可压缩向列型液晶流体的适定性

徐夫义^{①②*}, 刘立山^②, 吴永洪^③^① 山东理工大学理学院, 淄博 255049;^② 曲阜师范大学数学科学学院, 曲阜 273165;^③ Department of Mathematics and Statistics, Curtin University of Technology, Perth, WA 6845, Australia

E-mail: zbxufuyi@163.com, mathlls@163.com, y.wu@curtin.edu.au

收稿日期: 2014-08-04; 接受日期: 2014-12-12; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11171034 和 11371221) 和中国博士后科研基金 (批准号: 2014M561893) 资助项目

摘要 本文研究多维 ($N \geq 2$) 可压缩向列型液晶流体的 Cauchy 问题, 在初始密度远离真空这个自然的条件下, 借助于 Littlewood-Paley 理论和 Schauder-Tychonoff 不动点定理, 在基于 L^p 框架下的临界 Besov 空间中证明大初值意义下可压缩向列型液晶模型强解的局部存在性和唯一性.

关键词 局部适定性 可压缩向列型液晶流体 Besov 空间

MSC (2010) 主题分类 35Q35, 76B03

1 引言

本文主要研究下面多维 ($N \geq 2$) 的可压缩向列型液晶流体的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} u + \nabla P(\rho) \\ \quad = -\alpha \operatorname{div} \left(\nabla d \odot \nabla d - \frac{1}{2} |\nabla d|^2 I \right), \\ \partial_t d + u \cdot \nabla d = \beta (\Delta d + |\nabla d|^2 d), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $\rho \in \mathbb{R}$ 表示流体的密度; $u \in \mathbb{R}^N$ 表示速度场; $d \in \mathbb{R}^N$ 表示晶体分子的方向向量场; 标量函数 $P \in \mathbb{R}$ 表示压力, 它是一个关于 ρ 的单增凸函数; μ 和 λ 分别表示剪切黏度和体积黏度, 它们满足物理假设

$$\mu > 0, \quad 2\mu + N\lambda \geq 0;$$

正常数 α 和 β 分别表示动能与势能的竞争参数和晶体方向场的 Deborah 数, 由于 α 和 β 的取值在本文的分析中不起作用, 不失一般性, 此处取 $\alpha = \beta = 1$; 符号 $\otimes$ 表示 Kronecker 张量积, 也就是说, $u \otimes u = (u_i u_j)_{1 \leq i, j \leq N}$; $\nabla d \odot \nabla d$ 表示一个矩阵, 它的第 i 行第 j 列的元素 ($1 \leq i, j \leq N$) 是 $\partial_{x_i} d \cdot \partial_{x_j} d$. 事实上, $\nabla d \odot \nabla d = (\nabla d)^\top \nabla d$, 其中 $(\nabla d)^\top$ 表示 $N \times N$ 阶矩阵 ∇d 的转置. 赋予系统 (1.1) 下面的初始值:

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad d|_{t=0} = d_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (1.2)$$

英文引用格式: Xu F Y, Liu L S, Wu Y H. On the well-posedness for the compressible nematic liquid crystal flow (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 331–348, doi: 10.1360/012015-4

向列型液晶由一些拥有相同方向结构特性和拉伸的棒状分子构成. 液晶的连续介质理论由 Ericksen^[1] 和 Leslie^[2] 在半个多世纪以前提出. 自此以后, 液晶的理论和应用研究都取得很多重要进展. 当流体变成可压缩时, 液晶系统就会变得更加复杂, 研究结果相对较少. 这里仅列举一些关于可压缩液晶流体的最新成果, Morro^[3] 对该模型进行了数值分析; Zakharov 和 Vakulenko^[4] 研究了可压缩液晶流体的动力学行为; Hu 和 Wu^[5] 研究了小初值条件下模型 (1.1) 强解的整体适定性. 特别需要指出的是, Ding 等人^[6] 基于能量变分法给出了系统 (1.1) 详细的推导过程. 从偏微分方程的角度来看, 系统 (1.1) 是一个具有强非线性项的双曲 - 抛物耦合方程组, 它包括了几类非常重要的流体动力学方程: 当 ρ 为常数, $\nabla \cdot u = 0$ 时, 系统 (1.1) 变成了不可压缩液晶流体; 当 d 为常数时, 系统 (1.1) 变成了可压缩 Navier-Stokes 方程; 当 ρ 和 d 为常数, $\nabla \cdot u = 0$ 时, 系统 (1.1) 变成了不可压缩 Navier-Stokes 方程; 当 ρ 为常数, $u = 0$ 时, 系统 (1.1) 变成了调和映照热流方程.

在初始值 ρ_0, u_0 和 d_0 足够光滑并且满足一个自然的可容性条件下, Huang 等人^[7] 证明了系统 (1.1) 局部强解的存在唯一性. 本文主要在临界 Besov 空间中研究大初值意义下系统 (1.1) 的局部适定性. 对于 $l > 0$, 系统 (1.1) 具有下面的 scaling 不变性:

$$\tilde{\rho} = \rho(l^2 t, lx), \quad \tilde{u} = lu(l^2 t, lx), \quad \tilde{d} = d(l^2 t, lx), \quad (1.3)$$

这里对压力进行适当的修正 $\tilde{P} = l^2 P$. 众所周知, 在 scaling 不变意义下的临界空间中研究流体动力学方程的适定性是一种非常重要的方法. 这种方法最早可以追溯到 Fujita 和 Kato^[8] 对 3 维不可压缩 Navier-Stokes 方程适定性的先驱性研究工作. 基于这个重要思想, Danchin^[9,10] 在基于 L^2 框架下临界 Besov 空间中证明了多维 ($N \geq 2$) 可压缩 Navier-Stokes 方程强解的适定性. 最近, Charve 和 Danchin^[11]、Chen 等人^[12,13] 及 Haspot^[14] 分别独立地在基于 L^p 框架下临界 Besov 空间中证明了可压缩 Navier-Stokes 方程的适定性. 通过 scaling 分析 (1.3) 可以看到, 空间 $\dot{H}^{\frac{N}{2}}$ 对密度场 ρ 是一个比较合适的选择. 不幸的是, 为了避免真空出现需要密度场的有界性, 由于 $\dot{H}^{\frac{N}{2}}$ 不能嵌入到 L^∞ , 从而导致空间 $\dot{H}^{\frac{N}{2}}$ 不是一个好的合适的选择. 为了克服这个困难, 受文献 [11–14] 处理可压缩 Navier-Stokes 方程方法的启发, 选择更自然的齐次空间 $\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}$ 且 $\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}} \hookrightarrow L^\infty$. 然而, 在临界空间中证明流体方程适定性, 如果把动量方程中椭圆算子看作一个常系数二阶算子加上一个由密度场和黏性系数诱导的扰动项处理, 那么, 扰动项的估计将带来困难. 为了克服这个困难, 一个重要的观察是, 如果 $\rho - \rho_0$ 在加权的 Besov 空间 $\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(\omega)$ (其定义在第 2 节) 是小的, 则扰动项将变成一个无害项. 这个思想已被 Chen 等人^[12,15] 成功地用来证明可压缩 Navier-Stokes 方程和浅水波方程在临界空间中的适定性.

本文主要是在初始密度场没有任何小性要求且有正下界时临界 Besov 空间中研究系统 (1.1) 的局部适定性. 相对于可压缩 Navier-Stokes 方程和浅水波方程, 系统 (1.1) 主要的困难是, 估计动量方程中的强非线性项 $\operatorname{div}(\nabla d \odot \nabla d - \frac{1}{2}|\nabla d|^2 I)$ 与调和映照热流方程中超临界非线性项 $|\nabla d|^2 d$. 本文的主要结果如下:

定理 1.1 假设 $\bar{\rho}_0 > 0, c_0 > 0$,

$$(\rho_0 - \bar{\rho}_0, u_0, d_0) \in \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}} \times (\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})^N \times (\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})^N, \quad \rho_0 \geq c_0,$$

则对于 $p \in (1, N]$, 存在一个正常数 T 使得系统 (1.1) 在 $[0, T] \times \mathbb{R}^N$ 上有唯一的解 $(\rho - \bar{\rho}_0, u, d) \in E_T^p$, 其中

$$E_T^p \triangleq C([0, T]; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}) \times (C([0, T]; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}) \cap L^1(0, T; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1}))^N \times (C([0, T]; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}) \cap L^1(0, T; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+2}))^N, \\ \rho \geq \frac{1}{2}c_0.$$

2 Littlewood-Paley 理论

2.1 Littlewood-Paley 分解

设 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ 是支撑在 $\mathcal{C} = \{\xi \in \mathbb{R}^N, \frac{3}{4} \leq |\xi| \leq \frac{8}{3}\}$ 上的光滑径向函数, 满足

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}\xi) = 1, \quad \text{当 } \xi \neq 0.$$

齐次二进制分解对应的齐次局部化算子定义为

$$\dot{\Delta}_q f := \varphi(2^{-q}D)f, \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

相应的低频截断算子

$$\dot{S}_q f := \chi(2^{-q}D)f, \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

容易验证,

$$\begin{aligned} \Delta_j \Delta_k f &= 0, \quad \text{当 } |j - k| \geq 2, \\ \Delta_j (S_{k-1} f \Delta_k f) &= 0, \quad \text{当 } |j - k| \geq 5. \end{aligned} \quad (2.1)$$

定义 $\mathcal{Z}'(\mathbb{R}^N)$ 为空间 $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^N) = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N); D^\alpha \hat{f}(0) = 0; \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ 为多重指标}\}$ 的对偶空间, 其等价于商空间 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)/\mathcal{P}$, 其中 $\mathcal{P}$ 表示多项式空间. 对 $f \in \mathcal{Z}'(\mathbb{R}^N)$, 形式上定义如下的齐次 Littlewood-Paley 分解:

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \dot{\Delta}_k f.$$

下面的 Bernstein 不等式将会在本文中经常使用.

