2.763×10^{-1}	10.2037	1.636×10^{-2}	10.2019	-1.011×10^{-3}
$\lambda^{(3)}$	697.93521	30.1168	697.93521	31.6094	4.956	30.0365	-2.667×10^{-1}	30.1213	1.497×10^{-2}	30.1165	-8.751×10^{-4}
$\lambda^{(4)}$	1412.7677	61.9321	1412.7677	65.0180	4.983	61.7692	-2.630×10^{-1}	61.9409	1.428×10^{-2}	61.9316	-7.984×10^{-4}

表 4 平面框架前四阶特征值的标称值和扰动量($\gamma=0.3$)Table 4 The normal and perturbed values of the first four eigenvalues of the plane frame ($\gamma=0.3$)

特征值	本文精确方法(12.523 s)			矩阵摄动级数展开法							
	λ_{0E}	λ_{rE}	λ_{0M}	一阶(0.420 s)		二阶(134.45 s)		三阶(300.14 s)		四阶(693.31 s)	
				λ_{r1}	误差(%)	λ_{r2}	误差(%)	λ_{r3}	误差(%)	λ_{r4}	误差(%)
$\lambda^{(1)}$	26.38639	2.95964	26.38639	3.39254	14.63	2.88443	-2.541	2.97359	4.716×10^{-1}	2.95696	-9.053×10^{-2}
$\lambda^{(2)}$	243.08322	28.0120	243.08322	32.1189	14.66	27.3269	-2.446	28.1331	4.325×10^{-1}	27.9896	-7.992×10^{-2}
$\lambda^{(3)}$	697.93521	82.6333	697.93521	94.8282	14.76	80.6718	-2.374	82.9623	3.982×10^{-1}	82.5758	-6.955×10^{-2}
$\lambda^{(4)}$	1412.7677	169.803	1412.7677	195.054	14.87	165.815	-2.349	170.451	3.816×10^{-1}	169.695	-6.381×10^{-2}

果;但当参数扰动程度较大时,低阶矩阵摄动级数展开法计算结果精度较低.尽管高阶矩阵摄动级数展开法计算结果误差很小,但计算时间惊人,而相同情况下本文精确方法计算时间很短.本算例说明本文精确方法具有准确、高效的双重优势,应用大型复杂结构能够明显缩短计算时间、提高计算效率.

以上3个数值算例说明,对于实特征值而言,本文精确方法与矩阵摄动级数展开法相比在准确性和高效性方面具有明显的优势.本文精确方法准确的原因在于求解过程中没有经过近似处理而矩阵摄动级数展开法忽略了高阶项导致存在误差.

4 结果与讨论

本文提出了一种针对标准特征值问题扰动分析

的精确高效方法.在所提出的方法中,推导得到了无近似处理过程的标准特征值问题扰动分析求解方程,将求解标称系统标准特征值问题方程得到的特征值标称值代入,就能得到特征值扰动量的准确结果,从而能够满足高精度要求.与矩阵摄动级数展开法相比,本文精确方法克服了因忽略高阶项而导致计算精度不足的缺点,计算结果精度明显提高;同时,本文精确方法也克服了高阶矩阵摄动级数展开法计算效率较低的缺点,有效降低了计算成本.3个数值算例计算结果表明本文精确方法的计算精度和计算效率均显著高于矩阵摄动级数展开法.总之,本方法可以满足高精度和高效率的特征值扰动量计算要求,将成为进行标准特征值问题扰动分析的有效数学工具.

