【研究简报】

非零值函数乘积的最优化问题

巴达拉胡

(内蒙古大学数学系, 呼和浩特 010021)

关键词 最优化 数学规划 极大-极小问题

若干个函数乘积的最优化问题, 即使每个因子函数都很简单, 整个问题也可能非常复杂. 本文对非零值函数乘积的最优化问题给出一个简化方法: 它们等价于一个以参数为系数的因子函数之和的最优化问题, 而且其最优参数只能取一些特定的值. 定理 3, 6, 7 表明本文的方法在一定程度上是行之有效的.

1 正值函数乘积的极小问题

引理 1 设 $a_i > 0, \xi_i > 0, \prod_{i=1}^k \xi_i = 1$, 则

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \xi_i a_i \geq \left(\prod_{i=1}^k a_i \right)^{\frac{1}{k}},$$

等号成立当且仅当

$$\xi_i = \frac{1}{a_i} \left(\prod_{j=1}^k a_j \right)^{\frac{1}{k}}, i = 1, \dots, k.$$

证 由算术-几何平均值不等式^[1]可得.

定理 1 设 X 为 $\mathbb{R}^n$ 中紧致集, $\mathbb{R}^+$ 表示正实数集, $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}^+, i = 1, \dots, k$. 若 x^* 是数学规划

量的兴趣, 感谢林晓松于 1994 年在北京大学就这一课题所作的精彩的导引性的报告, 感谢李天军寄给他 Bar-Natan 的预印本^[3] 他同时感谢姜伯驹和王诗庞组织了低维拓扑的学术活动使他有幸听到林晓松的报告. 作者们感谢李雅卿在证明本文引理 7 时的有益讨论, 并感谢许多同行(包括 S. V. Chmutov 和 S. V. Duzhin)寄给他们文章. 本工作得到数学天元基金的资助.

参 考 文 献

- 1 Arnold V I. Vassiliev's theory of discriminants and knots. Plenary Lecture at the First European Congress of Mathematics, Paris, July, 1992
- 2 Birman J, Lin X S. Knot polynomials and Vassiliev invariants. Invent Math, 1993, 111: 225
- 3 Bar-Natan D. On the Vassiliev's knot invariants. Topology, 1995, 34: 423
- 4 Knotsevich M. Vassiliev's knot invariants. Adv in Sov Math, 1993, 16: 137
- 5 Chmutov S V, Duzhin S V. An upper bound for the number of Vassiliev's knot invariants. J Knot Th Ramif, 1994, 3: 141
- 6 Przytycki J H. Vassiliev-Gusarov skein modules of 3-manifolds and criteria for knot's periodicity. Preprint, Dec, 1992

(1997-01-28 收稿)

$$\min_{x \in X} \prod_{i=1}^k f_i(x) \quad (1)$$

的最优解, 则存在 $\xi^* \in \mathbb{R}^k$, 使得 (x^*, ξ^*) 是规划

$$\min \sum_{i=1}^k \xi_i f_i(x), \quad \text{s.t. } x \in X, \xi > 0, \prod_{i=1}^k \xi_i = 1 \quad (2)$$

的最优解. 反之, 如果 (x^*, ξ^*) 是(2)式的最优解, 则 x^* 是(1)式的最优解.

定理 2 如果 (x^*, ξ^*) 是(2)式的最优解, 则必有

$$\xi_i^* = F(x^*)/f_i(x^*), i = 1, \dots, k. \quad (3)$$

定理 3 考虑数学规划

$$\min \prod_{i=1}^k (c_i'x), \quad \text{s.t. } Ax = b, x \geq 0, \quad (4)$$

这里 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c_i, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, 并且假定

$$c_i'x > 0, i = 1, \dots, k, \forall x \in D(D \text{ 表示(4)式的可行域}). \quad (5)$$

如果 $D \neq \emptyset$, 则(4)式必有最优解, 且其最优解必定可以在 D 的顶点处实现.