引理 2.1 ^[16] 设 $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. 假设 $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $j \in \mathbb{Z}$, 则对于 $\gamma \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$, 存在不依赖于 f 和 j 的常数 C_1, C_2 使得下面的不等式成立,

$$\begin{aligned} \text{supp } \hat{f} \subseteq \{|\xi| \leq A_0 2^j\} &\Rightarrow \|\partial^\gamma f\|_q \leq C_1 2^{j|\gamma| + jN(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f\|_p, \\ \text{supp } \hat{f} \subseteq \{A_1 2^j \leq |\xi| \leq A_2 2^j\} &\Rightarrow \|f\|_p \leq C_2 2^{-j|\gamma|} \sup_{|\beta|=|\gamma|} \|\partial^\beta f\|_p. \end{aligned}$$

2.2 函数空间

定义 2.1 设 $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, r \leq +\infty$. 齐次 Besov 空间 $\dot{B}_{p,r}^s$ 定义如下:

$$\dot{B}_{p,r}^s = \{f \in \mathcal{Z}'(\mathbb{R}^N) : \|f\|_{\dot{B}_{p,r}^s} < +\infty\},$$

其中

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,r}^s} \stackrel{\text{def}}{=} \|2^{ks} \|\Delta_k f(t)\|_p\|_{\ell^r}.$$

取一个定义在 $[0, +\infty)$ 上的序列 $\{e_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 且满足下列条件:

$$e_k(t) \in [0, 1], \quad e_k(t) \leq e_{k'}(t), \quad \text{当 } k \leq k', \quad e_k(t) \sim e_{k'}(t), \quad \text{当 } k \sim k', \quad (2.2)$$

这里 $k \sim k'$ 意味着存在一个常数 N_0 使得 $|k - k'| \leq N_0$. 定义如下的权函数 $\{\omega_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$\omega_k(t) = \sum_{\ell \geq k} 2^{k-\ell} e_\ell(t), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

容易验证, 对于 $k \in \mathbb{Z}$ 有

$$\begin{aligned} \omega_k(t) &\leq 2, \quad e_k(t) \leq \omega_k(t), \\ \omega_k(t) &\leq 2^{k-k'} \omega_{k'}(t), \quad \text{当 } k \geq k'; \quad \omega_k(t) \leq 3\omega_{k'}(t), \quad \text{当 } k \leq k'; \\ \omega_k(t) &\sim \omega_{k'}(t), \quad \text{当 } k \sim k'. \end{aligned} \quad (2.3)$$

定义 2.2 ^[12] 设 $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, r \leq +\infty$, $0 < T < +\infty$. 加权的齐次 Besov 空间 $\dot{B}_{p,r}^s(\omega)$ 定义如下:

$$\dot{B}_{p,r}^s(\omega) = \{f \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^N) : \|f\|_{\dot{B}_{p,r}^s(\omega)} < +\infty\},$$

其中

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,r}^s(\omega)} = |2^{ks} \omega_k(T)| \|\dot{\Delta}_k f\|_p \|\ell^r.$$

显然有

$$\dot{B}_{p,r}^s \subset \dot{B}_{p,r}^s(\omega), \quad \|f\|_{\dot{B}_{p,r}^s(\omega)} \leq 2\|f\|_{\dot{B}_{p,r}^s}.$$

定义 2.3 ^[17] 设 $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, \rho, r \leq +\infty$, $0 < T \leq +\infty$. 齐次混合时空空间 $\tilde{L}_T^\rho(\dot{B}_{p,r}^s)$ 定义如下:

$$\tilde{L}_T^\rho(\dot{B}_{p,r}^s) = \{f \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^N) : \|f\|_{\tilde{L}_T^\rho(\dot{B}_{p,r}^s)} < +\infty\},$$

其中

$$\|f\|_{\tilde{L}_T^\rho(\dot{B}_{p,r}^s)}^r = \|2^{ks} \|\dot{\Delta}_k f(t)\|_{L^\rho(0,T;L^p)}\|_{\ell^r}.$$

显然有 $\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^s) = L_T^1(\dot{B}_{p,1}^s)$. 直接利用 Minkowski 不等式可得下面的嵌入关系:

$$L_T^\rho(\dot{B}_{p,r}^s) \hookrightarrow \tilde{L}_T^\rho(\dot{B}_{p,r}^s), \quad \text{当 } r \geq \rho;$$

$$\tilde{L}_T^\rho(\dot{B}_{p,r}^s) \hookrightarrow L_T^\rho(\dot{B}_{p,r}^s), \quad \text{当 } r \leq \rho.$$

定义 2.4 设 $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq +\infty$, $0 < T < +\infty$. 加权的混合时空空间 $\tilde{L}_T^q(\dot{B}_{p,1}^s(\omega))$ 定义如下:

$$\tilde{L}_T^q(\dot{B}_{p,1}^s(\omega)) = \{f \in L_T^q(\dot{B}_{p,1}^s(\omega)) : \|f\|_{\tilde{L}_T^q(\dot{B}_{p,1}^s(\omega))} < +\infty\},$$

其中

$$\|f\|_{\tilde{L}_T^q(\dot{B}_{p,1}^s(\omega))} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \omega_k(T) \left(\int_0^T \|\dot{\Delta}_k f(t)\|_p^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

注 2.1 对于 $k \in \mathbb{Z}$, $f \in \tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^s)$, 如果 $e_k(t)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的连续函数且 $e_k(0) = 0$, 那么, 对 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $\tilde{T} \in (0, T]$ 使得 $\|f\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^s(\omega))} \leq \varepsilon$.

2.3 Besov 空间中的非线性估计

首先回忆 Besov 空间中常用的非线性估计, 参见文献 [9, 10, 18–20].

引理 2.2 设 $s_1, s_2 \leq \frac{N}{p}$, $s_1 + s_2 > N \max(0, \frac{2}{p} - 1)$, $1 \leq p, q, q_1, q_2 \leq \infty$ 且满足 $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}$. 假设 $f \in \tilde{L}_T^{q_1}(\dot{B}_{p,1}^{s_1})$, $g \in \tilde{L}_T^{q_2}(\dot{B}_{p,1}^{s_2})$, 则下面的不等式成立,

$$\|fg\|_{\tilde{L}_T^q(\dot{B}_{p,1}^{s_1+s_2-\frac{N}{p}})} \leq C\|f\|_{\tilde{L}_T^{q_1}(\dot{B}_{p,1}^{s_1})}\|g\|_{\tilde{L}_T^{q_2}(\dot{B}_{p,1}^{s_2})}.$$

引理 2.3 设 $s_1 \leq \frac{N}{p}$, $s_2 < \frac{N}{p}$, $s_1 + s_2 \geq N \max(0, \frac{2}{p} - 1)$, $1 \leq p, q, q_1, q_2 \leq \infty$ 且满足 $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}$. 假设 $f \in \tilde{L}_T^{q_1}(\dot{B}_{p,1}^{s_1})$, $g \in \tilde{L}_T^{q_2}(\dot{B}_{p,\infty}^{s_2})$, 则下面的不等式成立,

$$\|fg\|_{\tilde{L}_T^q(\dot{B}_{p,\infty}^{s_1+s_2-\frac{N}{p}})} \leq C\|f\|_{\tilde{L}_T^{q_1}(\dot{B}_{p,1}^{s_1})}\|g\|_{\tilde{L}_T^{q_2}(\dot{B}_{p,\infty}^{s_2})}.$$

引理 2.4 设 $s > 0$, $1 \leq p, q \leq \infty$.