参考文献

- 1 Topping B H V, Neves L F, Barros R C. Trends in Civil and Structural Engineering Computing. Chicago: Saxe-Coburg Publications, 2010
- 2 Liu X L, Oliveira C S. Iterative modal perturbation and reanalysis of eigenvalue problem. Commun Numer Meth Eng, 2003, 19: 263–274
- 3 Chen S H, Wu X M, Yang Z J. Eigensolution reanalysis of modified structures using epsilon-algorithm. Int J Numer Meth Eng, 2006, 66: 2115–2130
- 4 Gantmacher F. The Theory of Matrices. New York: Chelsea, 1959

- 5 Chen S H. Matrix Perturbation Theory in Structure Vibration Analysis (in Chinese). Chongqing: Chongqing Publishing House, 1991 [陈塑寰. 结构振动分析的矩阵摄动理论. 重庆: 重庆出版社, 1991]
- 6 Chen S H. Vibration Theory of Structures with Random Parameters (in Chinese). Changchun: Jilin Science and Technology Publishing House, 1992 [陈塑寰. 随机参数结构的振动理论. 长春: 吉林科学技术出版社, 1992]
- 7 Wilkinson J H. The Algebraic Eigenvalue Problem. Oxford: Clarendon Press, 1965
- 8 Nayfeh A H. Perturbation Methods. New York: Wiley, 1973
- 9 Fox R L. Rates of changes of eigenvalues and eigenvectors. AIAA J, 1968, 6: 2426–2429
- 10 Chen J C, Wada B K. Matrix perturbation for structural dynamic analysis. AIAA J, 1977, 15: 1095–1100
- 11 Kagstrom B. The generalized singular value decomposition and the general $A-\lambda B$ problem. BIT Numer Maths, 1984, 24: 568–583
- 12 Inamura T. Eigenvalue reanalysis by improved perturbation. Int J Numer Meth Eng, 1988, 26: 167–181
- 13 Bickford W B. An improved perturbation technique for eigenvalues of continuous systems. Comm Appl Numer Meth, 1991, 7: 103–110
- 14 Chen S H, Song D T, Ma A J. Eigensolution reanalysis of modified structures using perturbations and Rayleigh quotients. Commun Numer Methods Eng, 1994, 10: 111–119
- 15 Liu X L. A perturbation method for reduction of eigenvalue analysis of structures with large stiffnesses and small masses. Int J Numer Meth Eng, 1997, 40: 2019–2035
- 16 Cha P D, Gu W. Comparing the perturbed eigensolutions of a generalized and a standard eigenvalue problem. J Sound Vib, 1999, 227: 1122–1132
- 17 Yang X W, Chen S H, Wu B S. Eigenvalue reanalysis of structures using perturbation and pade approximation. Mech Syst Signal Pr, 2001, 15: 257–263
- 18 Liu X L. Improved calculation of eigenvalue variation in dynamic system. AIAA J, 2001, 39: 1813–1816
- 19 Cha P D, Solberg K A. Applying eigenvalue perturbation theory to solve problems in structural dynamics. Intl J Eng Educ, 2008, 36: 160–175
- 20 Chen S H, Ma L, Meng G W, et al. An efficient method for evaluating the natural frequencies of structures with uncertain-but-bounded parameters. Comput Struct, 2009, 87: 582–590
- 21 Xia B Z, Yu D J. Interval analysis of acoustic field with uncertain-but-bounded parameters. Comput Struct, 2012, 112-113: 235–244
- 22 Eldred M S, Lerner P B, Anderson W J. Higher order eigenpair perturbations. AIAA J, 1992, 30: 1870–1876
- 23 Lü Z H, Shao C, Feng Z D. High Accuracy step-by-step perturbation method of generalized eigenvalue problem and its application to the parametric history analysis of structural vibration characteristics. J Sound Vib, 1993, 164: 459–469
- 24 Chen S H. Structural dynamic modification and sensitivity analysis: Matrix perturbation method for closely spaced eigenvalues. In: Vibration and Shock Handbook. New York: CRC Press, 2005
- 25 Smith R S. Eigenvalue perturbation models for robust control. IEEE Trans Autom Control, 1995, 40: 1063–1066
- 26 Yu L, Cheng L, Yam L H, et al. Application of eigenvalue perturbation theory for detecting small structural damage using dynamic responses. Compos Struct, 2007, 78: 402–409
- 27 Li J H, Yang Q W, Shen X, et al. Structural damage diagnosis using an improved eigenvalue perturbation method. Adv Mater Res, 2013, 753-755: 2347–2350
- 28 Qiu Z P, Mueller P C, Frommer A. An approximate method for the standard interval eigenvalue problem of real non-symmetric interval matrices. Commun Numer Meth Eng, 2001, 17: 239–251
- 29 Qiu Z P, Wang X J. Solution theorems for the standard eigenvalues problem of structures with uncertain-but-bounded parameters. J Sound Vib, 2005, 282: 381–399
- 30 Wang C, Qiu Z P. Modified perturbation method for eigenvalues of structure with interval parameters. Sci China-Phys Mech Astron, 2015, 58: 014602