现在考虑下述问题

$$\max d'x, \quad \text{s.t. } Ax = b, x \geq 0, \prod_{i=1}^k (c_i'x) \leq \gamma, \quad (6)$$

这里 $d \in \mathbb{R}^n$, $\gamma > 0$. 我们假定(5)式成立, 以 S 表示(6)式的可行域.

定义 称 $y \in \mathbb{R}^n$ 是(6)式的 ϵ -最优解, 如果 $y \in S$ 并且对任意的 $x \in S$, 有 $d'y + \epsilon > d'x$.

下面的引理是受文献[2]的启发得到的.

引理 2 $y \in \mathbb{R}^n$ 是(6)式的 ϵ -最优解当且仅当 $y \in S$, 且下述问题

$$\min \prod_{i=1}^k (c_i'x), \quad \text{s.t. } Ax = b, x \geq 0, d'y + \epsilon \leq d'x, y \geq 0$$

的最优值大于 γ .

定理 4 如果(5)式成立, 则 y 是(6)式的 ϵ -最优解当且仅当规划

$$\min \sum_{i=1}^k \xi_i c_i'x, \quad \text{s.t. } \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ d' & -d' & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ \epsilon \end{bmatrix}$$

的最优值大于 $k\gamma^{\frac{1}{k}}$, 这里约束矩阵为 $(m+1) \times (2n+1)$ 阶.

证明利用引理 2, 定理 1 和 2 可得. 略.

2 正值函数乘积的极大问题

本节考虑数学规划

$$\max_{x \in X} \prod_{i=1}^k f_i(x), \quad (7)$$

这里 $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}^+$, X 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧致集.

定理 5 如果 x^* 为(7)式的最优解, 则存在 $\xi^* \in \mathbb{R}^k$, 使得 (x^*, ξ^*) 为极大-极小问题

$$\min_{\xi} \max_x \sum_{i=1}^k \xi_i f_i(x), \quad \text{s.t. } x \in X, \xi > 0, \prod_{i=1}^k \xi_i = 1 \quad (8)$$

的最优解. 反之, 如果 (x^*, ξ^*) 为(8)式的最优解, 则 x^* 为(7)式的最优解.

定理 6 在条件(5)下, 如果规划

$$\max \prod_{i=1}^k (c_i' x), \quad \text{s.t.} \quad Ax = b, x \geq 0 \quad (9)$$

有最优解, 则其必定可以在 D 的顶点处实现 (D 为(9)式的可行域).

证 由定理 5, (9)式可以等价地化为极大-极小问题

$$\min_{\xi} \max_x \sum_{i=1}^k \xi_i c_i' x, \quad \text{s.t.} \quad Ax = b, x \geq 0, \xi > 0, \prod_{i=1}^k \xi_i = 1. \quad (10)$$

显然, 对每个 ξ , 其最优解必定可以在 D 的顶点达到. 如果 (x^*, ξ^*) 是(10)式的最优解, 由定理 5, x^* 是(9)式的最优解, 它是 D 的顶点.

3 一般非零值函数乘积的最优化问题

定理 7 设 $f_i: X \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i=1, \dots, k$, X 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧致集. 假定规划

$$\min_{x \in X} \prod_{i=1}^k f_i(x) \quad (11)$$

的最优值大于零. 则 x^* 是(11)式的最优解当且仅当存在 $\xi^* \in \mathbb{R}^k$, 使得 (x^*, ξ^*) 是规划

$$\min \sum_{i=1}^k \xi_i f_i(x), \quad \text{s.t.} \quad x \in X, \xi_i f_i(x) > 0, \prod_{i=1}^k \xi_i = 1 \quad (12)$$

的最优解.