(i) 假设 $F \in W_{\text{loc}}^{[s]+3,\infty}(\mathbb{R})$ 满足 $F(0) = 0$. 对于 $f \in L_T^\infty(L^\infty) \cap \tilde{L}_T^q(\dot{B}_{p,1}^s)$, 则下面的不等式成立,

$$\|F(f)\|_{\tilde{L}_T^q(\dot{B}_{p,1}^s)} \leq C(1 + \|f\|_{L_T^\infty(L^\infty)})^{[s]+2}\|f\|_{\tilde{L}_T^q(\dot{B}_{p,1}^s)}.$$

(ii) 如果 $u, v \in \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}$, $(v-u) \in \dot{B}_{p,1}^s$ 对于 $s \in (-\frac{N}{p}, \frac{N}{p}]$, $G \in W_{\text{loc}}^{[\frac{N}{p}]+3,\infty}(\mathbb{R}^N)$ 满足 $G'(0) = 0$, 那么, $G(v) - G(u) \in \dot{B}_{p,1}^s$ 且存在一个仅依赖于 s, N 和 G 的两个变量的函数 $\tilde{C}$ 使得下面的不等式成立,

$$\|G(v) - G(u)\|_{\tilde{L}_T^q(\dot{B}_{p,1}^s)} \leq \tilde{C}(\|u\|_{L^\infty}, \|v\|_{L^\infty})(\|u\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + \|v\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}})\|v-u\|_{\tilde{L}_T^q(\dot{B}_{p,1}^s)}.$$

注 2.2 引理 2.2–2.4 对一般的齐次 Besov 空间仍然成立. 例如, 在引理 2.2 中的估计可以变成

$$\|fg\|_{\dot{B}_{p,1}^{s_1+s_2-\frac{N}{p}}} \leq C\|f\|_{\dot{B}_{p,1}^{s_1}}\|g\|_{\dot{B}_{p,1}^{s_2}},$$

其中 p, s_1 和 s_2 仍然满足引理 2.2 的条件.

接下来提供一些在加权 Besov 空间中的非线性估计, 参见文献 [12].

引理 2.5 设 $s_1 \leq \frac{N}{p} - 1$, $s_2 \leq \frac{N}{p}$, $s_1 + s_2 > N \max(0, \frac{2}{p} - 1)$, $1 \leq p, q, q_1, q_2 \leq \infty$ 且满足 $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}$. 假设 $f \in \tilde{L}_T^{q_1}(\dot{B}_{p,1}^{s_1}(\omega))$, $g \in \tilde{L}_T^{q_2}(\dot{B}_{p,1}^{s_2}(\omega))$, 则下面的不等式成立,

$$\|fg\|_{\tilde{L}_T^q(\dot{B}_{p,1}^{s_1+s_2-\frac{N}{p}}(\omega))} \leq C\|f\|_{\tilde{L}_T^{q_1}(\dot{B}_{p,1}^{s_1}(\omega))}\|g\|_{\tilde{L}_T^{q_2}(\dot{B}_{p,1}^{s_2}(\omega))}.$$

引理 2.6 设 $s_1 \leq \frac{N}{p} - 1$, $s_2 < \frac{N}{p}$, $s_1 + s_2 \geq N \max(0, \frac{2}{p} - 1)$, $1 \leq p, q, q_1, q_2 \leq \infty$ 满足 $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}$. 假设 $f \in \tilde{L}_T^{q_1}(\dot{B}_{p,1}^{s_1}(\omega))$, $g \in \tilde{L}_T^{q_2}(\dot{B}_{p,\infty}^{s_2}(\omega))$, 则下面的不等式成立,

$$\|fg\|_{\tilde{L}_T^q(\dot{B}_{p,\infty}^{s_1+s_2-\frac{N}{p}}(\omega))} \leq C\|f\|_{\tilde{L}_T^{q_1}(\dot{B}_{p,1}^{s_1}(\omega))}\|g\|_{\tilde{L}_T^{q_2}(\dot{B}_{p,\infty}^{s_2}(\omega))}.$$

引理 2.7 设 $s > 0$, $1 \leq p, q, r \leq \infty$. 假设 $F \in W_{\text{loc}}^{[s]+3,\infty}(\mathbb{R})$ 满足 $F(0) = 0$, 则下面的不等式成立,

$$\|F(f)\|_{\tilde{L}_T^q(\dot{B}_{p,r}^s(\omega))} \leq C(1 + \|f\|_{L_T^\infty(L^\infty)})^{[s]+2}\|f\|_{\tilde{L}_T^q(\dot{B}_{p,r}^s(\omega))}.$$

3 线性输运方程和线性化动量方程的估计

首先研究下面的线性输运方程:

$$\begin{cases} \partial_t u + v \cdot \nabla u = g, \\ u(0, x) = u_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

命题 3.1 ^[21] 假设 $s \in (-N \min(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}), 1 + \frac{N}{p})$, $1 \leq p, r \leq +\infty$. 若 $r = 1$, 则取 $s = 1 + \frac{N}{p}$. 设 v 是一个向量场且满足 $\nabla v \in L_T^1(\dot{B}_{p,r}^{\frac{N}{p}} \cap L^\infty)$. 假设 $u_0 \in \dot{B}_{p,r}^s$, $g \in L_T^1(\dot{B}_{p,r}^s)$, u 是系统 (3.1) 的一个解. 对 $t \in [0, T]$ 有下面的估计成立,

$$\|u\|_{\tilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,r}^s)} \leq \exp(CV(t)) \left(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,r}^s} + \int_0^t \exp(-CV(\tau)) \|g(\tau)\|_{\dot{B}_{p,r}^s} d\tau \right),$$

其中

$$V(t) \triangleq \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{\dot{B}_{p,r}^{\frac{N}{p}} \cap L^\infty} d\tau.$$

如果 $r < +\infty$, 则 $u \in \mathcal{C}([0, T]; \dot{B}_{p,r}^s)$.

命题 3.2 假设 $p \in [1, +\infty]$, $s \in (-N \min(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}), \frac{N}{p}]$. 设 v 是一个向量场且满足 $\nabla v \in L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})$. 假设 $u_0 \in \dot{B}_{p,1}^s$, $g \in L_T^1(\dot{B}_{p,1}^s)$, u 是系统 (3.1) 一个解. 对于 $t \in [0, T]$ 有下面的不等式成立,

$$\|u\|_{\tilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^s(\omega))} \leq \exp(CV(t)) \left(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^s(\omega)} + \int_0^t \exp(-CV(\tau)) \|g(\tau)\|_{\dot{B}_{p,1}^s(\omega)} d\tau \right),$$

其中

$$V(t) \triangleq \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} d\tau.$$

研究下面线性化动量方程:

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(\bar{\mu} \nabla u) - \nabla((\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \operatorname{div} u) = G, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

假设黏性系数 $\bar{\lambda}(\rho)$ 和 $\bar{\mu}(\rho)$ 是光滑的, 且存在一个正常数 c_1 使得

$$\bar{\mu} \geq c_1, \quad \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} \geq c_1.$$

固定一个正常数 c (具体值后面选定), 此处权函数 $\omega_k(t)$ 取成下面的形式:

$$\omega_k(t) = \sum_{\ell \geq k} 2^{k-\ell} e_\ell(t),$$

且 $e_\ell(t) = (1 - e^{-c2^{2\ell}t})^{\frac{1}{2}}$. 容易验证函数 $e_\ell(t)$ 满足 (2.2).

命题 3.3 ^[12] 对于 $q \in [1, \infty]$. 假设 $G \in L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{s-1})$, $u_0 \in \dot{B}_{p,1}^{s-1}$, $\rho - \bar{\rho}_0 \in L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})$. 若 u 是系统 (3.2) 的一个解, 有以下结论成立,

(a) 如果 $p \in (1, N]$, $s \in (-N \min(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}) + 1, \frac{N}{p}]$, 则

$$\|u\|_{\tilde{L}_T^q(\dot{B}_{p,1}^{s-1+2/q})} \leq C(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{s-1}} + \|G(\tau)\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{s-1})} + A(T)\|\rho - \bar{\rho}_0\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{s+1})});$$

另外, 如果 $\rho - \bar{\rho}_0 \in L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})$, $p \in (1, \infty)$, $s \in (-N \min(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}) + 1, \frac{N}{p} + 1]$, 则

$$\|u\|_{\tilde{L}_T^q(\dot{B}_{p,1}^{s-1+2/q})} \leq C(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{s-1}} + \|G(\tau)\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{s-1})} + A(T)\|\rho - \bar{\rho}_0\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} \|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^s)}).$$

(b) 如果 $p \in (1, N]$, $s \in (-N \min(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}) + 1, \frac{N}{p}]$, 则

$$\begin{aligned} & \|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{s+1})} + \|u\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^s)} \\ & \leq C(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{s-1}(\omega)} + \|G(\tau)\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{s-1}(\omega))} + A(T)\|\rho - \bar{\rho}_0\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(\omega))} \|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{s+1})}), \end{aligned}$$