Summary for “标准特征值问题扰动分析的精确方法”

An exact solution method for perturbation analysis of standard eigenvalue problems

QIU ZhiPing* & JIANG Nan

Institute of Solid Mechanics, School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China

* Corresponding author, E-mail: zpqi@buaa.edu.cn

In the presence of perturbation, the accurate method of calculating the perturbed values of eigenvalues is an important issue to ensure the safety in engineering structures. Based on a power series expansion for the eigenvalues and eigenvectors, all the present perturbation methods neglect the higher-order terms in the calculating process, which may result in the deterioration of accuracy. However, the present methods for improving the accuracy usually result in amazing amounts of computation. The contradiction between accuracy and efficiency has existed for a long time, which made the research stagnant in recent years.

In this paper, an exact solution method for perturbation analysis of standard eigenvalue problem is proposed to calculate the exact perturbed values of eigenvalues, overcoming the drawbacks of lack of accuracy due to neglecting the higher-order terms in matrix perturbation series expansion method. In the presented method, the perturbation solution equation of the standard eigenvalue problem is derived without any approximations in the derivation process. By substituting the normal eigenvalues obtained by solving the standard eigenvalue problem equation of the normal matrix into the derived perturbation solution equation, the perturbed values of eigenvalues can be calculated efficiently, which can satisfy the requirement of high accuracy and high efficiency for standard eigenvalue analysis with perturbed parameters.

In three numerical examples with perturbed parameters of the undamped spring-mass system, the Bernoulli-Euler cantilever beam and the plane frame, the accuracy and efficiency of the proposed method are verified by comparing numerical results with those obtained by matrix perturbation series expansion method. The results show:

(1) The relative errors of the perturbed values of eigenvalues yielded by the proposed method and the lower-order matrix perturbation series expansion method are much bigger and can be reduced remarkably with the increase of the order. The results obtained by higher-order matrix perturbation series expansion method are quite close to those obtained by the proposed method. It is known that as the order increases, the results obtained by the lower-order matrix perturbation series expansion method become much closer to the exact values. It is indicated that the accuracy of the proposed method is much higher.

(2) Although the results obtained by higher-order matrix perturbation series expansion method are quite close to those obtained by the proposed method, the execution time of the proposed method is much shorter than that of higher-order matrix perturbation series expansion method. It is indicated that the proposed method is much more efficient, especially for large and complex structures.

To sum up, the accuracy and efficiency of the proposed method are both remarkably higher than those of the matrix perturbation series expansion method for calculating the exact perturbed values of real eigenvalues. The reason for the proposed method of high accuracy is that the perturbed values of eigenvalues are exact without approximation while the higher-order terms in the matrix perturbation series expansion method are neglected. Predictably, this method will become a powerful tool for standard eigenvalue analysis with perturbed parameters in the future. Moreover, it can be highly applicable to the fields of engineering practice and will make great contributions.

standard eigenvalue problem, perturbation theory, exact solution, perturbation analysis, real eigenvalues, perturbation series expansion method

doi: 10.1360/N972016-01254