证 假定 x^* 是(11)式的最优解, 取 ξ^* 如(3)式所示. 显然, (x^*, ξ^*) 是(12)式的可行解. 设 $(\bar{x}, \bar{\xi})$ 为(12)式的任一可行解, 则有

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i f_i(\bar{x}) &\geq \left(\prod_{i=1}^k \bar{\xi}_i f_i(\bar{x}) \right)^{\frac{1}{k}} = \left(\prod_{i=1}^k f_i(\bar{x}) \right)^{\frac{1}{k}} \geq \\ &\left(\prod_{i=1}^k f_i(x^*) \right)^{\frac{1}{k}} = \left(\prod_{i=1}^k \xi_i^* f_i(x^*) \right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \xi_i^* f_i(x^*), \end{aligned}$$

这表明 (x^*, ξ^*) 为(12)式的最优解. 反之, 如果 (x^*, ξ^*) 是(12)式的最优解, $\bar{x}$ 为(11)式的任一可行解, 显然, $\prod_{i=1}^k f_i(\bar{x}) > 0$. 取 $\bar{\xi}_i = F(\bar{x})/f_i(\bar{x})$, $i=1, \dots, k$. 易见 $(\bar{x}, \bar{\xi})$ 是(12)式的可行解, 由引理 1 及 (x^*, ξ^*) 的最优性, 有

$$F(\bar{x}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i f_i(\bar{x}) \geq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \xi_i^* f_i(x^*) \geq F(x^*),$$

这表明 x^* 是(11)式的最优解.

注 在定理 7 条件下, 如果 (x^*, ξ^*) 是(12)式的最优解, 则必有(3)式成立.

定理 8 假定规划(11)的最优值小于零, 则 x^* 是(11)式的最优解当且仅当存在 ξ^* , 使得 (x^*, ξ^*) 为极大-极小问题

$$\min_{\xi} \max_x \sum_{i=1}^k \xi_i f_i(x), \quad \text{s.t.} \quad x \in X, \xi_i f_i(x) > 0, i=1, \dots, k, \prod_{i=1}^k \xi_i = -1 \quad (13)$$

的最优解, 且

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \xi_i^* f_i(x^*) = \left(- \prod_{i=1}^k f_i(x^*) \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (14)$$

证 必要性. 令

$$\xi_i^* = \left(- \prod_{i=1}^k f_i(x^*) \right)^{\frac{1}{k}} / f_i(x^*), i = 1, \dots, k. \quad (15)$$

则(14)式成立, 且 (x^*, ξ^*) 是(13)式的可行解, 又

$$\left(- \prod_{i=1}^k f_i(x) \right)^{\frac{1}{k}} = \left(\prod_{i=1}^k \xi_i f_i(x) \right)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \xi_i f_i(x) \leq \frac{1}{k} \max_x \sum_{i=1}^k \xi_i f_i(x),$$

$$\forall \xi_i f_i(x) > 0, i = 1, \dots, k, \prod_{i=1}^k \xi_i = -1, x \in X.$$

注意到上式左端与 ξ 无关, 故

$$\left(- \prod_{i=1}^k f_i(x^*) \right)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{k} \max_x \sum_{i=1}^k \xi_i f_i(x).$$

由于上式对任意的 $\xi_i f_i(x) > 0, i = 1, \dots, k, \prod_{i=1}^k \xi_i = -1$ 都成立, 故

$$\left(- \prod_{i=1}^k f_i(x^*) \right)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{k} \min_{\xi} \max_x \sum_{i=1}^k \xi_i f_i(x),$$

$$\forall \xi_i f_i(x) > 0, i = 1, \dots, k, \prod_{i=1}^k \xi_i = -1, x \in X. \quad (16)$$

由(14), (16)式, 可知 (x^*, ξ^*) 是(13)式的最优解.

充分性. 假定 (x^*, ξ^*) 是(13)式的最优解, 且(14)式成立, 但 x^* 不是(11)式的最优解.