其中

$$A(T) \triangleq (1 + \|\rho\|_{L_T^\infty(L^\infty)})^{[\frac{N}{p}]+2}.$$

(c) 如果 $p \in (1, N]$, $s \in (-N \min(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}) + 1, \frac{N}{p}]$, 则

$$\begin{aligned} & \|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{N}{p}+2})} + \|u\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{N}{p}+1})} \\ & \leq C(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{N}{p}}} + \|G(\tau)\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{N}{p}}(\omega))} + A(T)\|\rho - \bar{\rho}_0\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(\omega))} \|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{N}{p}+2})}), \end{aligned}$$

其中

$$A(T) \triangleq (1 + \|\rho\|_{L_T^\infty(L^\infty)})^{[\frac{N}{p}]+2}.$$

命题 3.4 设 $s \in \mathbb{R}$, $p, q, r \in [1, \infty]$. 假设 $f \in L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{s-1})$, $u_0 \in \dot{B}_{p,1}^{s-1}$. 设 u 是下面热方程的一个解,

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (3.3)$$

则

(a) $\|u\|_{\tilde{L}_T^q(\dot{B}_{p,r}^{s-1+2/q})} \leq C(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,r}^{s-1}} + \|f(\tau)\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,r}^{s-1})})$, 进一步有 $u \in \mathcal{C}([0, T]; \dot{B}_{p,r}^{s-1})$;

(b) $\|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{s+1})} + \|u\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^s)} \leq C(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{s-1}(\omega)} + \|f(\tau)\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{s-1}(\omega))})$.

证明 (a) 部分的证明是标准的. (b) 部分的证明类似于命题 3.3, 这里省略具体细节. $\square$

注 3.1 对比命题 3.3, 由于方程 (3.3) 是常系数, 所以在命题 3.4 中去掉了 p 的严格的范围限制.

4 系统 (1.1) 物理非真空条件下的局部适定性

令

$$a(t, x) = \frac{\rho(t, x) - \bar{\rho}_0}{\bar{\rho}_0}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\rho}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\rho},$$

则系统 (1.1) 可以变成

$$\begin{cases} \partial_t a + u \cdot \nabla a = F, \\ \partial_t u - \operatorname{div}(\bar{\mu} \nabla u) - \nabla((\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \operatorname{div} u) = G, \\ \partial_t d - \Delta d = E, \\ (a, u, d)|_{t=0} = (a_0, u_0, d_0), \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 $a_0 = \frac{\rho_0(x) - \bar{\rho}_0}{\bar{\rho}_0}$,

$$F(a, u) = -(1+a)\operatorname{div} u,$$

$$G(a, u, d) = \left(-u \cdot \nabla u + \frac{P'(\bar{\rho}_0(1+a))}{1+a} \nabla a + \frac{\mu}{\bar{\rho}_0(1+a)^2} \nabla a \cdot \nabla u + \frac{\mu + \lambda}{\bar{\rho}_0(1+a)^2} \nabla a \operatorname{div} u \right) \\ - \frac{1}{\bar{\rho}_0(1+a)} \operatorname{div} \left(\nabla d \odot \nabla d - \frac{1}{2} |\nabla d|^2 I \right) \triangleq G_1 + G_2,$$

$$E(u, d) = -u \cdot \nabla d + |\nabla d|^2 d.$$

4.1 存在性的证明

本节证明系统 (1.1) 解的存在性, 主要借助于下面的 Schauder-Tychonoff 不动点定理.

定理 4.1 ^[22] 设 E 是局部凸拓扑线性空间, K 是 E 中的凸子集, $\Phi: K \rightarrow K$ 的连续映射. 若 $\Phi(K)$ 是 K 中的一个紧子集, 则 Φ 在 K 中有不动点.

下面分 4 步完成存在性的证明.

第 1 步 构造映射 Φ .

定义映射 $\Phi(\sigma, v, \phi) = (a, u, d)$, 其中 (a, u, d) 是下面线性系统的解,

$$\begin{cases} \partial_t a + v \cdot \nabla a = F(\sigma, v), \\ \partial_t u - \operatorname{div}(\bar{\mu} \nabla u) - \nabla((\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \operatorname{div} u) = G(\sigma, v, \phi), \\ \partial_t d - \Delta d = E(\phi, v), \\ (a, u, d)|_{t=0} = (a_0, u_0, d_0). \end{cases} \quad (4.2)$$

记 $E_0 \triangleq \|a_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + \|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}} + \|d_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}}$, 对某个常数 $c_0 > 0$, 假设

$$\rho_0 \geq c_0. \quad (4.3)$$

定义空间

$$\tilde{E}_T^p := \tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}) \times (\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}) \cap \tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1}))^N \times (\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}) \cap \tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+2}))^N.$$

设正常数 A_0, C_0 和 η (待定), 对于 $(\sigma, v, \phi) \in \tilde{E}_T^p$, 定义集合 $\mathcal{A}$ 如下:

$$\begin{aligned} \rho(\sigma) &\geq \frac{c_0}{2}, \quad \text{对 } (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N, \\ \|\sigma\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} + \|u\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} + \|d\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} &\leq C_0 E_0, \\ \|\sigma\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(\omega))} &\leq A_0 \eta, \\ \|v\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} + \|v\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} + \|\phi\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+2})} + \|\phi\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} &\leq \eta. \end{aligned}$$

我们断言: 当 T 和 η 足够小时, 有 $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.

事实上, 假设 $(\sigma, v, \phi) \in \mathcal{A}$, 并记 $U(t) := \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} d\tau$. 利用命题 3.1 可知,

$$\|a\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \leq e^{CU(T)} (\|a_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + \|(1+\sigma)\operatorname{div} v\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})})$$

$$\leq e^{CU(T)} (\|a_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + (1 + \|\sigma\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}) \|v\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}). \quad (4.4)$$

利用命题 3.3(a) 和 3.4(a) 可以推出,

$$\|u\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \leq C(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}} + \|G\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} + A(T)\|\sigma\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}), \quad (4.5)$$

$$\|d\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \leq C(\|d_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + \|E\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}), \quad (4.6)$$

其中 $A(T) \triangleq (1 + \|\sigma\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})})^{[\frac{N}{p}]+3}$.

利用引理 2.2 和 2.4 可得

$$\begin{aligned} \|G\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} &\leq C\|v\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \|v\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} + CA(T)\|\sigma\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} (T + \|v\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}) \\ &\quad + CA(T) \left\| \operatorname{div} \left(\nabla \phi \odot \nabla \phi - \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 I \right) \right\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \\ &\leq \|v\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \|v\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} + CA(T)\|\sigma\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} (T + \|v\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}) \\ &\quad + CA(T) \|\nabla \phi\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}^2 \\ &\leq \|v\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \|v\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} + CA(T)\|\sigma\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} (T + \|v\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}) \\ &\quad + CA(T) \|\phi\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \|\phi\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+2})}, \\ \|E\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} &\leq C(\|v \cdot \nabla \phi\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} + \|\nabla \phi\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}^2) \\ &\leq C(\|v\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \|\nabla \phi\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} + \|\phi\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \|\nabla \phi\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}^2) \\ &\leq C(\|v\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \|\phi\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+2})} + \|\phi\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}^2 \|\phi\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+2})}). \end{aligned}$$

联合上式及 (4.4)–(4.6) 可得

$$\begin{aligned} &\|a\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} + \|u\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} + \|d\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \\ &\leq Ce^{CU(T)} (\|a_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}} + (1 + \|\sigma\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}) \|v\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}) + C(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}} \\ &\quad + A(T)\|\sigma\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} + \|v\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \|v\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}) \\ &\quad + CA(T)\|\sigma\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} (T + \|v\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}) + CA(T) \|\phi\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \|\phi\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+2})} \\ &\quad + C(\|v\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \|\phi\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+2})} + \|\phi\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}^2 \|\phi\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+2})}) \\ &\leq Ce^{CU(T)} (E_0 + (1 + C_0 E_0) \eta) + CA(T) C_0 E_0 (T + \eta + \|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}) + C(1 + C_0 E_0) C_0 E_0 \eta \\ &\leq Ce^{CU(T)} (E_0 + (1 + C_0 E_0) \eta) + CA(T) C_0 E_0 (T + \eta + \|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

利用命题 3.2 和引理 2.5 可以推出,

$$\begin{aligned}
\|a\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(\omega))} &\leq e^{CU(T)}(\|a_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(\omega)} + \|(1+\sigma)\operatorname{div} v\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(\omega))}) \\
&\leq e^{CU(T)}(\|a_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(\omega)} + C(1+\|\sigma\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})})\|v\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}) \\
&\leq e^{CU(T)}(\|a_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(\omega)} + C(1+C_0E_0)\eta),
\end{aligned} \tag{4.8}$$

这里利用了 $\omega_k(t) = \sum_{l \geq k} 2^{k-l} e_l(t) \leq 2$.

借助于命题 3.3(b)、引理 2.2、2.5 和 2.7 可以推出,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} + \|u\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} &\leq C(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}(\omega)} + \|G\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}(\omega))} + A(T)\|\sigma\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(\omega))} \|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}) \\
&\leq C(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}(\omega)} + \|v\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}^2 + A(T)\|\sigma\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(\omega))} (T + \|v\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}) \\
&\quad + (1+A(T)\|\sigma\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})})\|\phi\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}^2 + A(T)\|\sigma\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(\omega))} \|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}).
\end{aligned}$$

由上式可得

$$\begin{aligned}
(1 - CA(T)A_0\eta)\|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} + \|u\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \\
\leq C(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}(\omega)} + A(T)A_0\eta(T + \eta) + (2 + A(T)C_0E_0)\eta^2).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

利用命题 3.4(b) 和引理 2.2 可知,

$$\begin{aligned}
\|d\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+2})} + \|d\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} &\leq C(\|d_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(\omega)} + \|E\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(\omega))}) \\
&\leq C(\|d_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(\omega)} + \|v\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \|\nabla \phi\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} + \|\phi\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}}) \|\nabla \phi\|^2_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}) \\
&\leq C(\|d_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(\omega)} + \|v\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \|\phi\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} + \|\phi\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}}) \|\phi\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}^2) \\
&\leq C(\|d_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(\omega)} + \eta^2 + C_0E_0\eta^2),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

此处利用了 $\omega_k(t) = \sum_{l \geq k} 2^{k-l} e_l(t) \leq 2$. 通过 $U(T)$ 和 $A(T)$ 的定义可得

$$U(T) \leq \eta, \quad A(T) \leq (1 + C_0E_0)^{[\frac{N}{p}]+3}.$$

取 $C_0 = 4C$, $A_0 = 2C(1 + C_0E_0)$. 取足够小的 η 使得

$$\begin{aligned}
e^{C\eta} &\leq \frac{3}{2}, \quad (C_0E_0 + 1)\eta \leq E_0, \quad C(C_0E_0 + 1)^{[\frac{N}{p}]+3}\eta \leq \frac{1}{16}, \\
C(2 + (1 + C_0E_0)^{[\frac{N}{p}]+3}C_0E_0)\eta &\leq \frac{1}{7}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

同时取足够小的 T 使得

$$C(C_0E_0 + 1)^{[\frac{N}{p}]+3}T \leq \frac{1}{16}, \quad CA_0(1 + C_0E_0)^{[\frac{N}{p}]+3}T \leq \frac{1}{7}. \tag{4.12}$$

注意到 $\omega_k(0) = 0$, $(a_0, u_0, d_0) \in \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}} \times \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1} \times \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}$, 进一步利用时间 T 的小性可知,

$$\|a_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(\omega)} \leq \frac{1}{6}A_0\eta, \quad \|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}(\omega)} \leq \frac{1}{7C}\eta, \quad \|d_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(\omega)} \leq \frac{1}{7C}\eta. \quad (4.13)$$

由 (4.7) 可得

$$\|a\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} + \|u\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} + \|d\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \leq C_0 E_0.$$

联合 (4.8)–(4.10) 可知,

$$\|a\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} \leq A_0\eta, \quad \|u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} + \|u\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} + \|d\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+2})} + \|d\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} \leq \eta.$$

设 $X(t, x)$ 是下面方程的解,

$$\frac{d}{dt}X(t, x) = u(t, X(t, x)), \quad X(0, x) = x.$$

记 $X^{-1}(t, x)$ 表示 $X(t, x)$ 的逆映射. 则 $a(t, x)$ 可表示为

$$a(t, x) = a_0(X^{-1}(t, x)) + \int_0^t F(\tau, X(\tau, X^{-1}(t, x)))d\tau.$$

从而,

$$\bar{\rho}_0(1 + a(t, x)) = \rho_0(X^{-1}(t, x)) + \bar{\rho}_0 \int_0^t F(\tau, X(\tau, X^{-1}(t, x)))d\tau. \quad (4.14)$$

另一方面,

$$\|F\|_{L_T^1(L^\infty)} \leq \|\nabla u\|_{L_T^1(L^\infty)}(1 + \|a\|_{L_T^\infty(L^\infty)}) \leq C(1 + C_0 E_0)\eta.$$

由 η 的小性可知,

$$C(1 + C_0 E_0)\eta < \frac{1}{2}c_0.$$

由 (4.14) 和 (4.3) 可得

$$\rho(a) = \bar{\rho}_0(1 + a(t, x)) \geq c_0 - \frac{1}{2}c_0 = \frac{1}{2}c_0.$$

从而有 $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.

第 2 步 关于时间导数的估计.

映射 Φ 的紧性来自下面的引理:

引理 4.1 对于 $(\sigma, v, \phi) \in \mathcal{A}$, 设 $(a, u, d) := \Phi(\sigma, v, \phi)$, 其中 T, η, C_0 和 A_0 的取法与第 1 步相同, 则对 $\alpha \in [-1, 1]$ 且满足 $\alpha > \max(2 - 2N/p, 2 - N)$, 都有 $a_t, d_t \in L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})$, $u_t \in L_T^{\frac{2}{1+\alpha}}(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1} + \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-2+\alpha})$, 且存在一个依赖于 T, η, C_0, A_0 和 E_0 的常数 $\bar{C}$ 使得

$$\|\partial_t a\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} + \|\partial_t d\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} + \|\partial_t u\|_{L_T^{\frac{2}{1+\alpha}}(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1} + \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-2+\alpha})} \leq \bar{C}.$$

证明 通过 a, d 的定义和引理 2.2 可得

$$\begin{aligned} \|\partial_t a\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} &\leq C(1 + \|a\|_{L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} + \|\sigma\|_{L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})})\|v\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}, \\ \|\partial_t d\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} &\leq C(\|\Delta d\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} + \|v \cdot \nabla \phi\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} + \| |\nabla \phi|^2 \phi \|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})}) \\ &\leq C(\|d\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} + \|v\|_{L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} \|\phi\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} + \|\phi\|_{L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}^2 \|\phi\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})}). \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \partial_t u &= (\operatorname{div}(\bar{\mu} \nabla u) + \nabla((\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \operatorname{div} u)) - v \cdot \nabla v + \left(\frac{\mu \bar{\rho}_0}{\rho^2} \nabla \sigma \cdot \nabla v + \frac{(\mu + \lambda) \bar{\rho}_0}{\rho^2} \nabla \sigma \operatorname{div} v \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\nabla \phi \odot \nabla \phi - \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 I) \right) + \frac{\bar{\rho}_0 P'(\rho)}{\rho} \nabla \sigma. \end{aligned} \quad (4.15)$$

由于 v, u 和 $\nabla \phi$ 属于 $L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}) \cap L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})$, 利用插值不等式可得

$$v, u, \nabla \phi \in L_T^{\frac{2}{1+\alpha}}(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+\alpha}), \quad v, u, \nabla \phi \in L_T^{\frac{2}{\alpha}}(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+\alpha-1}), \quad \text{对 } \alpha \in [-1, 1].$$

利用引理 2.2 和 2.4, 联合条件 $\alpha > \max(2 - 2N/p, 2 - N)$ 可以推出 (4.15) 右边第一和三项属于 $L_T^{\frac{2}{1+\alpha}}(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-2+\alpha})$. 进一步, 由 $v \in L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})$ 和 $\nabla v \in L_T^{\frac{2}{\alpha}}(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+\alpha-2})$ 可以推出 $v \cdot \nabla v \in L_T^{\frac{2}{1+\alpha}}(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-2+\alpha})$. 同时也容易验证最后一项属于 $L_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})$.

第 3 步 不动点方法.