设 $\bar{x}$ 是(11)式的最优解, 则 $\prod_{i=1}^k f_i(\bar{x}) < \prod_{i=1}^k f_i(x^*)$. 取 $\bar{\xi}_i = \left(- \prod_{i=1}^k f_i(\bar{x}) \right)^{\frac{1}{k}} / f_i(\bar{x}), i = 1,$

$\dots, k$, 由必要性, $(\bar{x}, \bar{\xi})$ 为(13)式的最优解, 且 $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i f_i(\bar{x}) = \left(- \prod_{i=1}^k f_i(\bar{x}) \right)^{\frac{1}{k}}$. 注意到(14)式, 有

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \xi_i^* f_i(x^*) \neq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i f_i(\bar{x}). \quad (17)$$

由于 (x^*, ξ^*) 为(13)式的最优解, 由(17)式, $(\bar{x}, \bar{\xi})$ 不是(13)式的最优解, 矛盾.

定理 9 如果(11)式的最优值小于零, 又 (x^*, ξ^*) 是(13)式的最优解, 则必有(15)式成立.

证 取 $\tilde{\xi}_i = \left(- \prod_{i=1}^k f_i(x^*) \right)^{\frac{1}{k}} / f_i(x^*), i = 1, \dots, k$. 显然, $(x^*, \tilde{\xi})$ 是(13)式的可行解, 由

(x^*, ξ^*) 的最优性, 有

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \xi_i^* f_i(x^*) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \tilde{\xi}_i f_i(x^*) = \left(- \prod_{i=1}^k f_i(x^*) \right)^{\frac{1}{k}}, \quad (18)$$

【研究简报】

以整个空间为 Li-Yorke 混沌集的连续映射

麦结华*

(汕头大学数学研究所, 汕头 515063. * 广西大学兼职教授)

关键词 混沌集 可扩映射 解析同胚

1 关于 Li-Yorke 混沌集的一个问题

混沌现象是非线性系统的运动复杂性的一个方面. 随着研究的对象、方法、目标或重点等等的不同, 不同的作者或同一个作者在不同的论著中给出的混沌的定义可以有或大或小的差异. 如下的定义首先由文献[1]提出:

定义 1 设 (X, d) 是个度量空间, $f: X \rightarrow X$ 是连续映射, S 是 X 的含有至少两点的子集. 若对 S 中的任两个不同的点 x, y 均有

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} d(f^k(x), f^k(y)) = 0, \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} d(f^k(x), f^k(y)) > 0,$$

则称 S 是 f 的一个 Li-Yorke 混沌集.

众多的作者对 Li-Yorke 混沌进行了讨论. 其中的一个问题是, 从基数、拓扑或测度的意义上来说, 定义 1 中的混沌集 S 能有多大? 当 X 是个紧致区间或是个圆周时, 人们知道^[2-4], f 有一个不可数的 Li-Yorke 混沌集的充要条件是 f 有一个恰含有两点的 Li-Yorke 混沌集. 文献[5]证明, 单边符号空间 Σ_N 上的转移自映射 $\sigma: \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ 有一个 Hausdorff 维数处处为 1 的 Li-Yorke 混沌集 C (此 C 甚至可以具有该文所述的更强的混沌性质). 但另一方面, 文献[5]的

这表明 $(x^*, \bar{\xi})$ 也是 (13) 式的最优解. (18) 式成立当且仅当成立

$$\begin{cases} \xi_1^* f_1(x^*) = \cdots = \xi_k^* f_k(x^*), \\ \prod_{i=1}^k \xi_i^* = -1, \xi_i^* f_i(x^*) = -1, i = 1, \cdots, k. \end{cases}$$

解上述方程组可知 $\xi^* = \bar{\xi}$.

致谢 感谢审稿人对本文提出的宝贵意见. 本工作为内蒙古自然科学基金资助项目.

参 考 文 献

- 1 Franklin J. Methods of Mathematical Economics. New York: Springer-Verlag, 1980. 219~221
- 2 邓明荣, 夏尊铨. 一类反凸规划的全局新算法. 应用数学学报, 1992, 15(1): 112~116

(1996-11-11 收稿, 1997-04-09 收修稿稿)