首先介绍一个函数空间

$$\begin{aligned} Y_T^p &:= \tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}) \times (\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}) \cap \tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}) \cap \mathcal{M}_T(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1}))^N \\ &\quad \times (\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}) \cap \tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1}) \cap \mathcal{M}_T(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+2}))^N, \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{M}_T(\dot{B}_{p,1}^s)$ 表示在 $[0, T]$ 上有界可测且取值在 $\dot{B}_{p,1}^s$ 上的函数集. 赋予空间 Y_T^p 下面的范数:

$$\|(\sigma, v, \phi)\|_{Y_T^p} := \|\sigma\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} + \|(v, \nabla \phi)\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}) \cap \tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} + \int_0^T \mathbf{d}\|(v, \nabla \phi)\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1}},$$

则 $(Y_T^p, \|\cdot\|_{Y_T^p})$ 是一个 Banach 空间. 进一步, 设

$$\begin{aligned} X_T^p &:= \tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p',\infty}^{-\frac{N}{p}}) \times (\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p',\infty}^{1-\frac{N}{p}}) + \tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p',\infty}^{-\frac{N}{p}}) + \mathcal{C}([0, T]; \dot{B}_{p',\infty}^{-\frac{N}{p}-1}))^N \\ &\quad \times (\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{p',\infty}^{-\frac{N}{p}}) + \tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p',\infty}^{-1-\frac{N}{p}}) + \mathcal{C}([0, T]; \dot{B}_{p',\infty}^{-2-\frac{N}{p}}))^N \end{aligned}$$

的对偶空间为 Y_T^p , 其中 $\tilde{L}_T^1(B_{q,\infty}^k)$ 表示 $\mathcal{S}([0, T]; \mathbb{R}^N)$ 在 $\tilde{L}_T^1(B_{q,\infty}^k)$ 范数下的完备化空间, 这里 X_T^p 是一个可分的 Banach 空间.

对于引理 4.1 中的常数 $\bar{C}$, 定义集合

$$\mathcal{B} := \{(\sigma, v, \phi) \in \mathcal{A} : \|(\partial_t \sigma, \partial_t \phi)\|_{L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})} + \|\partial_t v\|_{L_T^{\frac{4}{3}}(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1} + \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-3/2})} \leq \bar{C}\}.$$

因为 Y_T^p 是一个可分 Banach 空间的对偶空间, 则 Y_T^p 在弱*拓扑下是一个凸的拓扑线性空间. 显然, $\mathcal{A}$ 是 Y_T^p 的一个凸子集. 由引理 4.1 可知, $\Phi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$. 又因为 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, 从而, Φ 是从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{B}$ 的映射.

(i) Φ 的连续性.

因为 $\mathcal{B}$ 是 Y_T^p 的有界子集, 且 Y_T^p 是一个可分 Banach 空间的对偶空间, 所以, 仅需要证明 Φ 在弱 * 拓扑下的连续性.

假设 $(\sigma^n, v^n, \phi^n) \in \mathcal{B}$, 满足 $(\sigma^n, v^n, \phi^n) \rightharpoonup (\sigma, v, \phi)$ 弱 * 收敛, 记 $(a^n, u^n, d^n) = \Phi(\sigma^n, v^n, \phi^n)$. 因为 $(a^n, u^n, d^n) \in \mathcal{B}$, 则存在一个分布 (a, u, d) 满足 $\mathcal{A}$ 中的条件, 并且 $\mathcal{A}$ 中最后一个不等式被下面的式子所替代,

$$\|u\|_{\mathcal{M}_T(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} + \|u\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})} + \|d\|_{\mathcal{M}_T(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+2})} + \|d\|_{\tilde{L}_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} \leq \eta, \quad (4.16)$$

同时可以取出弱 * 收敛的子列, 仍记作 $(a^n, u^n, d^n) \rightharpoonup (a, u, d)$. 则只需验证 $(a, u, d) = \Phi(\sigma, v, \phi)$. 为此需要提供序列 (a^n, u^n, d^n) 和 (σ^n, v^n, ϕ^n) 的强收敛性. 首先证明 (σ^n, v^n, ϕ^n) 的收敛性. 事实上, 取 χ_j 是一个支撑在球 $B(0, j+1)$ 上且在 $B(0, j)$ 上取值为 1 的光滑函数序列. 由于 $(\sigma^n, v^n, \phi^n) \in \mathcal{B}$, 利用 Hölder 不等式可知, 在空间

$$\mathcal{C}^{\frac{1}{2}}([0, T]; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}) \times \mathcal{C}^{\frac{1}{4}}([0, T]; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1} + \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-\frac{3}{2}}) \times \mathcal{C}^{\frac{1}{2}}([0, T]; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})$$

上, $(\chi_j \sigma^n, \chi_j v^n, \chi_j \phi^n)$ 是一致有界的. 又因为

$$\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1} \cap \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}} \hookrightarrow \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}, \quad (\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-3/2} + \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}) \cap \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1} \hookrightarrow \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-3/2} + \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}$$

是局部紧嵌入, 利用 Ascoli 定理和 Cantor 对角化过程可知, 对于 $j \in \mathbb{N}$, 在空间

$$\mathcal{C}([0, T]; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}) \times \mathcal{C}([0, T]; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1} + \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-\frac{3}{2}}) \times \mathcal{C}([0, T]; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})$$

中存在 (σ', v', ϕ') 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $(\chi_j \sigma^n, \chi_j v^n, \chi_j \phi^n) \rightarrow (\chi_j \sigma', \chi_j v', \chi_j \phi')$. 显然, 由极限的唯一性可知, $(\sigma', v', \phi') = (\sigma, v, \phi)$. 进一步, 利用插值不等式可得

$$\begin{aligned} \chi_j \sigma^n &\longrightarrow \chi_j \sigma', \quad \text{在 } C([0, T]; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-s}), \quad \forall 0 < s \leq 1, \\ \chi_j v^n &\longrightarrow \chi_j v', \quad \text{在 } L^1([0, T]; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+s}), \quad \forall -1 - \theta \leq s < 1, \\ \chi_j \phi^n &\longrightarrow \chi_j \phi', \quad \text{在 } L^1([0, T]; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+s}), \quad \forall -1 \leq s < 2. \end{aligned}$$

对于 (a^n, u^n, d^n) 也有类似的证明. 有了这些准备工作, 对 (σ^n, v^n, ϕ^n) 和 (a^n, u^n, d^n) 满足的方程两边取极限可知, $(a, u, d) = \Phi(\sigma, v, \phi)$, 从而证明了 Φ 的连续性.

(ii) Φ 的紧性.

由紧算子的定义可知, 对于 $(\sigma^n, v^n, \phi^n) \in \mathcal{B}$, 仅需证明序列 $(a^n, u^n, d^n) = \Phi(\sigma^n, v^n, \phi^n)$ 在 $\mathcal{B}$ 中有一个收敛子列即可. 对于所有的 n , 因为序列 $(a^n, u^n, d^n) \in \mathcal{B}$, 则存在一个分布 (a, u, d) 满足 $\mathcal{A}$ 中的条件且 $\mathcal{A}$ 中的最后一个不等式被 (4.16) 替代, 所以, 剩下的主要困难就是证明 $u \in L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})$ 和 $d \in L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+2})$. 首先利用下面的方程:

$$\partial_t u^n - \frac{\bar{\mu}}{\rho} \Delta u^n = -\nabla \left(\frac{\bar{\mu} \sigma^n}{\rho(\sigma^n) \bar{\rho}} \nabla u^n \right) - \nabla \left(\frac{\bar{\lambda} + \bar{\mu}}{\rho(\sigma^n) \bar{\rho}} \nabla \cdot u^n \right) + G(\sigma^n, v^n, \phi^n).$$

由引理 2.2 和 2.4 可知, 上式右边属于 $L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})$. 利用文献 [21, 命题 2.3] 可以推出, 对 $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq T$, 有

$$\|u^n\|_{L^1(T_1, T_2; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})} \leq C \sum_q c_q \left(\frac{1 - e^{-k \frac{\bar{\mu}}{\bar{\rho}} (T_2 - T_1) 2^{2q}}}{k \frac{\bar{\mu}}{\bar{\rho}}} \right),$$

其中 $\{c_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ 表示正项级数且满足 $\|\{c_q\}\|_1 = 1$. 则空间 $\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1}$ 中的序列 $\{u^n\}$ 在 $[0, T]$ 上等度可积. 由 Dunford-Pettis 定理可知, 极限函数 $u \in L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1})$. 类似地可以证明 $d \in L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+2})$.

最后, 利用 $(\partial_t a^n, \partial_t u^n, \partial_t d^n)$ 在空间

$$L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}) \times L_T^{\frac{4}{3}}(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1} + \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-\frac{3}{2}}) \times L_T^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})$$

中的一致估计可得 $(a, u, d) \in \mathcal{B}$. 由定理 4.1 可知, 映射 Φ 有不动点 $(a, u, d) \in \mathcal{B}$, 即系统 (4.1) 有解.

第 4 步 关于时间的连续性.

因为 $(a, u, d) \in \mathcal{B}$, 可以证明 (4.1)₁ 右边项属于 $L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})$. 由命题 3.1 可知, $a \in C([0, T]; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})$. 进一步, 由 (4.1)₂ 和 (4.1)₃ 可以证明 $\partial_t u \in L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})$, $\partial_t d \in L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})$. 因此, 由命题 3.4 可得 $u \in C([0, T]; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1})$, $d \in C([0, T]; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})$.

4.2 唯一性的证明

本节证明系统 (4.1) 解的唯一性. 首先回忆一下 Osgood 引理, 它能够使我们在临界空间中证明系统 (4.1) 解的唯一性.

引理 4.2 ^[23] 设 $\rho \geq 0$ 是一个可测函数, γ 是一个局部可积函数, μ 是一个正的连续的单调非减函数且满足下面的条件:

$$\int_0^1 \frac{dr}{\mu(r)} = +\infty.$$

设 a 是一个正实数, ρ 满足下面的不等式:

$$\rho(t) \leq a + \int_0^t \gamma(s) \mu(\rho(s)) ds,$$

那么,

- (i) 如果 a 等于零, 则 ρ 为零;
- (ii) 如果 a 是非零的, 则

$$-\mathcal{M}(\rho(t)) + \mathcal{M}(a) \leq \int_0^t \gamma(s) ds, \quad \mathcal{M}(x) = \int_x^1 \frac{dr}{\mu(r)}.$$

同时也需要下面的插值不等式:

引理 4.3 ^[24] 设 $s \in \mathbb{R}$, 对于 $1 \leq p, \rho \leq +\infty$ 和 $0 < \epsilon \leq 1$, 有下面的不等式成立,

$$\|f\|_{\tilde{L}_T^\rho(\dot{B}_{p,\infty}^s)} \leq C \frac{\|f\|_{\tilde{L}_T^\rho(\dot{B}_{p,\infty}^s)}}{\epsilon} \log \left(e + \frac{\|f\|_{\tilde{L}_T^\rho(\dot{B}_{p,\infty}^{s-\epsilon})} + \|f\|_{\tilde{L}_T^\rho(\dot{B}_{p,\infty}^{s+\epsilon})}}{\|f\|_{\tilde{L}_T^\rho(\dot{B}_{p,\infty}^s)}} \right).$$

假设 (a_1, u_1, d_1) 和 (a_2, u_2, d_2) 是系统 (4.1) 在 E_T^p 中两个具有相同初值的解. 不失一般性, 对于 $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N$, 假设 a_1 满足

$$\rho_1(t, x) = \bar{\rho}_0(1 + a_1(t, x)) \geq \frac{c_0}{2}.$$

由于 $a_2 \in C([0, T]; \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})$, $\rho_2(0, x) \geq c_0$, 对 $(t, x) \in [0, \tilde{T}] \times \mathbb{R}^N$, 则存在时间 $\tilde{T} \in (0, T]$ 使得

$$\rho_2(t, x) = \bar{\rho}_0(1 + a_2(t, x)) \geq \frac{c_0}{2}.$$

令 $\delta a = a_1 - a_2$, $\delta u = u_1 - u_2$, $\delta d = d_1 - d_2$, 则 $(\delta a, \delta u, \delta d)$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t \delta a + u_2 \cdot \nabla \delta a = \delta F - \delta u \cdot \nabla a_1, \\ \partial_t \delta u - \operatorname{div}(\bar{\mu}_1 \nabla \delta u) - \nabla((\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1) \operatorname{div} \delta u) = \delta G + \delta H, \\ \partial_t \delta d - \Delta \delta d = \delta E, \\ (\delta a, \delta u, \delta d)|_{t=0} = (0, 0, 0), \end{cases} \quad (4.17)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta F &= F(a_1, u_1) - F(a_2, u_2), \quad \delta G = G(a_1, u_1, d_1) - G(a_2, u_2, d_1) = \delta G_1 + \delta G_2, \\ \delta H &= \operatorname{div}\left(\frac{\mu \bar{\rho}_0 \delta a}{\rho_1 \rho_2} \nabla u_2\right) + \nabla g\left(\frac{(\mu + \lambda) \bar{\rho}_0 \delta a}{\rho_1 \rho_2} \operatorname{div} u_2\right), \\ \delta E &= E(u_1, d_1) - E(u_2, d_2) = -\delta u \nabla d_1 - u_2 \cdot \nabla \delta d + |\nabla d_1|^2 \delta d + (\nabla \delta d : \nabla d_1 + \nabla d_2 : \nabla \delta d) d_2, \end{aligned}$$

$$\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}(a_i), \quad \bar{\mu}_i = \bar{\mu}(a_i), \quad i = 1, 2, \quad A : B = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} B_{ij}.$$

记 $U_i(t) = \int_0^t \|u_i(\tau)\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}+1}} d\tau$ ($i = 1, 2$), A_T 是依赖 $\|a_1\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}$ 和 $\|a_2\|_{\tilde{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}})}$ 的正常数. 由嵌入关系 $E_T^p \subseteq E_T^N$ 可知, 仅需在 E_T^N 中证明唯一性. 所以可取 $p = N$.

对 $t \in [0, T]$, 由命题 3.1 可得

$$\|\delta a(t)\|_{\dot{B}_{N,\infty}^0} \leq e^{CU_2(t)} \int_0^t (\|\delta F(\tau)\|_{\dot{B}_{N,\infty}^0} + \|\delta u \cdot \nabla a_1(\tau)\|_{\dot{B}_{N,\infty}^0}) d\tau. \quad (4.18)$$

由引理 2.3 可知,

$$\|\delta F(\tau)\|_{\dot{B}_{N,\infty}^0} + \|\delta u \cdot \nabla a_1(\tau)\|_{\dot{B}_{N,\infty}^0} \leq C \|u_2(\tau)\|_{\dot{B}_{N,1}^2} \|\delta a(\tau)\|_{\dot{B}_{N,\infty}^0} + C(1 + \|a_1(\tau)\|_{\dot{B}_{N,1}^1}) \|\delta u(\tau)\|_{\dot{B}_{N,1}^1}.$$

把上式代入 (4.18), 借助于 Gronwall 不等式可得

$$\|\delta a(t)\|_{\dot{B}_{N,\infty}^0} \leq e^{CU_2(t)} \int_0^t (1 + \|a_1(\tau)\|_{\dot{B}_{N,1}^1}) \|\delta u(\tau)\|_{\dot{B}_{N,1}^1} d\tau. \quad (4.19)$$

对 $t \in [0, T]$, 利用命题 3.3(c) 可以推出,

$$\begin{aligned} \|\delta u\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^1)} + \|\delta u\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,\infty}^0)} &\leq C \|\delta G\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^{-1}(\omega))} + C \|\delta H\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^{-1}(\omega))} \\ &\quad + CA_T \|a_1\|_{\tilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{N,1}^1(\omega))} \|\delta u\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^1)}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

利用命题 3.4(a) 可以推出,

$$\|\delta d\|_{\tilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{N,\infty}^0)} + \|\delta d\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^2)} + \|\delta d\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,\infty}^1)} \leq C \|\delta E\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^0)}. \quad (4.21)$$

对 $t \in [0, \tilde{T}]$, 借助于引理 2.2、2.3、2.6 和 2.7 可知,

$$\|\delta H\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^{-1})} \leq A_T \|u_2\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,1}^2)} \|\delta a\|_{\tilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{N,\infty}^0)}, \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \|\delta G_1\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^{-1}(\omega))} &\leq C \|(u_1, u_2)\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,1}^1)} \|\delta u\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,\infty}^0)} + A_T \|a_1\|_{\tilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{N,1}^1(\omega))} \|\delta u\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^1)} \\ &\quad + A_T (1 + \|u_2\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,1}^2)}) \|\delta a\|_{\tilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{N,\infty}^0)}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
\|\delta G_2\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^{-1}(\omega))} &\leq CA_T \|a_1\|_{\tilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{N,1}^1)} (\|\operatorname{div}(\nabla d_2 \odot \nabla \delta d + \nabla \delta d \odot \nabla d_1)\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^{-1})}) \\
&\quad + CA_T \|(a_1, a_2)\|_{\tilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{N,1}^1)} \|\delta a\|_{\tilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{N,\infty}^0)} (\|\operatorname{div}(\nabla d_2 \odot \nabla d_2)\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,1}^0)}) \\
&\leq CA_T \|a_1\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,1}^1)} (\|\nabla d_2 \odot \nabla \delta d + \nabla \delta d \odot \nabla d_1\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^0)}) \\
&\quad + CA_T \|(a_1, a_2)\|_{\tilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{N,1}^1)} \|\delta a\|_{\tilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{N,\infty}^0)} (\|\nabla d_2 \odot \nabla d_2\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,1}^1)}) \\
&\leq CA_T \|a_1\|_{\tilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{N,1}^1)} \|(d_1, d_2)\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,1}^2)} \|\delta d\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,\infty}^1)} \\
&\quad + CA_T \|(a_1, a_2)\|_{\tilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{N,1}^1)} \|\delta a\|_{\tilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{N,\infty}^0)} \|d_2\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,1}^2)}^2, \tag{4.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\delta E\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^0)} &\leq \|\delta u\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,\infty}^0)} \|\nabla d_1\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,1}^1)} + \|u_2\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,1}^1)} \|\nabla \delta d\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,\infty}^0)} \\
&\quad + \|\delta d\|_{\tilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{N,\infty}^0)} \|\nabla d_1\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,1}^1)}^2 + \|\nabla \delta d\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,\infty}^0)} \|d_2 \nabla d_1\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,1}^1)} \\
&\quad + \|\nabla \delta d\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,\infty}^0)} \|d_1 \nabla d_2\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,1}^1)} \\
&\leq \|\delta u\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,\infty}^0)} \|d_1\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,1}^2)} + \|u_2\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,1}^1)} \|\delta d\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,\infty}^1)} \\
&\quad + \|\delta d\|_{\tilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{N,\infty}^0)} \|d_1\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,1}^2)}^2 + \|\delta d\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,\infty}^0)} \|d_1\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,1}^2)} \|d_2\|_{\tilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{N,1}^1)} \\
&\quad + \|\delta d\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,\infty}^0)} \|d_1\|_{\tilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{N,1}^1)} \|d_2\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,1}^2)}. \tag{4.25}
\end{aligned}$$

取足够小的 $\tilde{T}$ 使得

$$\|(u_1, u_2)\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,1}^2) \cap \tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,1}^1)} + \|(a_1, a_2)\|_{\tilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{N,1}^1(\omega))} + \|(d_1, d_2)\|_{\tilde{L}_t^2(\dot{B}_{N,1}^2)}^2 \ll 1.$$

把 (4.22)–(4.25) 代入 (4.20)–(4.21), 然后把 (4.20) 和 (4.21) 相加可知,

$$\|\delta u\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^1)} + \|\delta d\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^2)} \leq C \int_0^t (1 + \|(u_1, u_2)(\tau)\|_{\dot{B}_{N,1}^2} + \|d_2(\tau)\|_{\dot{B}_{N,1}^2}^2) \|\delta a(\tau)\|_{\dot{B}_{N,\infty}^0} d\tau. \tag{4.26}$$

由引理 4.3 可知,

$$\|\delta u\|_{L_t^1(\dot{B}_{N,1}^1)} \leq C \|\delta u\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^1)} \log \left(e + \frac{\|\delta u\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^0)} + \|\delta u\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^2)}}{\|\delta u\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^1)}} \right).$$

上式联合 (4.19) 可知,

$$\|\delta a(t)\|_{\dot{B}_{N,\infty}^0} \leq C \|\delta u\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^1)} \log \left(e + \frac{\|\delta u\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^0)} + \|\delta u\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^2)}}{\|\delta u\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^1)}} \right).$$

通过上面的估计和 (4.26) 可以推出,

$$\begin{aligned}
\|\delta u\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^1)} + \|\delta d\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^2)} &\leq C \int_0^t (1 + \|(u_1, u_2)(\tau)\|_{\dot{B}_{N,1}^2} + \|d_2(\tau)\|_{\dot{B}_{N,1}^2}^2) \\
&\quad \times V(\tau) \log \left(e + \frac{C_T}{V(\tau)} \right) d\tau, \tag{4.27}
\end{aligned}$$

其中

$$V(t) = \|\delta u\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^1)} + \|\delta d\|_{\tilde{L}_t^1(\dot{B}_{N,\infty}^2)}, \quad C_T = \|\delta u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{N,\infty}^0)} + \|\delta u\|_{\tilde{L}_T^1(\dot{B}_{N,\infty}^2)}.$$

注意到 $1 + \|(u_1, u_2)(t)\|_{\dot{B}_{N,1}^2}^2 + \|d_2(t)\|_{\dot{B}_{N,1}^2}^2$ 在 $[0, T]$ 上可积, 且

$$\int_0^1 \frac{dr}{r \log(e + C_T r^{-1})} dr = +\infty.$$

由 Osgood 引理 4.2 可以推出, 在 $[0, \tilde{T}]$ 上有 $(\delta u, \delta d) = 0$. 进一步, 由不等式 (4.19) 可得 $\delta a = 0$. 标准的连续性方法可得在 $[0, T]$ 有 $(a_1, u_1, d_1) = (a_2, u_2, d_2)$.

致谢 感谢两位审稿人对本文提出的详尽的修改意见和建议. 也感谢苗长兴研究员的悉心指导和热情鼓励.

参考文献

- 1 Ericksen J L. Hydrostatic theory of liquid crystal. *Arch Ration Mech Anal*, 1962, 9: 371–378
- 2 Leslie F M. Some constitutive equations for liquid crystals. *Arch Ration Mech Anal*, 1968, 28: 265–283
- 3 Morro A. Modelling of nematic liquid crystals in electromagnetic fields. *Adv Theor Appl Mech*, 2009, 2: 43–58
- 4 Zakharov A V, Vakulenko A A. Orientational dynamics of the compressible nematic liquid crystals induced by a temperature gradient. *Phys Rev E* (3), 2009, 79: 011708
- 5 Hu X P, Wu H. Global solution to the three-dimensional compressible flow of liquid crystals. *SIAM J Math Anal*, 2013, 45: 2678–2699
- 6 Ding S J, Huang J R, Wen H Y, et al. Incompressible limit of the compressible hydrodynamic flow of liquid crystals. *J Funct Anal*, 2013, 264: 1711–1756
- 7 Huang T, Wang C Y, Wen H Y. Strong solutions of the compressible nematic liquid crystal flow. *J Differential Equations*, 2012, 252: 2222–2265
- 8 Fujita H, Kato T. On the Navier-Stokes initial value problem, I. *Arch Ration Mech Anal*, 1964, 16: 269–315
- 9 Danchin R. Global existence in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations. *Invent Math*, 2000, 141: 579–614
- 10 Danchin R. Well-posedness in critical spaces for barotropic viscous fluids with truly not constant density. *Comm Partial Differential Equations*, 2007, 32: 1373–1397
- 11 Charve F, Danchin R. A global existence result for the compressible Navier-Stokes equations in the critical L^p framework. *Arch Ration Mech Anal*, 2010, 198: 233–271
- 12 Chen Q L, Miao C X, Zhang Z Z. Well-posedness in critical spaces for the compressible Navier-Stokes equations with density dependent viscosities. *Rev Mat Iberoam*, 2010, 26: 915–946
- 13 Chen Q L, Miao C X, Zhang Z Z. Global well-posedness for compressible Navier-Stokes equations with highly oscillating initial velocity. *Comm Pure Appl Math*, 2010, 63: 1173–1224
- 14 Haspot B. Existence of global strong solutions in critical spaces for barotropic viscous fluids. *Arch Ration Mech Anal*, 2011, 202: 427–460
- 15 Chen Q L, Miao C X, Zhang Z Z. Well-posedness for the viscous shallow water equations in critical spaces. *SIAM J Math Anal*, 2008, 40: 443–474
- 16 Chemin J Y. *Perfect Incompressible Fluids*. New York: Oxford University Press, 1998
- 17 Chemin J Y, Lerner N. Flot de champs de vecteurs non lipschitziens et équations de Navier-Stokes. *J Differential Equations*, 1992, 121: 314–328
- 18 Danchin R. On the uniqueness in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations. *Nonlinear Differential Equations Appl*, 2005, 12: 111–128
- 19 Miao C X, Wu J H, Zhang Z Z. Littlewood-Paley theory and applications to fluid dynamics equations. In: *Monographs on Modern Pure Mathematics*. Beijing: Science Press, 2012
- 20 Bahouri H, Chemin J Y, Danchin R. Fourier analysis and nonlinear partial differential equations. In: *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Heidelberg: Springer, 2011
- 21 Danchin R. Local theory in critical spaces for compressible viscous and heat-conductive gases. *Comm Partial Differential Equations*, 2001, 26: 1183–1233
- 22 Hukuhara M. Sur l'existence des points invariants d'une transformation dans l'espace fonctionnel. *Jpn J Math*, 1950, 20: 1–4
- 23 Fleet T M. *Differential Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1980

- 24 Danchin R. Density-dependent incompressible viscous fluids in critical spaces. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 2003, 133: 1311–1334

On the well-posedness for the compressible nematic liquid crystal flow

XU FuYi, LIU LiShan & WU YongHong

Abstract The Cauchy problem for the compressible flow of nematic liquid crystals in dimension ($N \geq 2$) is considered. Employing the Littlewood-Paley theory and Schauder-Tychonoff fixed point theorem, we prove the local well-posedness of the system for large initial data in critical Besov spaces based on the L^p framework under the sole natural assumption that the initial density is bounded away from zero.

Keywords local well-posedness, compressible liquid crystal flow, Besov space

MSC(2010) 35Q35, 76B03

doi: 10.1360/012015-4